Pädagogisches
Landesinstitut
Brandenburg

# Aufgabenbeispiele und

# Korrektur- und Bewertungshinweise

# für zentrale schriftliche Abiturprüfungen

## Mathematik

Stand: 30.06.2003

**Impressum**

**Aufgabenbeispiele und Korrektur- und Bewertungshinweise für zentrale schriftliche Abiturprüfungen**
**Mathematik**
*(Juni 2003, Pädagogisches Landesinstitut Brandenburg, 14974 Ludwigsfelde-Struveshof)*
*(geänderte Fassung vom 13.10.2003, Landesinstitut für Schule und Medien Brandenburg, 14974 Ludwigsfelde-Struveshof, Korrekturen sind im Kapitel 2: Korrektur- und Bewertungshinweise erfolgt)*

**Herausgeber:**
Landesinstitut für Schule und Medien Brandenburg (LISUM Bbg)
(*bis 30.06.2003: Pädagogisches Landesinstitut Brandenburg (PLIB)*),
14974 Ludwigsfelde-Struveshof Tel.: 03378 209-105
E-Mail: poststelle@lisum.brandenburg.de

---

Dieses Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt.
Alle Rechte einschließlich Übersetzung sind dem Herausgeber vorbehalten. Die Vervielfältigung für schulische Zwecke ist gestattet.
Das Landesinstitut für Schule und Medien Brandenburg (LISUM Bbg) ist eine Einrichtung im Geschäftsbereich des Ministeriums für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg (MBJS).
Die Aufgabenbeispiele und Korrektur- und Bewertungshinweise für zentrale schriftliche Abiturprüfungen werden vom Landesinstitut für Schule und Medien Brandenburg im Auftrag des MBJS herausgegeben.

---

© Ludwigsfelde, Oktober 2003

*Die Aufgabenbeispiele und Korrektur- und Bewertungshinweise werden vom LISUM Bbg im Internet auf der LISUM-Homepage unter: www.lisum.brandenburg.de veröffentlicht. Sie werden nicht als Druckfassung herausgegeben. Schulen, die keinen Internetzugang haben, wenden sich bitte an das LISUM Bbg, Tel. 03378 209-173. Sie erhalten eine CD-ROM oder bei Bedarf eine Kopierfassung.*

# Inhalt


**0 Funktion des Materials 4**

**1 Aufgabenbeispiele für das schriftliche Zentralabitur 5**

1.1 Allgemeine Hinweise 5

1.2 Aufgabenbeispiele für den Grundkurs 6

1.3 Aufgabenbeispiele für den Leistungskurs 27

**2 Korrektur- und Bewertungshinweise 56**

**3 Anlage: Beispiele für anwendungsorientierte Aufgaben 59**

3.1 Leistungskurs 59

3.2 Grundkurs 67

# 0 Funktion des Materials

Die Aufgabenbeispiele und Korrektur- und Bewertungshinweise für zentrale schriftliche Abiturprüfungen ergänzen die verbindlichen curricularen Vorgaben für den Unterricht in der Qualifikationsphase der gymnasialen Oberstufe.

Die hier enthaltenen Aufgabenbeispiele beziehen sich auf Inhalte, die in den verbindlichen curricularen Vorgaben festgelegt sind. Sie entsprechen in den Aufgabenformaten den Vorgaben der gegenwärtig für das Fach gültigen Einheitlichen Prüfungsanforderungen (EPA). Neben der Aufgabenstellung und dem ggf. dazugehörigen Material enthalten sie einen Erwartungshorizont und Hinweise zur Gewichtung der Aufgaben bei der Gesamtbewertung.

Die Aufgabenbeispiele verdeutlichen die Struktur und das Anspruchsniveau der zentralen Abituraufgaben und geben so auch eine Orientierung für die unterrichtliche Arbeit in der Qualifikationsphase. Vergleichbare Aufgabenstellungen können ebenso an anderen Inhalten bearbeitet werden.

Die Korrektur- und Bewertungshinweise enthalten detaillierte Angaben für die Beurteilung von Teilleistungen und die Ermittlung der Gesamtnote. Sie orientieren sich an den Vorgaben der EPA, der GOSTV und der VV-GOSTV. Ausführungen zu einer guten und/oder einer ausreichenden Leistung sind fachbezogen unterschiedlich zugeordnet.

# 1 Aufgabenbeispiele für das schriftliche Zentralabitur

## 1.1 Allgemeine Hinweise

Die nachfolgenden Beispiele sollen die in den verbindlichen curricularen Vorgaben für das Zentralabitur für das Fach Mathematik dargestellten Aussagen zu Anforderungen an die zentrale Abiturprüfung illustrieren und damit Hilfestellung für den Unterricht und die Vorbereitung auf die Abiturprüfung geben. Es wird jeweils ein vollständiges Beispiel für ein Grundkurs- und ein Leistungskursabitur dargestellt, das nach dem Konstruktionsprinzip für die Abiturprüfung entwickelt wurde. Um die Entwicklungsrichtung hinsichtlich eines ausgewogenen Verhältnisses von formalen und anwendungsbezogenen Prüfungsanforderungen aus den EPA in der Fassung vom 24.05.2002 zu berücksichtigen, werden weitere Aufgabenbeispiele in einer Anlage beschrieben.

Die Grundkurs- und Leistungskurs-Prüfungsaufgaben unterscheiden sich im Grad der Vorstrukturierung, dem Schwierigkeitsgrad, dem Komplexitätsgrad, den Anforderungen an die Selbstständigkeit bei der Bearbeitung der Aufgaben sowie im Umfang und der Art der bereitgestellten Informationen.

Die Aufgabenbeispiele basieren auf den EPA hinsichtlich der Gestaltung der Prüfungsaufgaben. Dabei ist zu berücksichtigen, dass weder die Anforderungsbereiche scharf gegeneinander abzugrenzen sind noch die zur Lösung der Prüfungsaufgabe erforderlichen Teilleistungen sich in jedem Fall eindeutig einem bestimmten Anforderungsbereich zuordnen lassen. In jedem Fall ist die Zuordnung zu den Anforderungsbereichen abhängig vom vorangegangenen Unterricht, von den im Rahmenplan und den verbindlichen curricularen Vorgaben vorgeschriebenen Zielen und Inhalten sowie von der Leistungsfähigkeit zugelassener Hilfsmittel. Dabei gibt es für die beiden letztgenannten Punkte zentrale Vorgaben. Der Punkt der Unterrichtsgestaltung bleibt in der Verantwortung der jeweiligen Lehrkraft.

Die Zuordnung der Anforderungsbereiche zu den Teilaufgaben wird jeweils in der Tabelle zum Bewertungsvorschlag dargestellt. Dabei sind die o. g. Positionen zu berücksichtigen.

