Musteraufgaben Jahrgang 10 – Gymnasium

Die Musteraufgaben Mathematik für die Jahrgangstufe 10 beziehen sich auf die Inhalte, die im Rahmenplan des Faches Mathematik als Anforderungen am Ende der Klasse 10 für das Gymnasium aufgeführt sind:

- Arithmetik
- Stochastik
- Geometrie

Die Musteraufgaben dienen von den Anforderungen und der Aufgabenstellung her als Beispiele bei der Arbeit an regionalen Parallelarbeiten. Für die Aufgaben sind die Lösungen sowie ein Bewertungsraster angegeben. Bei den Lösungen soll der Lösungsweg nachvollziehbar sein, unterschiedliche Lösungsstrategien sind bei einigen Aufgaben möglich und entsprechend bei der Bewertung zu berücksichtigen.

Mehrere der vorgelegten Musteraufgaben beschränken sich nicht auf einen inhaltlichen Bereich, sie beziehen sich auf mehrere Themenbereiche.

Hinweise für die regionalen Parallelarbeiten:

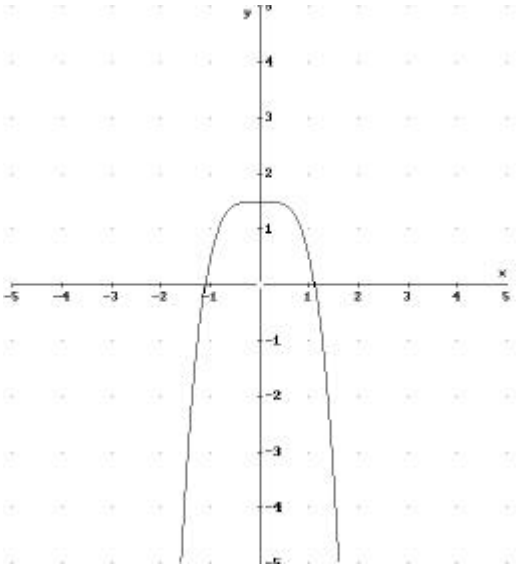
- die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten
- die einzelnen Aufgaben sind in Teilaufgaben gegliedert, in der Regel umfasst die Parallelarbeit drei Aufgaben
- zwei der drei oben benannten Themenbereiche müssen durch entsprechende Aufgaben berücksichtigt werden.

Themenbereich	**Potenzfunktionen**

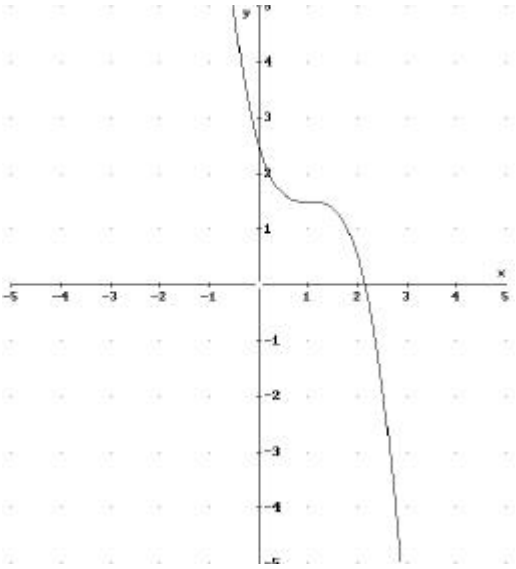
Gegeben sind drei Funktionsgrafen und die Funktionen f_1, f_2 und f_3 .

$f_1(x) = (x+2)^{-2} - 3 \quad f_2(x) = -(x-1)^3 + 1{,}5 \quad f_3(x) = -x^4 + 1{,}5$

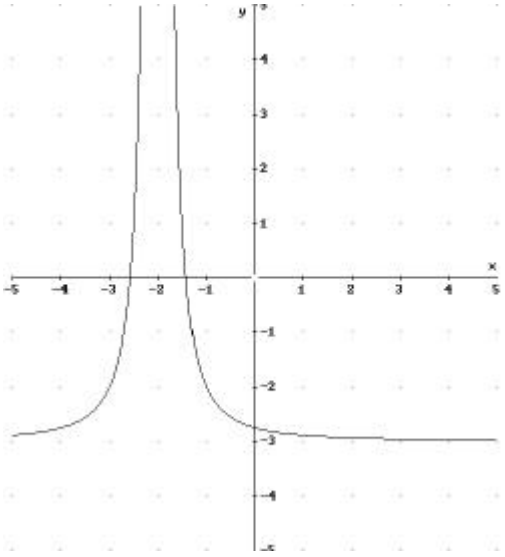
Graf 1



Graf 2



Graf 3



a) Ordne die Zuordnungsvorschriften den abgebildeten Grafen mit Begründung zu.

b) Berechne die Nullstellen der Funktion f_1.

c) Mache eine begründete Aussage zur Anzahl der Lösungen der Gleichung $f_3(x) = a$, wobei a eine beliebige reelle Zahl sein kann.
Die Begründung kann grafisch oder rechnerisch erfolgen.

d) Welche der drei Funktionen besitzt eine Umkehrfunktion auf IR?

e) Für die Funktion, die zum Grafen 3 gehört, hat Hans die Nullstellen x = –5 und x = 4 berechnet. Was sagst du dazu?

