Name: **Datum:**

CZ20 - Federschwingung - quantenmechanisch betrachtet - Aufgabe

An einer Schraubenfeder (Federkonstante D) hängt ein Körper der Masse m. Die Masse des Pendelkörpers ist so groß, daß man ihr gegenüber die Masse der Feder vernachlässigen kann. Der an der Feder hängende Körper führt harmonische Schwingungen aus. Die Amplitude der Federschwingung ist x_0. Das Weg-Zeit-Gesetz des Pendelkörpers lautet $x(t) = x_0 \cdot \sin 2\pi \cdot f \cdot t$, wobei f die Frequenz bedeutet.

1. Geben Sie den Impuls $P(t)$ des schwingenden Körpers an.
2. Eliminieren Sie aus $x(t)$ und $P(t)$ die Zeit t und zeigen Sie, daß die Graphen des Pendelkörpers in einem rechtwinkligen P-x-Koordinatensystem Ellipsen sind!
3. Berechnen Sie den Flächeninhalt einer Ellipse!
4. Nach *Planck* existieren von den möglichen Zuständen eines linearen Oszillators (das Federpendel ist ein linearer Oszillator) nur diejenigen mit der Energie $E = n \cdot h \cdot f$.

   Zeigen Sie, daß der Flächeninhalt einer Ellipse $\frac{E}{f}$ ist.

   Benutzen Sie dabei die Beziehungen

   $$E_{\text{Oszillator}} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x_0^2 \text{ und } f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

5. Bestimmen Sie die Quantenzahl n für die Zahlenwerte $m = 1{,}0$ kg, $D = 20\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$, $x_0 = 10^{-2}$ m.
6. Die Quantenzahl nimmt um eins zu.
   a) In welchem Verhältnis steht die Energieänderung zur Gesamtenergie?
   b) Welchen Flächeninhalt schließt der Ellipsenring ein, der von zwei aufeinanderfolgenden Ellipsen gebildet wird?

Nach: Hammer, A.: Physik-Oberstufe Atomphysik. München: Oldenbourg 1968.

Lösung:

1. Es gilt

$$P(t) = m \cdot \frac{d\,x(t)}{dt} = \underline{\qquad\qquad\qquad} \quad \text{(L1)}$$

2. Ihre Rechnung:

Mittelpunktsgleichung der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1$$

3.

Der Flächeninhalt F einer Ellipse mit den Halbachsen a und b berechnet sich aus der Beziehung $F = \pi \cdot a \cdot b$.

Setzen Sie ein!

Ob Ihre Ergebnisse richtig sind, zeigt 4. !

4.

Ihre Rechnung:

5.

Ihre Rechnung:

Ergebnis: $n = 2{,}1 \cdot 10^{30}$

L2

6.

Ihre Rechnung:

a)

b)

L1

Anmerkungen

1. Man ersieht aus den Ergebnissen, daß für derartige Federschwingungen die Quantenzahlen riesig groß sind und daß sich die Quantennatur der Energie hier niemals bemerkbar machen kann.

2. Die Bohrsche Quantenbedingung ist eigentlich weiter nichts als eine *zweckmäßige Verallgemeinerung* des *Planck*schen Postulats über die Auswahl der Quantenzustände eines linearen Oszillators.

Lösung L1

Aufgabe 20: Federschwingung — quantenmechanisch betrachtet

1. $P(t) = m \cdot x_0 \cdot 2\pi \cdot f \cos 2\pi\, f \cdot t$

6. a) $\frac{\Delta E}{E} = \frac{(n+1)\,hf - n \cdot hf}{n \cdot hf} = \frac{1}{n} \approx 10^{-30}$

b) h

Lösung L2

Aufgabe 20: Federschwingung-quantenmechanisch betrachtet

5. $f = 0{,}71$ Hz

$E = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ J

$n = \frac{E}{h \cdot f} = 2{,}1 \cdot 10^{30}$