Die beiden Prüfungsaufgaben und die jeweiligen Aufgaben (1.1 bis 3.3) sowie die ergänzenden Aufgaben in der Anlage wurden so konzipiert, dass das Schwergewicht der zu erbringenden Prüfungsleistungen im Anforderungsbereich II liegt und die Anforderungsbereiche I und III berücksichtigt sind, Anforderungsbereich I in deutlich höherem Maße als Anforderungsbereich III. Die Aufgaben sind so konstruiert, dass innerhalb einer Aufgabe die Anforderungen steigen.

Hinsichtlich der fachspezifischen Beschreibung der drei Anforderungsbereiche wird auf die EPA, Kapitel 2 in der jeweils geltenden Fassung verwiesen.

## 1.2 Aufgabenbeispiele für den Grundkurs

### 1.2.1 Aufgabe 1.1 (Analysis)

Die Funktion f ist gegeben durch die Gleichung $f(x) = 2x \cdot e^{-x}, \quad x \in R$.

1.1.1 Untersuchen Sie die Funktion f bzw. ihren Graphen auf Nullstellen, lokale Extrem- und Wendepunkte. Geben Sie ihr Verhalten für $x \to \pm\infty$ an.

Zeichnen Sie den Graphen von f mindestens im Intervall $-\frac{1}{2} \le x \le 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem (1LE = 2cm).

1.1.2 Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = -2e^{-x} \cdot (x+1)$ eine Stammfunktion von f ist und berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die vom Graphen von f, der x-Achse und der Geraden x = 4 vollständig begrenzt wird.

1.1.3 Die Punkte $O(0|0)$, $P(u|0)$ und $Q(u|f(u))$ mit $u \in R, u > 0$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks OPQ.

Bestimmen Sie u so, dass der Flächeninhalt dieses Dreiecks maximal wird.

1.1.4 Die Funktion f gehört zu einer Funktionenschar $f_t$, die durch die Gleichung $f_t(x) = tx \cdot e^{-x}, \quad x, t \in R, t \neq 0$ gegeben ist.

Berechnen Sie denjenigen Wert des Parameters t, für den die Wendetangente des Graphen von $f_t$ senkrecht zur Winkelhalbierenden des 1. Quadranten verläuft.

***Lösungsvorschlag***

1.1.1 Nullstellen: $0 = 2x \cdot e^{-x} \qquad \underline{\underline{x_N = 0}}$

Lokale Extrempunkte:

$$f'(x) = 2e^{-x} + 2x \cdot (-1)e^{-x} \qquad = 2e^{-x} \cdot (1-x)$$

$$0 = 2e^{-x} \cdot (1-x) \qquad x_E = 1$$

$$f''(x) = -2e^{-x} \cdot (1-x) + 2e^{-x} \cdot (-1) = 2e^{-x} \cdot (x-2)$$

$$f''(1) = -\tfrac{2}{e} < 0 \Rightarrow \text{lok. Maximum} \quad \Rightarrow \underline{\underline{H\left(1\middle|\tfrac{2}{e}\right)}}$$

Wendepunkte:

$$0 = 2e^{-x} \cdot (x-2) \qquad x_W = 2$$

$$f'''(x) = -2e^{-x} \cdot (x-2) + 2e^{-x} \cdot 1 = 2e^{-x} \cdot (3-x)$$

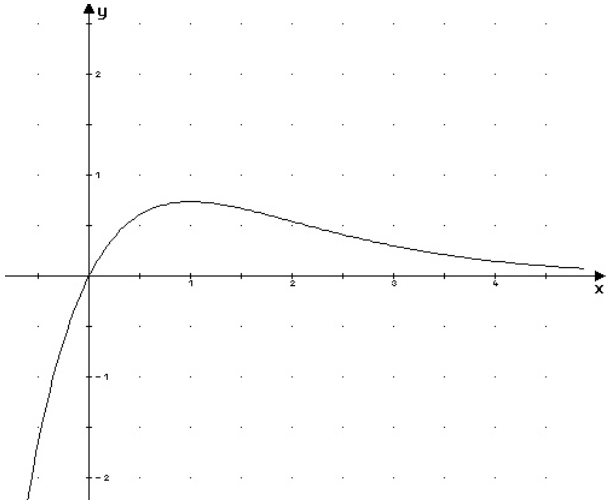
$$f'''(2) = \tfrac{2}{e^2} > 0 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{W\left(2\middle|\tfrac{4}{e^2}\right)}}$$

Verhalten für $x \to \pm\infty$:

$$x \to -\infty \;\Rightarrow\; f(x) \to -\infty$$

$$x \to \infty \;\Rightarrow\; f(x) \to 0$$

Graph:




1.1.2 Nachweis: Zeigen, dass $F'(x) = f(x)$ ist.

$$F'(x) = -2e^{-x} + (-2x-2)\cdot(-e^{-x}) = -2e^{-x} + 2x\cdot e^{-x} + 2e^{-x}$$
$$= 2x\cdot e^{-x}$$
$$= f(x)$$

Berechnung von A:

$$A = \int_0^4 f(x)\,dx$$
$$= F(4) - F(0) = -\tfrac{10}{e^4} - (-2)$$
$$= \underline{\underline{2 - \tfrac{10}{e^4} \approx 1{,}82 \text{ FE}}}$$

1.1.3 Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks OPQ maximieren.

Zielfunktion: $A(u) = \frac{1}{2}\cdot(u)\cdot(2u\cdot e^{-u}) = u^2\cdot e^{-u} \qquad (u \in R;\ u > 0)$

Maximum:

$$A'(u) = 2u\cdot e^{-u} + u^2\cdot(-e^{-u}) = \left(2u - u^2\right)\cdot e^{-u}$$
$$0 = \left(2u - u^2\right)\cdot e^{-u}$$
$$u_1 = 0 \text{ entfällt, da } u > 0$$
$$u_2 = u_E = 2$$
$$A''(u) = (2-2u)\cdot e^{-u} + (2u - u^2)\cdot(-e^{-u})$$
$$= \left(u^2 - 4u + 2\right)\cdot e^{-u}$$
$$A''(2) = -\tfrac{2}{e^2} < 0 \Rightarrow \text{lokales Maximum}$$
$$\text{wegen}: \left(u \to 0 \Rightarrow A(u) \to 0\right) \text{und} \left(u \to \infty \Rightarrow A(u) \to 0\right)$$
$$\Rightarrow \text{auch globales Maximum für } u = 2$$