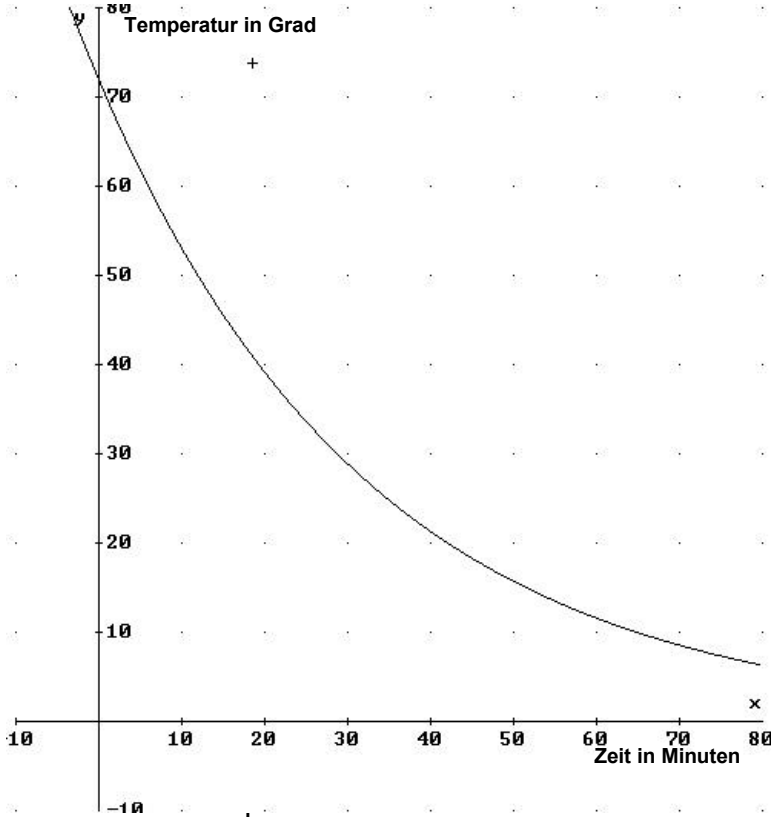
Hilfsmittel: Taschenrechner, auch grafischer oder CAS-Rechner
Zeit: 30 Min, bei grafischem/CAS-Rechner 20 Min

	Erwartete Lösungswege und Ergebnisse	
a)	Es sind verschiedene Begründungen denkbar: Punktprobe, auch mehrere, Symmetriebetrachtungen, verweise auf bekannte Formen, Verlauf für große/kleine Werte,... Pro Zuordnung 2 Punkte	6
b)	Die Gleichung $f_1(x) = 0$ muss gelöst werden: $(x+2)^{-2} - 3 = 0$ ergibt als Lösung $x = -\sqrt{\frac{1}{3}} - 2 \approx -2{,}58$ oder $x = \sqrt{\frac{1}{3}} - 2 \approx -1{,}42$	5
c)	Grafische Argumentation: Aus dem Bild kann man ablesen, dass die Gleichung keine, eine oder zwei Lösungen hat, je nachdem a größer, gleich oder kleiner als das Maximum 1,5 ist. Rechnerische Argumentation: $-x^4 + 1{,}5 = a$ führt auf $x = \sqrt[4]{1{,}5 - a}$ oder $x = -\sqrt[4]{1{,}5 - a}$. Die Wurzel existiert, wenn $1{,}5 - a \geq 0$, also $a <= 1{,}5$	4
d)	Nur f_2 besitzt eine Umkehrfunktion Mögliche Begründung: streng monoton steigend oder Eindeutigkeit der Lösung von $f_2(x) = a$ oder jede Parallele zur x-Achse schneidet den Graf genau ein Mal	2
e)	Die Nullstellen einer Funktion sind im Grafen die Schnittpunkte mit der x-Achse. Im Bild zum Grafen 1 kann man als Nullstellen etwa x = -1,2 und x = 1,2 ablesen. Das liegt deutlich neben den von Hans berechneten Lösungen, die daher falsch sein müssen.	3
	Summe	20

Bemerkungen: Die Aufgaben sind zum Teil offen formuliert und lassen einen grafischen und rechnerischen Zugang zu.
Der Aufgabenteil a) ist bei Verwendung eines grafischen Taschenrechners sehr einfach und geringer zu bewerten.
Ebenso ist Teil b) bei Verwendung eines Taschenrechners, der quadratische Gleichungen lösen kann, geringer zu bewerten.
Die Formulierung in Teil c) ist ggfs. an eine im Unterricht verwendeten Formulierung anzupassen.

Themenbereich	**Exponentialfunktionen**

Bei 0°C wird in einem Skilager heißer Kaffee ausgeteilt, der in den Bechern abkühlt.
In der Abbildung ist die exponentielle Abkühlungskurve des Kaffees dargestellt.



rd

a) Bestimme aus der Zeichnung, welche Temperatur der Kaffee nach 20 min hat und wie lange man warten muss, wenn man den Kaffee mit 60° C trinken möchte.

b) Bestimme die zur Grafik gehörende Funktionsgleichung und überprüfe rechnerisch die in a) abgelesenen Werte.

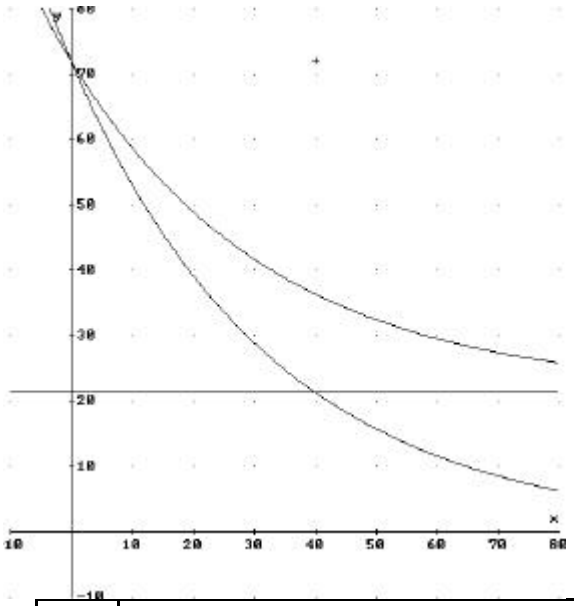
II. In der Skihütte herrscht vor dem warmen Kamin die Umgebungstemperatur von 21,4° C. Auch dort wird Kaffee ausgeschenkt und Andi misst die folgenden Temperaturen:

Zeit in min	0	5	10	15	20	30	80
Temperaturen in °C	72	64,9	58,7	53,4	48,9	41,7	?

a) Zeichne zur Wertetabelle den Grafen in das obige Koordinatensystem und beschreibe, was sich am Abkühlungsprozess im Vergleich zu I) ändert. Gib für 80 min einen Schätzwert für die Temperatur an.

b) Erläutere, dass die Funktionsgleichung für die Abkühlung des Kaffees hier die Form $y=a\cdot b^x+c$ hat und bestimme die zugehörigen Werte a, b, und c.

	Erwartete Lösungswege	



I. a)	Bei 20 min liest man ca. 38 °C (eben unter 40°C) ab. 60°C hat der Kaffee nach etwa 6 min (gut 5 min)	2
b)	Die Form der Funktionsgleichung ist $y=a\cdot b^x$, wobei y die Temperatur in °C und x die Zeit in min bedeutet. Zum Zeitpunkt x=0 ergibt sich die Anfangstemperatur a, also a? 72 [°C] Um b zu berechnen setzt man z. B. den abgelesenen Wert nach 20 min ein: $38 = 72\cdot b^{20} \Rightarrow b = \sqrt[20]{\frac{38}{72}} \approx 0{,}97$, d. h. $y = 72\cdot 0{,}97^x$ (Da mit abgelesenen Werten gerechnet wird, kann das Ergebnis innerhalb der Ablesegenauigkeit verschieden sein.) Überprüfung für 20 min mit 0,97: $72\cdot 0{,}97^{20} \approx 39$°C und $72\cdot 0{,}97^{6} \approx 60$°C, die Werte liegen innerhalb der Ablesegenauigkeit.	6 2
II. a)	Nach 80 min kann man annehmen, dass der Kaffee weitgehendst abgekühlt ist, an dieser Stelle muss die SchülerIn erkennen, dass er nicht kälter werden kann, als seine Umgebung. Der grafischen Darstellung entnimmt man, dass der Kaffee zwar noch exponentiell, aber im Vergleich zu I. langsamer abkühlt und die Werte nicht unter 21,4 °C sinken.	4
b)	Der Graf ist eine nach oben verschobene Exponentialfunktion, so dass c=21,4 [°C]. Der Anfangswert zum Zeitpunkt 0 ist weiterhin y_o=72 °C, also ergibt sich a=72-21,4=50,6 [°C] Wählt man einen der Tabellenwerte für x, z.B. x=10, so erhält man $50{,}6\cdot b^{10} + 21{,}4 = 58{,}7 \Rightarrow b = \sqrt[10]{\frac{37{,}3}{50{,}6}} \approx 0{,}97$	6
	gesamt	20

Bemerkungen:
Teil I. bezieht sich auf die Grundkenntnisse zu Exponentialfunktionen, die allen Schülerinnen und Schülern einer 10. Klasse bekannt sein sollten.

In Teil II wird eine grafische Umsetzung der Tabellenwerte und eine verbale Beschreibung der Grafik verlangt. Die Erkenntnis, dass der Kaffee nicht unter die Umgebungstemperatur abkühlen kann, sollte der Alltagserfahrung der Schülerinnen und Schülern entsprechen. II.b) setzt voraus, dass die Schülerinnen und Schülern sich allgemein mit Funktionsverschiebungen auskennen oder eine ähnliche Abklingfunktion bereits im Unterricht kennen gelernt haben.

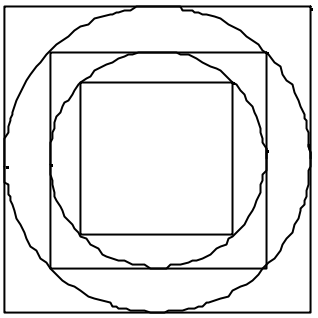
Hilfsmittel: Taschenrechner, werden Grafikrechner verwandt, so kann Teil I. auch mithilfe der exponentiellen Regression ermittelt werden.