1.1.4 t bestimmen: Gleichung $f_t'(x_W) = -1$ lösen

$$f_t'(x) = (t - tx)\cdot e^{-x}$$
$$f_t''(x) = (tx - 2t)\cdot e^{-x} \qquad \Rightarrow x_W = 2$$
$$f_t'(2) = -t\cdot e^{-2} = -1$$
$$\underline{\underline{t = e^2}}$$

***Bewertungsvorschlag***

| | **Geforderte Leistung** | **BE** | **AB** |
|---|---|---|---|
| 1.1.1 | Berechnen der Nullstelle | 1 | I |
| | Lokale Extrempunkte: Bilden der 1. Ableitung | 1 | I |
| | Berechnen der möglichen Extremstelle | 1 | I |
| | Nachweis der Existenz und der Art des Extremums | 1 | I |
| | Angabe des lokalen Hochpunktes | 1 | I |
| | Wendepunkte: Berechnen der möglichen Wendestelle | 1 | I |
| | Nachweis der Existenz des Wendepunktes | 1 | I |
| | Angabe des Wendepunktes | 1 | I |
| | Verhalten für $x \to \pm\infty$: Angabe des Verhaltens | 2 | II |
| | Graph: charakteristische Punkte, Einhaltung Intervall | 2 | I |
| 1.1.2 | Nachweis $F'(x) = f(x)$ | 2 | II |
| | Berechnen des Flächeninhalts | 2 | |
| 1.1.3 | Aufstellen der Gleichung für die Zielfunktion und Angabe des Definitionsbereiches | 2 | II |
| | Finden der Extremstelle | 1 | |
| | Nachweis des lokalen und des globalen Maximums | 2 | |
| 1.1.4 | Ansatz zur Berechnung von t: $f_t'(x_W) = -1$ | | |
| | Bestimmen der 1. und 2. Ableitung | | |
| | Berechnen der Wendestelle | | |
| | Berechnen von t | 4 | III |
| | **Summe:** | **25** | |

## 1.2.2 Aufgabe 1.2 (Analysis)

Die Funktion f ist gegeben durch die Gleichung $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{2x - 6}, \quad x \in R, x \neq 3$.

1.2.1 Untersuchen Sie die Funktion f bzw. ihren Graphen auf Symmetrie, Null- und Polstellen sowie auf lokale Extrempunkte. Ermitteln Sie ggf. das Verhalten an den Polstellen. Zeigen Sie, dass der Graph von f keine Wendepunkte besitzt. Zeichnen Sie den Graphen von f mindestens im Intervall $-4 \leq x \leq 8$ in ein kartesisches Koordinatensystem (1LE = 1cm).

1.2.2 Der Graph von u, $u(x) = x^2 - x - 2$ und die Gerade $y = 4$ begrenzen eine Fläche vollständig. Berechnen Sie den Flächeninhalt.

1.2.3 Der Graph von f und die x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig.

Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche.

1.2.4 Die Funktion f gehört zu einer Funktionenschar $f_t$, die durch die Gleichung

$f_t(x) = \dfrac{x^2 - tx - 2t}{2x - 6}$ $\quad x, t \in \mathbb{R}, x \neq 3$ gegeben ist.

Untersuchen Sie $f_t$ auf mögliche Extremstellen.

Auf den Nachweis der Extremstellen wird verzichtet.

***Lösungsvorschlag***

1.2.1 Symmetrie:

$$f(-x) = \frac{x^2 + x - 2}{-2x - 6} \begin{cases} \neq f(x) \\ \neq -f(x) \end{cases}$$ , keine Symmetrie vorhanden

Nullstellen: $0 = x^2 - x - 2$ $\quad \underline{\underline{x_{N_1} = -1}}$ $\quad \underline{\underline{x_{N_2} = 2}}$

Polstellen: $0 = 2x - 6$ $\quad \underline{\underline{x_P = 3}}$

Verhalten an den Polstellen: $\begin{matrix} x \to 3 \\ x < 3 \end{matrix}, f(x) \to -\infty$ $\quad \begin{matrix} x \to 3 \\ x > 3 \end{matrix}, f(x) \to \infty$

Lokale Extrempunkte:

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(2x-6) - (x^2 - x - 2) \cdot 2}{(2x-6)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 12x + 10}{(2x-6)^2} \qquad = \frac{x^2 - 6x + 5}{4(x-3)^2}$$

$0 = x^2 - 6x + 5$ $\quad x_{E_1} = 1$ $\quad x_{E_2} = 5$

$$f''(x) = \frac{(4x-12)(2x-6)^2 - (2x^2 - 12x + 10) \cdot 4 \cdot (2x-6)}{(2x-6)^4}$$

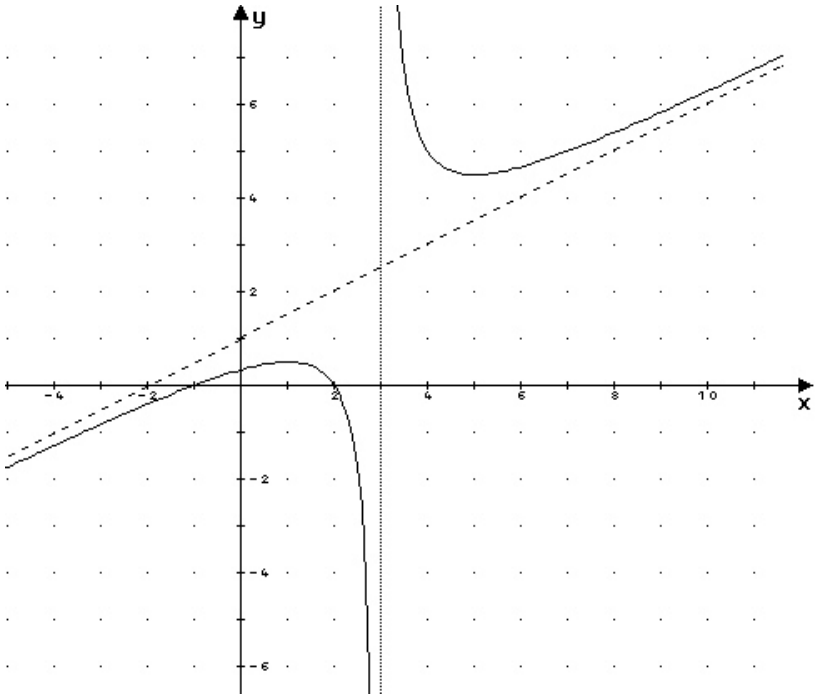
$$= \frac{32}{(2x-6)^3} \qquad = \frac{4}{(x-3)^3}$$

$f''(1) = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum $\quad \underline{\underline{H\left(1 \middle| \frac{1}{2}\right)}}$

$f''(5) = \frac{1}{2} > 0 \quad \Rightarrow$ lokales Minimum $\quad \underline{\underline{T\left(5 \middle| \frac{9}{2}\right)}}$

Wendepunkte: 0 = 4 Widerspruch, daher existieren keine Wendepunkte

Graph:




1.2.2 $x^2 - x - 2 = 4 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$

$$\int_{-2}^{3}\left(4 - x^2 + x + 2\right)dx$$

$$= \left[6x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{3}$$

$$= \frac{125}{6}$$

$$A = \frac{125}{6}\ \text{FE}$$

1.2.3 $\left(x^2 - x - 2\right):\left(2x - 6\right) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{4}{2x-6}$

$$\underline{-\left(x^2 - 3x\right)}$$

$$2x - 2$$

$$\underline{-\left(2x - 6\right)}$$

$$4$$

$$A = \int_{-1}^{2} \frac{x^2-x-2}{2x-6}\,dx = \int_{-1}^{2}\left(\frac{1}{2}x + 1 + \frac{2}{x-3}\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^2 + x + 2\cdot\ln\left|x-3\right|\right]_{-1}^{2}$$

$$= 1 + 2 + 2\cdot\ln 1 - \left(\frac{1}{4} - 1 + 2\cdot\ln 4\right)$$

$$A = \left(\frac{15}{4} - 2\ln 4\right)\text{FE}$$

$$\underline{\underline{A \approx 0{,}98\ \text{FE}}}$$

1.2.4

$$f_t'(x) = \frac{(2x-t)(2x-6)-(x^2-tx-2t)\cdot 2}{(2x-6)^2}$$

$$= \frac{2x^2-12x+10t}{(2x-6)^2} \qquad = \frac{x^2-6x+5t}{2(x-3)^2}$$

$$0 = x^2-6x+5t \qquad \underline{\underline{x_{E_{1;2}} = 3 \pm \sqrt{9-5t}}}$$

Fallunterscheidung: keine Extremstellen für $t \geq \frac{9}{5}$

zwei Extremstellen für $t < \frac{9}{5}$

***Bewertungsvorschlag***

| | **Geforderte Leistung** | **BE** | **AB** |
|---|---|---|---|
| 1.2.1. | Symmetrieuntersuchung | 1 | I |
| | Berechnen der Nullstellen | 2 | I |
| | Polstellen: Berechnen der Polstelle, Verhalten an der Polstelle | 2 | I |
| | Lokale Extrempunkte: Bilden der 1. Ableitung | 1 | II |
| | Berechnen der möglichen Extremstellen | 1 | I |
| | Nachweis der Existenz und der Art der Extrema | 2 | II |
| | Angabe des lokalen Hochpunktes und des lokalen Tiefpunktes | 1 | I |
| | Wendepunkte: Nachweis, dass kein Wendepunkt existiert | 1 | I |
| | Graph: charakteristische Punkte, Pol | 3 | I |
| 1.2.2. | Bestimmung der Schnittstellen | 1 | II |
| | Berechnung der Flächenmaßzahl | 2 | II |
| 1.2.3. | Umformen des Funktionsterms und Ermitteln der Gleichung einer Stammfunktion | 3 | III |
| | Berechnen des Flächeninhalts | 1 | III |
| 1.2.4. | Berechnen der möglichen Extremstellen | 2 | II |
| | vollständige Fallunterscheidung | 2 | II |
| | **Summe:** | **25** | |

### 1.2.3 Aufgabe 2.1 (Analytische Geometrie/Lineare Algebra)

Gegeben sind die Ortsvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}_k$ der Punkte A, B, C und $D_k$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{d}_k = \begin{pmatrix} -1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$, $k \in R$

2.1.1 Weisen Sie nach, dass die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig sind und stellen Sie den Vektor $\vec{d}_9$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

2.1.2 Begründen Sie, dass keines der Vierecke $ABCD_k$ eben ist.

2.1.3 Die Gerade g mit g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ durchstößt die Ebene $E_{ABC}$, die durch die Punkte A, B und C bestimmt wird, im Punkt F.

Ermitteln Sie die Koordinaten dieses Punktes und untersuchen Sie, ob F innerhalb des Dreiecks ABC liegt.

2.1.4 Berechnen Sie die Koordinaten eines Punktes H so, dass die Punkte A, B, C und H die Eckpunkte eines Parallelogramms sind und berechnen Sie weiterhin die Länge der Seiten sowie die Größe der Innenwinkel eines solchen Parallelogramms.

2.1.5 Jedes Viereck $ABCD_k$ kann als „Viereck im Raum“ bezeichnet werden. Für jedes dieser Vierecke gilt:

Die Seitenmittelpunkte sind die Eckpunkte eines Parallelogramms.

Zeigen Sie die Gültigkeit dieser Aussage.

***Lösungsvorschlag***

2.1.1 Nachweis der linearen Unabhängigkeit:

z. B. Es muss gelten:

$\vec{a} = r\vec{b} + s\vec{c}$ mit $r, s \in R$ oder $r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} = \vec{o}$ mit nur $r = s = t = 0$

I. $1 = r + s$ $\quad s = 2$
II. $-3 = 3r$ $\quad \Rightarrow r = -1$
III. $-1 = 2r + 2s$

$r, s$ in III $\Rightarrow -1 \neq 2$ Widerspruch

I. $r + s + t = 0$ $\quad t = -2r$
II. $-3r + 3s = 0$ $\quad \Rightarrow s = r$
III. $-r + 2s + 2t = 0$

$s, t$ in III $\Rightarrow r = 0 \Rightarrow s = 0 \Rightarrow t = 0;$
keine weiteren Lösungen

Die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig.

Aufstellen der Linearkombination:

$\vec{d}_9 = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$

I. $-1 = r + s + t$

II. $9 = -3r + 3s$

III. $\underline{1 = -r + 2s + 2t}$

$r = -1, s = 2, t = -2 \quad \Rightarrow \quad \vec{d}_9 = -\vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{c}$

2.1.2 z. B. $D_k \notin E_{ABC}$:

$$E_{ABC}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

z. B. Punktprobe:
$$\begin{array}{rcrcrcr} -1 & = & 1 & & & & \\ k & = & -3 & + & 2s & + & t \\ \underline{1} & \underline{=} & \underline{-1} & \underline{+} & \underline{s} & \underline{+} & \underline{t} \end{array}$$

Widerspruch; es existiert kein Punkt aus der Punktmenge, der in $E_{ABC}$ liegt; kein Viereck $ABCD_k$ ist eben.