Zeit: ca. 30 Minuten

Quelle: angelehnt an
Fachbezogene Leistungsprüfungen für das Gymnasium, Schuljahrgang 10, Mathematik, Niedersächsisches Kultusministerium, Februar 2000

Themenbereich	**Körperberechnung / Funktionen**

Einem Quadrat ist ein Kreis einbeschrieben und ein Kreis umbeschrieben (Inkreis und Umkreis).



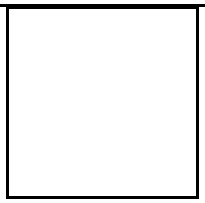
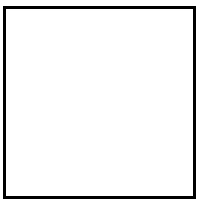
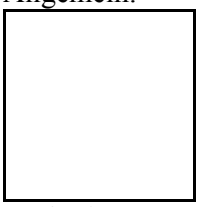
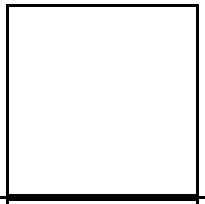
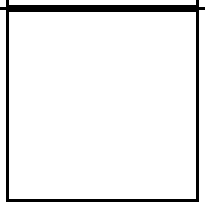
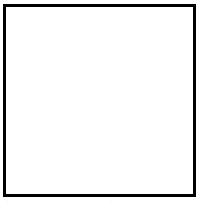
1. a) Berechne die Radien, Flächeninhalte und Umfänge beider Kreise für ein Quadrat mit der Seitenlänge 5 cm.

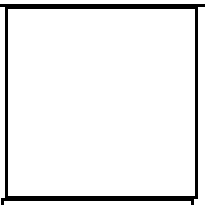
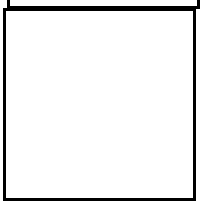
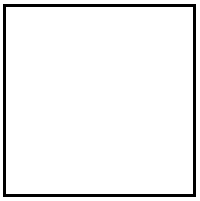
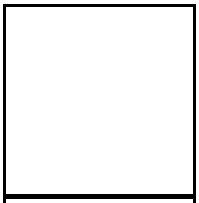
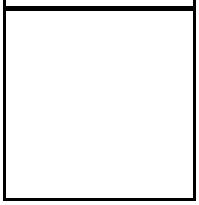
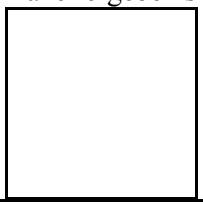
   b) Führe die Berechnungen auch für ein Quadrat mit der „beliebigen“ Seitenlänge k durch.

2. Was kannst Du über die Verhältnisse der Radien, Flächeninhalte und Umfänge von In- und Umkreis aussagen?

3. Der Inkreis umschließt wiederum ein kleineres Quadrat, ebenso wird der Umkreis wiederum von einem größeren Quadrat umschlossen. Bestimme die Seitenlängen dieser beiden Quadrate in Abhängigkeit von k.

4. Und wie geht es weiter?

	Erwartete Lösungswege	Bewertung
1a)		2
		2
1b)	Allgemein:  Umkreis: 	3 4
2.	 Die "allgemeinen" Formeln zeigen, dass die Verhältnisse von der Seitenlänge des Ausgangsquadrates abhängig sind. Alternative: Die "allgemeinen" Formeln zeigen, das der Umkreis aus dem Kreis durch eine zentrische Streckung mit dem Streckungsfaktor  hervorgeht. Das muss dann auch das Verhältnis der (Längen der) Radien und Umfänge sein. Das Verhältnis der Flächeninhalte ergibt sich durch Quadrieren des Streckungsfaktors.	3 1

3.	Inneres Quadrat:  Äußeres Quadrat:  Alternative: In- und Umkreis des Ursprungsquadrates gingen durch den Streckungsfaktor  auseinander hervor. Dann muss auch die Seitenlänge des äußeren Quadrates durch diesen Streckungsfaktor aus der des Ursprungsquadrates hervorgehen. Zum inneren Quadrat gehört entsprechend der Kehrwert des Streckungsfaktors.	2 1
4.	Beim "Verkleinern nach innen" kommt jeweils pro Schritt ein Faktor  hinzu; beim "Vergrößern nach außen" jeweils ein Faktor  . Daher ergeben sich für die Quadrate die "Kantenformeln" 	2 1
	gesamt	21

Bemerkungen:

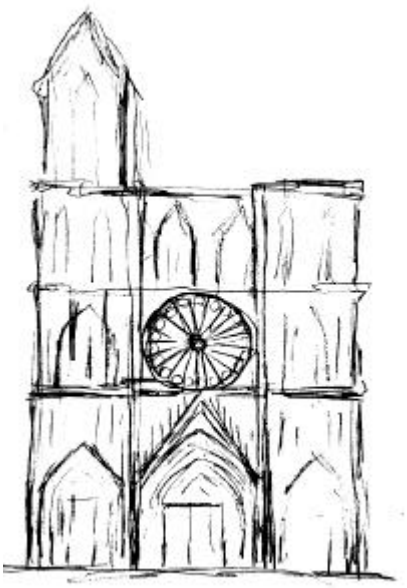
Aufgabenteil 1 bezieht sich auf die Grundkenntnisse zur Kreislehre. Beim Umkreis muss auf die Pythagorasbeziehung zurückgegriffen werden. Die Fragestellung in Teil b) ist in dem Sinne ungewöhnlich, das hier nicht Kreisgrößen berechnet, sondern Größen verschiedener Kreis in Beziehung gesetzt werden müssen. In der Unabhängigkeit von der Seitenlänge des Ausgangsquadrates dokumentiert sich bereits die "verborgene" Streckungsfigur. Dieses

Streckungsfigur wird durch die "inverse" Problemstellung von Aufgabenteil 3 weiter aufgebaut. Nach diesen Vorbereitungen sollen die Schülerinnen und Schüler das Verfahren in Aufgabenteil 4 iterativ fortsetzen, um so ihre Fähigkeit zur Lösung von Problemen auf der Grundlage tieferen Verstehens nachzuweisen.

Quelle

Fachbezogene Leistungsprüfungen für das Gymnasium, Schuljahrgang 10, Mathematik, Niedersächsisches Kultusministerium, Februar 2000

Themenbereich	**Körperberechnung / Funktionen**

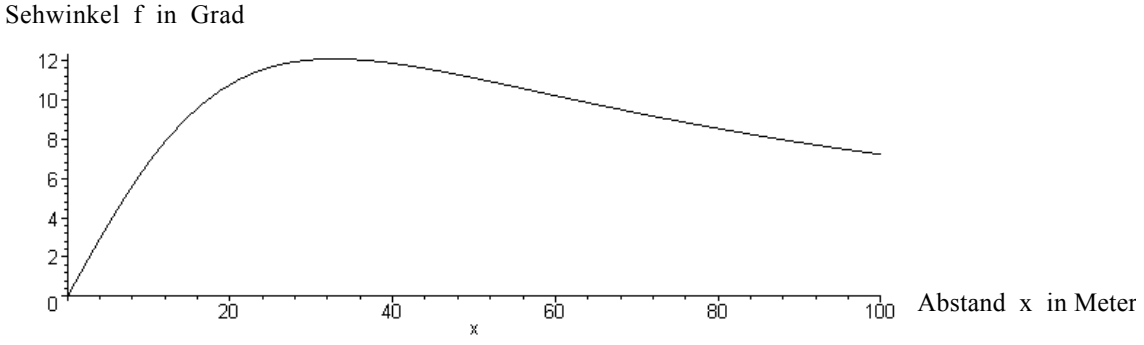


Über dem Hauptportal des Straßburger Münsters befindet sich eine gotische Fensterrosette mit dem Durchmesser von 14 m. Ihr unterer Rand ist 28 m über dem Boden.

1. Die Touristin Jana steht 60 m von dem Hauptportal entfernt und hält ihre Kamera in Augenhöhe von 1,50 m. Der "Sehwinkel" ist der Winkel zwischen oberem Rosettenrand, Auge des Beobachters und unterem Rosettenrand. Berechne den Sehwinkel, unter dem Jana die Fensterrosette sieht.

2. Jana will die Rosette mit ihrer Digitalkamera fotografieren.
Sie läuft vor und zurück und stellt fest, dass sich dabei die Größe der Rosette auf dem Display verändert.
Der Grund dafür ist die Abhängigkeit des Sehwinkels von der Entfernung zum Münster.

Die folgende Graphik gibt den Sachverhalt wieder:

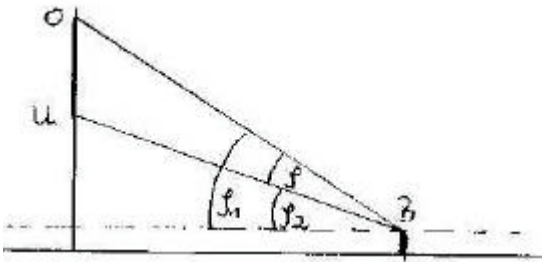
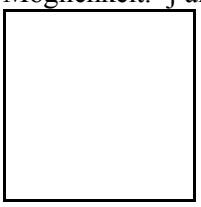
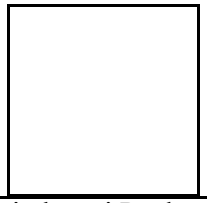


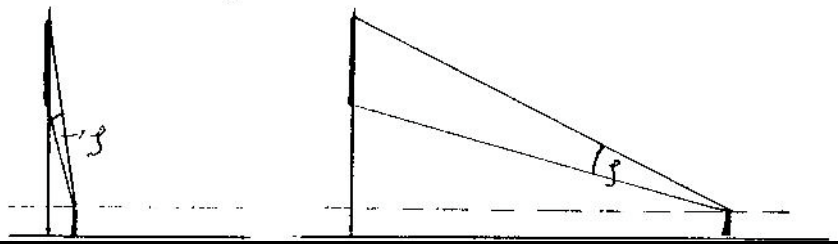
a) In welcher Entfernung vom Münster ist der Sehwinkel am größten?

b) Gib zwei Entfernungen vom Münster an, für die der Sehwinkel gleich groß ist.

c) Beschreibe, wie sich der Sehwinkel verändert, wenn sich Jana vom Münster weg bewegt.

d) Warum wird der Sehwinkel nicht immer größer, je mehr sich Jana dem Münster nähert? Erkläre den Sachverhalt, eventuell an Hand von Skizzen.