2.1.3 Bestimmen der Koordinaten des Durchstoßpunktes:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 5 & & +2r & = & 1 & & & & \\ 7 & & -r & = & -3 & + & 2s & + & t \\ \underline{9} & & \underline{+4r} & \underline{=} & \underline{-1} & \underline{+} & \underline{s} & \underline{+} & \underline{t} \end{array} \quad \Rightarrow \; r = -2,\ s = 10,\ t = -8 \;\Rightarrow\; F(1|9|1).$$

Der Punkt F liegt innerhalb des Dreiecks ABC, wenn gilt:

$\overrightarrow{AF} = r\,\overrightarrow{AB} + s\,\overrightarrow{AC}$ für $0 \le r, s \le 1$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rcrcr} 12 & = & 6r & + & 3s \\ \underline{2} & \underline{=} & \underline{3r} & \underline{+} & \underline{3s} \end{array}$$

$10 = 3r \;\Rightarrow\; r = \frac{10}{3} \;\Rightarrow\; r > 1$ also liegt F nicht im Dreieck ABC.

2.1.4 Es existieren drei Möglichkeiten, nur eine ist lt. Aufgabenstellung verlangt.

z. B. Es kann gelten: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} \;\Rightarrow\; H$

$$\overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow H(1\,|\,6\,|\,5)$$

Berechnung der Seitenlängen und Innenwinkel des Parallelogramms:

$\overline{AB} = 3\sqrt{5}$, $\overline{AC} = 3\sqrt{2}$, die Seitenlängen des Parallelogramms betragen $3\sqrt{5}$ LE und $3\sqrt{2}$ LE.

$$\angle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \alpha, \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{10}\sqrt{10} \Rightarrow \alpha \approx 18{,}4°$$

Die Innenwinkel betragen rund 18,4° und 161,6°.

2.1.5 Um nachzuweisen, dass die Seitenmittelpunkte die Eckpunkte eines Parallelogramms sind, ist nachzuweisen, dass zwei „Seitenvektoren“ des entstehenden Vierecks gleich sind.

Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$: $M_{\overline{AB}}(1 \mid 0 \mid 0{,}5)$,

Mittelpunkt der Seite $\overline{AD_k}$: $M_{\overline{AD_k}}\left(0 \mid \frac{k-3}{2} \mid 0\right)$

Mittelpunkt der Seite $\overline{D_kC}$: $M_{\overline{D_kC}}\left(0 \mid \frac{k}{2} \mid 1{,}5\right)$

Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$: $M_{\overline{BC}}(1 \mid 1{,}5 \mid 2)$

$$\overrightarrow{M_{\overline{AD_k}}M_{\overline{AB}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3-k}{2} \\ 0{,}5 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{M_{\overline{D_kC}}M_{\overline{BC}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3-k}{2} \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren sind gleich, das Viereck ist ein Parallelogramm.

***Bewertungsvorschlag***

| | **Geforderte Leistung** | **BE** | **AB** |
|---|---|---|---|
| 2.1.1 | Nachweis der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ | 2 | I |
| | Aufstellen der Linearkombination | 3 | I |
| 2.1.2 | Gleichungssystem aufstellen, lösen und Schlussfolgerung ziehen | 2 | I |
| 2.1.3 | Gleichungssystem aufstellen und lösen, berechnen der Koordinaten von F | 3 | I |
| | Untersuchung der Lage von F bezüglich des Dreiecks ABC | 4 | II o. III |
| 2.1.4 | Berechnung der Koordinaten eines Punktes H | 2 | II |
| | Berechnung der Seitenlängen und der Innenwinkel des Parallelogramms | 5 | II |
| 2.1.5 | Ermitteln der Koordinaten der Seitenmittelpunkte, ermitteln der Vektoren, Vergleich und Aussage | 4 | II o. III |
| | Summe: | 25 | |

### 1.2.4 Aufgabe 2.2 (Analytische Geometrie/Lineare Algebra)

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Ebene E mit E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

sowie die Geradenschar $g_k$ mit $g_k$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$, $k \in R$ gegeben.

2.2.1 Stellen Sie die Ebene E mithilfe ihrer Spurgeraden in einem Koordinatensystem dar und weisen Sie nach, dass das entstehende Spurdreieck gleichseitig ist.

Berechnen Sie die Größe des Winkels, den die Ebene E mit der x-y-Ebene einschließt.

2.2.2 Begründen Sie, dass die Gerade p mit p: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ parallel zu E verläuft.

Geben Sie eine Gleichung einer Geraden an, welche in der Ebene E liegt und zwei Seiten des Spurdreiecks schneidet.

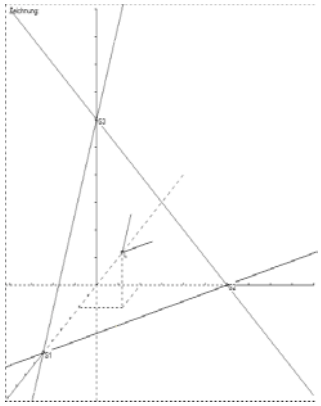
2.2.3 Ermitteln Sie die Geraden der Schar $g_k$, die mit $g_0$ einen Winkel von 45° einschließen.
Zeigen Sie, dass keine der Geraden $g_k$ und $g_{k+1}$ orthogonal zueinander sind.

2.2.4 Berechnen Sie den Parameterwert k für den Fall, dass die Gerade $g_k$ parallel zur Ebene E ist. Zeigen Sie, dass $g_k$ nicht in E liegt.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene, die $g_{_}$ enthält und parallel zu E verläuft.

***Lösungsvorschlag***

2.2.1



Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen: x - Achse: $S_x(6|0|0)$
y - Achse: $S_y(0|6|0)$
z - Achse: $S_z(0|0|6)$

Berechnung der Seitenlängen: $\overline{S_xS_y} = \overline{S_xS_z} = \overline{S_yS_z} = \sqrt{72} \Rightarrow$ das Spurdreieck ist gleichseitig.

Berechnung der Größe des Neigungswinkels $\alpha$:

z. B. der Winkel $\alpha$ entspricht dem Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{M_{S_xS_y}O}$ und $\overrightarrow{M_{S_xS_y}S_z}$, wobei $M_{S_xS_y}$ der Mittelpunkt der Seite $S_xS_y$ ist.

$M_{S_xS_y}(3|3|0)$, $\overrightarrow{M_{S_xS_y}O} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{M_{S_xS_y}S_z} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad \cos\alpha = \frac{\quad}{\sqrt{\quad}} \Rightarrow \alpha \approx 54{,}7°$

2.2.2 Einsetzen von p in E:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2 & + & 3u & + & v & = & 4 & + & s \\ 2 & - & u & - & v & = & 2 & & \\ 2 & - & 2u & & & = & 1 & - & s \end{array}$$

6 = 7 Widerspruch $\Rightarrow$ p hat mit E keinen Punkt gemeinsam, p || E.

Ermitteln der gesuchten Geraden:

Gewählt werden kann ein beliebiger Punkt des Spurdreiecks, mit Ausnahme der Eckpunkte. Als Richtungsvektor empfiehlt sich der Richtungsvektor von p.

$\Rightarrow$ z. B. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2.2.3

$g_0: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Winkel zwischen $g_0$ und $g_k$:

$$\frac{4+1}{\sqrt{5}\sqrt{5+k^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{5}{5+k^2} = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow k^2 = 5$$

Die Geraden $g_{\sqrt{5}}$ und $g_{-\sqrt{5}}$ schließen mit $g_0$ einen Winkel von 45° ein.

$g_{k+1}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ k+1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Geraden sind orthogonal, wenn gilt: $\begin{pmatrix} 2 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ k+1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow 4 + k^2 + k + 1 = 0$$

Die Gleichung $k^2 + k + 5 = 0$ hat wegen $k_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 5}$ keine Lösungen.

2.2.4 Koordinatengleichung von E: $x + y + z = 6$

Ermitteln des Parameterwertes k so, dass gilt: $g_k$ || E:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} -3 & + & 2r & + & 2 & + & kr & + & r & = & 6 \\ & & 3r & & & + & kr & & & = & 7 \\ & & & & & & kr & & & = & -3r+7 \end{array}$$

$\Rightarrow$ für k = -3 entsteht ein Widerspruch und Punktprobe:

P(-3|2|0) in E $\Rightarrow$ -1 $\neq$ 6

$\Rightarrow$ $g_{-}$ || E und $g_{-3}$ liegt nicht in E

Ermitteln einer Gleichung der zu E parallelen Ebene:

Die Gleichung enthält $g_{-3}$ und als weiteren Spannvektor z.B. den Vektor $\overrightarrow{S_xS_y}$ .

$\Rightarrow$ Ebenengleichung in Parameterform: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

***Bewertungsvorschlag***

| | **Geforderte Leistung** | **BE** | **AB** |
|---|---|---|---|
| 2.2.1 | Ermitteln der Koordinaten der Spurpunkte | 1 | I |
| | Zeichnen | 2 | I |
| | Berechnen der Seitenlängen und Vergleich | 2 | I |
| | Ermitteln geeigneter Vektoren | 2 | I |
| | Winkelberechnung | 2 | I |
| 2.2.2 | Aufstellen und Lösen des Gleichungssystems, Schluss | 3 | II |
| | Ermitteln einer entsprechenden Geradengleichung | 2 | II |
| 2.2.3 | Ansatz für die Berechnung von k | 2 | II |
| | Werte für k | 1 | II |
| | Ansatz für die mögliche Orthogonalität | 1 | II o. III |
| | Quadratische Gleichung | 1 | II o. III |
| | Nachweis, dass keine Lösungen existieren | 1 | II o. III |
| 2.2.4 | Ermitteln von k | 2 | II o. III |
| | Punktprobe und Aussage | 1 | II o. III |
| | Aufstellen einer Ebenengleichung | 2 | II |
| | **Summe** | **25** | |

## 1.2.5 Aufgabe 3.1 (Stochastik)

3.1.1 Derzeit surfen 40 % der Deutschen über 14 Jahre und 60,4 % der 14- bis 19-Jährigen im Internet.

3.1.1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: Von zehn zufällig ausgewählten 14- bis 19-Jährigen ordnen sich mindestens neun Personen den Internetnutzern zu.

B: Unter zwanzig zufällig ausgewählten deutschen Bürgern über 14 Jahre befindet sich höchstens eine Person, die das Internet nutzt.

3.1.1.2 Wie viele deutsche Bürger über 14 Jahre müsste man befragen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,99 mindestens einen Internetnutzer zu finden?

3.1.1.3 Ein Grundkurs Mathematik setzt sich aus 13 Mädchen und 8 Jungen zusammen, wobei zwei der Mädchen und einer der Jungen das Internet nicht nutzen.

Es werden zufällig fünf Schüler ausgewählt.

Berechnen sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in der ausgewählten Gruppe zwei Schüler befinden, die keine Internetnutzer sind.

3.1.2 Auf einer Computermesse präsentiert sich ein Internetanbieter, der beabsichtigt, weitere Kunden zu gewinnen.

3.1.2.1 Dieser Anbieter startete in den zurückliegenden Monaten eine Werbekampagne, die 18,9 % der Bevölkerung erreichte. 21,3 % jener, die die Werbung zur Kenntnis nahmen, entschieden sich für den Anbieter, während 2,9 % derer, die die Werbung nicht erreichte, den Anbieter dennoch wählten.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person

C: die Werbekampagne erreicht und den Anbieter gewählt hat,

D: die Werbung nicht kennt und sich für den Anbieter entschieden hat,

E: sich für den Anbieter entschieden hat.

3.1.2.2 Am Stand des Anbieters lädt man die Besucher zu einem "Werbe-Glücksspiel" ein:

Als Spielgerät ist ein Glücksrad mit einem roten und einem weißen Sektor aufgebaut

mit P(weiß) = p $(0 < p < 1)$.

Der Spieleinsatz beträgt 1 €. Das Rad muss zweimal gedreht werden.

Gewinnplan: Erscheint der rote Sektor zweimal, so erhält der Spieler ein Handbuch für eine Software im Wert von 11 €, erscheint zweimal der weiße Sektor, so bekommt er eine Broschüre über aktuelle Internetadressen mit einem symbolischen Wert von 1 €. In den anderen Fällen hat der Spieler verloren.

Ermitteln Sie die Größe des weißen Sektorenwinkels $\alpha$ für den Fall, dass das angebotene "Werbe-Glücksspiel" fair ist.

***Lösungsvorschlag***

3.1.1.1 **A:** X: Anzahl der 14- bis 19-jährigen Internetnutzer

X ist B - verteilt mit n = 10

p = 0,604

q = 0,396

$P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10)$

$$P(X \geq 9) = \binom{10}{9} \cdot 0{,}604^9 \cdot 0{,}396 + \binom{10}{10} \cdot 0{,}604^{10} \cdot 0{,}396^0 \approx 0{,}0488$$

**B:** Y: Anzahl der über 14-jährigen Deutschen, die das Internet nutzen

Y ist B - verteilt mit n = 20

p = 0,4

q = 0,6

$P(Y \leq 1) = P(Y = 0) + P(Y = 1)$

$$P(Y \leq 1) = \binom{20}{0} \cdot 0.4^0 \cdot 0{,}6^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^{19} \approx 0{,}0005$$

3.1.1.2 Y: Anzahl der über 14-jährigen Deutschen, die das Internet nutzen

Y ist $B_{n;0,4}$ - verteilt mit n gesucht

p = 0,4

q = 0,6

$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0)$

$$P(Y \geq 1) = 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^n \geq 0{,}99$$

$0{,}01 \geq 0{,}6^n$

$$n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}6}$$

$n \geq 9{,}02$

Ergebnis: $n \geq 10$,

Mindestens 10 Personen sind zu befragen.