	Erwartete Lösungswege	Bewertung
1.	Skizze:  1. Möglichkeit: j als Differenz  2. Möglichkeit: mit Cosinussatz $\lvert BU\rvert = \sqrt{60^2 + 26{,}5^2} \approx 65{,}59 \quad und \quad \lvert BO\rvert = \sqrt{60^2 + 40{,}5^2} \approx 72{,}39$ $\cos j \approx \frac{9346{,}5}{9496{,}12} \qquad \Rightarrow \qquad Sehwinkel: \quad j \approx 10{,}19^0$	4 6
2a)	Der maximale Sehwinkel von 12,06° ist bei etwa 32,76 m erreicht. Es kommt aber nicht auf einige Meter an, da das Maximum in der Graphik nicht so deutlich ausgeprägt ist. Die Koordinaten des Hochpunktes werden z.B. unter Verwendung eines Geodreiecks ermittelt. Hinweis: Die Sehwinkel-Entfernungsfunktion lautet 	2
2b)	Gesucht sind zwei Punkte auf dem Graph mit gleicher j-Koordinate. Unter Verwendung eines Geodreiecks findet man z.B. : In ca. 17 m und in ca. 61 m Entfernung vom Münster ist der Sehwinkel gleich groß und beträgt jeweils 10° .	3
2c)	Der Sehwinkel direkt am Münster ist 0° groß. Bis zu einer Entfernung von ca. 32 m wächst der Sehwinkel, danach nimmt er wieder ab. Für sehr große Entfernungen wird der Sehwinkel sehr klein, sein Wert läuft vermutlich gegen 0°.	2

2d)	Man kann z.B. mit einer Sequenz von Skizzen arbeiten. Die Skizzen entsprechen der aus Aufgabenteil 1. 	3
	gesamt	20

Bemerkungen:

Es sollte selbstverständlich sein, dass zum Lösungsweg von Aufgabenteil 1 eine Skizze gehört. Daher wird in der Aufgabenstellung auf die Anweisung, eine Skizze anzufertigen, verzichtet. Dieser Teil bezieht sich auf Grundkenntnisse der Trigonometrie und enthält nur die Schwierigkeit, das beschriebene räumliche Problem in der Ebene geeignet darzustellen.
Aufgabenteil 2 verbindet Fragestellungen aus der Trigonometrie und der Funktionenlehre, insbesondere der Auswertung und Interpretation eines vorgegebenen Graphen. Rechnungen spielen keine Rolle. Die Bearbeitung verlangt eine Übertragung des geometrischen Sachverhalts in einen funktionalen Zusammenhang und umgekehrt. Die gewählte Skalierung der Koordinatenachsen macht das Ablesen der Werte durchaus anspruchsvoll.

Redaktionelle Anmerkungen
Quelle:
Fachbezogene Leistungsprüfungen für das Gymnasium, Schuljahrgang 10, Mathematik, Niedersächsisches Kultusministerium, Februar 2000

Der Aufgabenteil 2 ist stark abgeändert worden, da Umkehrfunktionen (insbesondere die Arcusfunktionen) im Bremer Lehrplan nicht vorgesehen sind. Anstelle der in Niedersachsen durchgeführten Rechnungen wird hier eine Aufgabe konzipiert, die auf Auswertung und Interpretation eines vorgegebenen Graphen abgestellt ist. Eine besondere Schwierigkeit besteht in der Zusammenführung von Trigonometrie und Analysis in Verbindung mit einem räumlichen Vorstellungsvermögen.

Themenbereich	**Wahrscheinlichkeitsrechnung**

In der letzten Klassenarbeit der 10a gab es folgendes Zensurenergebnis:

Zensur	1	2	3	4	5	6
Anzahl der Arbeiten	2	8	11	6	3	---

a) Wie viel Prozent der Schüler hatten jeweils die Noten 1, 2, 3,..., 6?
b) Aus der Klasse wird zufällig ein Schüler ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass seine Arbeit besser als 3 ist?
c) Aus der Klasse werden zufällig zwei Schüler ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide eine 4 haben?
d) Berechne für die Arbeit den Mittelwert und die Standardabweichung.
e) In der Klasse 10b war kurz darauf das Ergebnis der entsprechenden Arbeit:

Zensur	1	2	3	4	5	6
Anzahl der Arbeiten	3	9	10	5	3	2

Berechne für die 10b den Mittelwert.
Gib (ohne zu rechnen) an, wie sich für die 10b die Standardabweichung im Vergleich zur 10a verhält und erläutere den Unterschied.

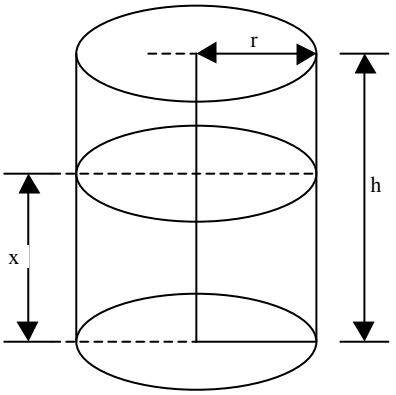
Hilfsmittel: Taschenrechner
Zeit: 20 Min

	Erwartete Lösungswege und Ergebnisse	
a)	1: 6,7% 2: 26,7% 3: 36,7% 4: 20% 5: 10%	3
b)	P(besser als 3) = P(Note 1) + P(Note 2) = 33,3%	2
c)	Ziehen ohne Zurücklegen. Erster Schüler: 6 aus 30, zweiter Schüler 5 aus 29 Also P(beide eine 4) = $\frac{6}{30} \cdot \frac{5}{29} = \frac{1}{29} \approx 3{,}4\%$	4
d)	Mittelwert ? = (1·2 + 2·8 + 3·11 + 4·6 + 5·3)/30 = 3,0 Standardabweichung ? ? = (2^2·2 + 1^2·8 + 0·11 + 1^2·6 + 2^2·3)/30 ˜ 1,13 ? ˜ 1,06	1 3
e)	Mittelwert ? = (1·3 + 2·9 + 3·10 + 4·5 + 5·3 + 6·2)/32 ˜ 3,1 Die Standartabweichung muss größer ausfallen als bei der 10a, denn es tauchen mehr Werte auf, die weiter vom Mittelwert entfernt sind.	1 2
	Summe	16

Bemerkungen: In c ist wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler das Ziehen ohne Zurücklegen erkennen und in der Rechnung berücksichtigen.

Themenbereich	**Körperberechnung / Funktionen / 3.Wurzel**

1. Das Innere eines zylindrischen Bierglases hat den Radius 5 cm und die Höhe 10 cm.



a) In das Glas wird Wasser gegossen.
- Gib die Funktionsgleichung an für die Funktion, die die Flüssigkeitshöhe dem Volumen des Zylinders zuordnet.
- Um welche Art von Funktion handelt es sich? Wie sieht ihr Graph im Prinzip aus?

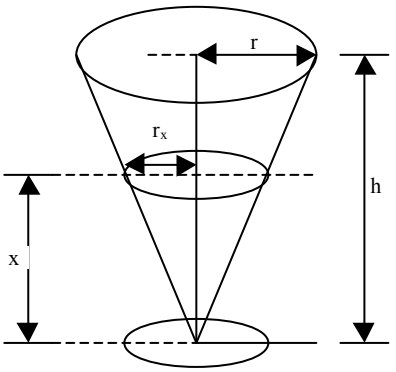
b) In welcher Höhe müsste die Füllmarke für 0,5 Liter angebracht werden?

2. Ein kegelförmiges Gefäß, dessen Spitze nach unten zeigt, hat ebenfalls den Radius 5 cm und die Höhe 10 cm.

a) Zeige, dass der Zusammenhang zwischen Flüssigkeitshöhe x und Flüssigkeitsvolumen V durch die Funktionsgleichung

$$V(x) = \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot x^3$$

beschrieben wird.



b) In welcher Höhe müsste die Füllmarke für 0,25 Liter eingezeichnet werden?

c) In welcher Höhe müsste die Füllmarke für die Hälfte des Gesamtvolumens angebracht werden?

d) In welcher Entfernung von der Spitze aus gemessen muss die Markierung für 0,25 Liter außen auf der Mantellinie angebracht werden?

	Erwartete Lösungswege	
1. a)	$f: x \rightarrow V(x) = \pi \cdot r^2 \cdot x$ Lineare Funktion / Graph ist eine Gerade.	3
b)	$500 = \pi \cdot 5^2 \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{500}{\pi \cdot 25} \quad \Leftrightarrow \quad h = 6{,}37$ 0,5 Liter füllen das Gefäß bis zur Höhe 6,4 cm.	3
2. a)	Es muss gezeigt werden, dass $r_x = \frac{h_x}{2}$	1
	$V(x) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_x^2 \cdot x = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot x = \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot x^3$	2
b)	$250 = \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot x^3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 250}{\pi}} = 9{,}85$	2
c)	$V_{ges} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 10 = 261{,}8 \quad \Rightarrow \frac{V_{ges}}{2} = 130{,}9$ $130{,}9 = \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot x^3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{130{,}9 \cdot 12}{\pi}} = 7{,}93$	3
	gesamt	14

Bemerkungen: Es ist sinnvoll die beiden Aufgaben im Zusammenhang bearbeiten zu lassen, wenn der Schwerpunkt auf den funktionalen Zusammenhang gelegt wird. Sie sind aber auch unabhängig voneinander einsetzbar. Es wird vorausgesetzt, dass die Umwandlung der Volumengrößen sicher beherrscht wird.