3.1.1.3 $n_{ges} = 13 + 8 = 21,\ n_{Nutzer} = 18,\ n_{kein\,Nutzer} = 3$

k = 5

F: In der ausgewählten Gruppe befinden sich zwei Schüler, die das Internet nicht nutzen.

$$P(F) = \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{18}{3}}{\binom{21}{5}} = \frac{3 \cdot 816}{20349} \approx 0{,}1203$$

3.1.2.1 W : Werbung erreicht P(W) = 0,189

$\overline{W}$ : Werbung nicht erreicht $P(\overline{W})$ = 0,811

A: Werbung erreicht, <u>Anbieter gewählt</u> P(A) = 0,213

$A^*$ : Werbung nicht erreicht, <u>Anbieter dennoch gewählt</u> P(A ) = 0,029

Zuordnung über reduziertes Baumdiagramm möglich

$$P(C) = P(W \cap A) = P(W) \cdot P(A) = 0{,}189 \cdot 0{,}213 \approx 0{,}0403$$

$$P(D) = P(\overline{W} \cap A^*) = P(\overline{W}) \cdot P(A^*) = 0{,}811 \cdot 0{,}029 \approx 0{,}0235$$

$$P(E) = P(W \cap A) + P(\overline{W} \cap A^*) = P(C) + P(D) \approx 0{,}0638$$

3.1.2.2 P(weiß) = p

P(rot) = 1 – p

Z: Gewinn in €

Wahrscheinlichkeitsverteilung von Z :

$P(rr) = (1-p)^2$ Gewinn: 11 € - 1 € = 10 €

$P(ww) = p^2$ Gewinn: 1 € - 1 € = 0 €

$P(rw \cup wr) = 2 \cdot p \cdot (1-p)$ Gewinn: -1 €

| $z_i$ | $-1$ | $0$ | $10$ |
|---|---|---|---|
| $P(Z = z_i)$ | $2p(1-p)$ | $p^2$ | $(1-p)^2$ |

Erwartungswert von Z :

$E(Z) = (-1) \cdot 2p \cdot (1-p) + 0 \cdot p^2 + 10 \cdot (1-p)^2$

$E(Z) = 12p^2 - 22p + 10$

faires Spiel: E(Z) = 0

$12p^2 - 22p + 10 = 0$, $p^2 - \frac{11}{6}p + \frac{5}{6} = 0$, $p_{1/2} = \frac{11}{12} \pm \frac{1}{12}$

$p_1 = \frac{5}{6}, p_2 = 1 (p \neq 1)$

Winkel des weißen Sektors:

$p = \frac{\alpha}{2\pi}$, also $\alpha = 2 \cdot \pi \cdot p_1$

$\alpha = \frac{5}{3}\pi = 300°$

***Bewertungsvorschlag***

| | **Geforderte Leistung** | BE | AB |
|---|---|---|---|
| 3.1.1.1 | **A:** Zufallsgröße, Parameter der Binomialverteilung | 1 | I |
| | Ansatz, Berechnung von P(A) | 2 | I |
| | **B:** Zufallsgröße, Parameter der Binomialverteilung | 1 | I |
| | Ansatz, Berechnung von P(B) | 2 | I |
| 3.1.1.2 | Zufallsgröße, Parameter der Binomialverteilung | 1 | II |
| | Ansatz | 1 | II |
| | Berechnung von n | 2 | II |
| 3.1.1.3 | Formalisierung gegebener Größen | 1 | II |
| | Ansatz (Modell) | 1 | II |
| | Berechnung der Wahrscheinlichkeit | 1 | II |
| 3.1.2.1 | Formalisierung gegebener Ereignisse und deren Wahrscheinlichkeiten | 2 | I |

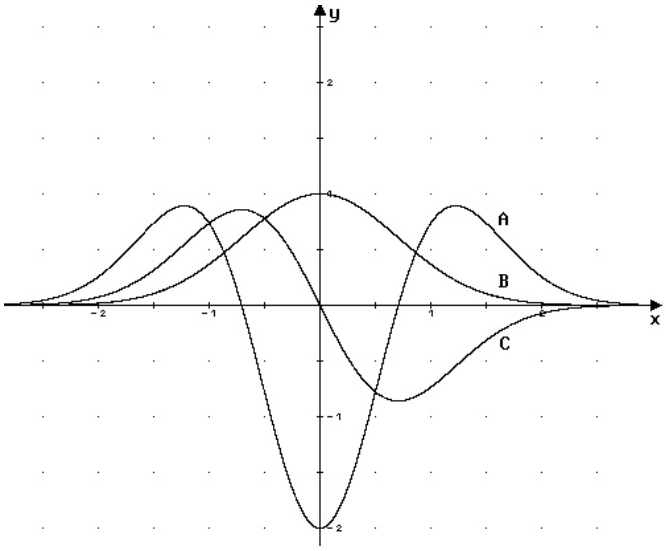
| | **Geforderte Leistung** | BE | AB |
|---|---|---|---|
| | Berechnung von P(C ), P(D) und P(E) | 3 | I |
| 3.1.2.2 | Ermittlung der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße (Z: Gewinn)<br>Erwartungswert E(Z)<br>Bedingung: E(Z) = 0 und Berechnung von p<br>Berechnung des Winkels | 3<br>1<br>2<br>1 | II<br>II<br>III<br>III |
| | **Summe** | **25** | |

## 1.2.6 Aufgabe 3.2 (Analysis)

3.2.1 Die nachstehende Abbildung zeigt die Graphen einer Funktion f sowie ihrer Ableitungsfunktionen $f'$ und $f''$.

Ordnen Sie die Graphen A, B und C den entsprechenden Funktionen zu.

Begründen Sie Ihre Entscheidung.




3.2.2 Die dargestellte Funktion f gehört zur Funktionenschar $f_t$ mit

$$f_t(x) = t \cdot e^{-\frac{1}{t}x^2}, \quad x, t \in R;\ t > 0$$

3.2.2.1 Die Graphen der 1. und 2. Ableitung von $f_1$ begrenzen eine Punktmenge vollständig. Berechnen Sie deren Flächeninhalt.

3.2.2.2 Für $x \neq 0$ erhält man aus der Funktion $f_1$ und ihrer 1. Ableitung die Funktion q mit

$$q(x) = \frac{f_1(x)}{f_1'(x)} = -\frac{1}{2x} \ .$$

Deren Graph rotiert im Intervall [1;a], $a \in R$ um die x-Achse.