Hilfsmittel: Taschenrechner

Zeit: ca. 30 Minuten

Quelle: angelehnt an
Aufgabenbeispiel aus Vergleichsarbeit Hamburg

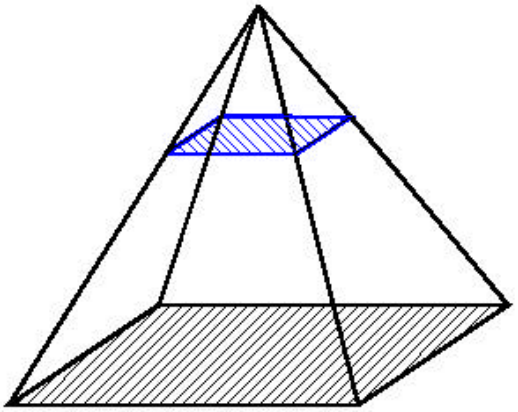
Alternativen / Erweiterungen

- *Zeichnung in der Aufgabenstellung weglassen*
- *Bestimmung der Funktionsgleichung der Funktion , die die Länge der Mantellinie dem Volumen zuordnet.*
- *Graphische Darstellung der auftretenden Funktionen.*

Themenbereich	**Körperberechnung**

Aufgabenbeispiel x

Die Eingangshalle eines Vergnügungsparks soll in Form einer gläsernen Pyramide gebaut werden. Die geplante Maße sind: quadratische Grundfläche mit der Seitenlänge 30 m, Raumhöhe 45 m.



1. Wie groß ist das Volumen (umbauter Raum)?

2. Um Baukosten zu sparen soll der umbaute Raum um 10% verringert werden.
   Der Architekt macht dazu verschiedene Vorschläge:

   a) Man behält die ursprüngliche Grundfläche bei und verringert die Höhe.
   Wie groß ist diese neue Höhe?

   b) Man behält die ursprüngliche Höhe bei und verringert die Länge der Grundseiten. Wie lang ist die neue Grundseite?

   c) Man schneidet die Spitze ab und errichtet stattdessen eine Aussichtsplattform.
   Wie groß wird diese Plattform?

Erweiterungen (oder Alternativen)

3.

a) Wie groß ist die zu verglasende Fläche der ursprünglichen Pyramide (wenn die Rahmen nicht berücksichtigt werden)?
b) Wieviel Glas spart man im Fall a) ein? Wieviel Prozent sind das?
c) Wieviel Glas spart man im Fall c) ein? Wieviel Prozent sind das?

	Erwartete Lösungswege	
I. a)	a) Das gep lante Gesamtvolumen beträgt $V_{ges} = \frac{1}{3} \cdot 30^2 \cdot 45 = 1350\ 0$ Das gep lante Gesamtvolumen beträgt 1350 0 m^3. Das um 10% verringerte Volumen ist $V_{90\%} = 0,9 \cdot V_{ges} = 12150$ $V_{90\%} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_{90\%} \Leftrightarrow h_{90\%} = \frac{3 \cdot 12150}{30^2} = 40,5$ Die Höhe der Pyramide mit um 90% verringerten Volumen beträt 40 ,5 m. Alternative: Bei fester Grundfläche ist V proportional zu h. Folglich gehört zum 0 ,9-fachen des Volumens auch das 0 ,9-fache der Höhe: Das ist $h_{90\%} = 0,9 \cdot 45 = 40,5$	3 2
b)	$V_{90\%} = 12150 = \frac{1}{3} \cdot a_{90\%}^2 \cdot 45 \Leftrightarrow a_{90\%} = \sqrt{\frac{3 \cdot 12150}{45}} = 28,46$ Die Seitenlänge der volumengleichen Pyramide, deren Höhe um 90% verringert wurde, beträgt 28,6m. Alternative: Bei fester Höhe ist V proportional zu a2. Folglich gehört zum 0,9-fachen des Volumens das v 0,9 -fache der Grundseite: Das sind: $30 \cdot \sqrt{0,9} = 28,46$	2
c)	Die Fläche der Aussichtsplattform ist ebenfalls quadratisch. Ihre Größe kann als Seitenlänge eines Quadrates oder als Flächeninhalt angegeben werden. Nach dem Strahlensatz lässt sich etwa die folgende Verhältnisgleichung angeben: $\frac{a}{a_{spitze}} = \frac{h}{h_{spitze}}$ Außerdem ist: $V_{spitze} = 0,1 \cdot V_{ges} = 1350 \Rightarrow 1350 = \frac{1}{3} \cdot a_{spitze}^2 \cdot h_{spitze}$ Dieses Gleichungssystem kann nach dem Einsetzungsverfahren gelöst werden. $a_{spitze} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V_{spitze} \cdot a}{h}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1350 \cdot 30}{45}} = 13,92$	3 3
	Gesamt	13

Bemerkungen:

Diese Aufgabe kann als eine längere neben kürzeren „Standardaufgaben“ eingesetzt werden.
Die Teile a und b sollten von allen Schülern gelöst werden können. Teil c ist eine anspruchsvolle Anwendung von 2 Gleichungen mit zwei Variablen, ein Unterrichtsinhalt, der ein Jahr zurückliegt und dort in der Regel auf lineare Gleichungen beschränkt ist. Ein Problem ähnlicher Art sollte vorher im Unterricht behandelt sein.

Hilfsmittel: Taschenrechner
Zeit: ca. 30 Minuten

Quelle: angelehnt an
Fachbezogene Leistungsprüfungen für das Gymnasium, Schuljahrgang 10, Mathematik, Niedersächsisches Kultusministerium, Februar 2000