Untersuchen Sie, ob man dem Volumen $V(a)$ des so entstehenden Rotationskörpers für $a \to \infty$ einen endlichen Wert zuordnen kann. Geben Sie diesen Wert gegebenenfalls an.

3.2.2.3 Zeigen Sie, dass der Punkt $W_t\left(\frac{1}{2}\sqrt{2t} \mid \frac{t}{\sqrt{e}}\right)$ ein Wendepunkt des Graphen von $f_t$ ist und bestimmen Sie eine Gleichung der Ortskurve der Wendepunkte des Graphen von $f_t$. Auf den Nachweis der Wendepunkte wird verzichtet.

Diese Ortskurve rotiert im Intervall $\left[0;\sqrt{e}\right]$ um die y-Achse.

Berechnen Sie das Volumen $V_y$ des entstehenden Rotationskörpers.

***Lösungsvorschlag***

3.2.1 Zuordnung:

A ist der Graph von $f''$

B ist der Graph von f

C ist der Graph von $f'$

Begründung:

C schneidet bei x=0 die x-Achse, die Vorzeichen der Funktionswerte wechseln von + nach -. Folglich muss ein Graph an dieser Stelle einen relativen Hochpunkt haben. Das ist B. Also gehört B zu f und C zu $f'$.

An den Abszissen der Schnittpunkte von A mit der x-Achse wechselt jeweils das Krümmungsverhalten von B. Also muss A der Graph von $f''$ sein.

3.2.2.1

Berechnen von Ableitungen:

$$f_1(x) = e^{-x^2}$$
$$f_1'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$$
$$f_1''(x) = -2 \cdot e^{-x^2} + (-2x)\cdot(-2x)\cdot e^{-x^2}$$
$$= \left(4x^2 - 2\right)\cdot e^{-x^2}$$

Berechnen der Schnittstellen: $-2x \cdot e^{-x^2} = \left(4x^2 - 2\right)\cdot e^{-x^2}$

$$0 = 4x^2 + 2x - 2$$
$$x_1 = -1 \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

Flächeninhaltsberechnung: $A = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f_1'(x) - f_1''(x)dx = \left[f_1(x) - f_1'(x)\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}$

$$= \left[e^{-x^2}\cdot(2x+1)\right]_{-1}^{\frac{1}{2}} = 2e^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{e} \approx 1{,}93 \text{ FE}$$

3.2.2.2

Berechnung des Volumens $V(a)$: $V(a) = \pi\int_1^a \left(-\frac{1}{2x}\right)^2 dx$

$$= \frac{\pi}{4}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^a$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{1}{a}\right) \text{VE}$$

Betrachtung für $a \to \infty$ : $a \to \infty \Rightarrow \frac{1}{a} \to 0$ , also $V(a) \to \frac{\pi}{4}$

Man kann dem Volumen den endlichen Wert $\frac{\pi}{4}$ zuordnen.

3.2.2.3 Berechnen der Ableitungen:

$$= \cdot \quad --$$

$$' \quad = - \quad \cdot \quad --$$

$$'' \quad = - \cdot \quad -- \quad + - \quad \cdot \left( -- \right) \cdot \quad --$$

$$= \left( - \quad - \right) \cdot \quad --$$

Ermitteln der Wendepunkte: $= \left( - \quad - \right) \cdot \quad -- \qquad = \pm\sqrt{-} = \pm - \sqrt{\phantom{x}}$

$$\left( -\sqrt{\phantom{x}} \right) = \cdot \quad --\sqrt{-} \quad = \cdot \quad -- \quad = \frac{}{\sqrt{\phantom{x}}}$$

Also: ein Wendepunkt ist $\left( -\sqrt{\phantom{x}} \quad \frac{}{\sqrt{\phantom{x}}} \right)$

Die Angabe des zweiten Wendepunktes ist nicht erforderlich.

Ortskurve der Wendepunkte: $= -\sqrt{\phantom{x}} \qquad = - \cdot \qquad =$

$$= \frac{}{\sqrt{\phantom{x}}} \qquad = \frac{}{\sqrt{\phantom{x}}} \cdot \qquad \underline{\underline{= -\sqrt{\phantom{x}} \cdot}}$$

Berechnung des Rotationsvolumens:

Mit $y = \frac{2}{\sqrt{e}} x^2$ erhält man $x^2 = \frac{\sqrt{e}}{2} y$ und als Integrationsintervall auf der y-Achse das Intervall $\left[0; 2\sqrt{e}\right]$, also $V_y = \pi \int_0^{2\sqrt{e}} \frac{\sqrt{e}}{2} y \, dy = \frac{\pi\sqrt{e}}{2} \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{2\sqrt{e}} = \pi e \sqrt{e}$ VE

***Bewertungsvorschlag***

| | **Geforderte Leistung** | **BE** | **AB** |
|---|---|---|---|
| 3.2.1 | Zuordnung der Funktionsgraphen<br>Begründung | 3<br>3 | II<br>II |
| 3.2.2.1 | Berechnen der 1. und 2. Ableitung<br>Berechnen der Schnittstellen<br>Ansatz zur Flächenberechnung, Ergebnis | 2<br>1<br>2 | I<br>I<br>I o. II |
| 3.2.2.2 | Ansatz Volumenberechnung<br>Ermitteln einer Stammfunktion | 1<br>1 | I<br>I |

| | Geforderte Leistung | BE | AB |
|---|---|---|---|
| | $V(a)$ | 1 | I |
| | Betrachtung für $a \to \infty$ | 1 | II |
| 3.2.2.3 | Berechnen der 1. und 2. Ableitung | 2 | I o. II |
| | Berechnung der Koordinaten von $W_t$ | 2 | II |
| | Bestimmung einer Gleichung für die Ortskurve | 2 | II |
| | Ansatz zur Volumenberechnung | 2 | II o. III |
| | Ermitteln einer Stammfunktion | 1 | II o. III |
| | Ergebnis | 1 | II o. III |
| | **Summe:** | **25** | |

## 1.2.7 Aufgabe 3.3 (Analytische Geometrie/Lineare Algebra)

Gegeben sind die Geradenschar $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 7-2a \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -a \\ 2a \\ 2 \end{pmatrix}$, $a \in R$ und die

Ebene E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$.

3.3.1 Berechnen Sie die Größe des Winkels, den die Ebene E und die Gerade $g_1$ einschließen.

Berechnen Sie den Abstand des Ebenenpunktes $Q(0|3|0)$ von der Geraden $g_1$.

3.3.2 Untersuchen Sie, ob es in der Schar $g_a$ Geraden gibt, die zu E parallel sind, zu E orthogonal verlaufen oder in E enthalten sind.

3.3.3 Ermitteln Sie die Lage der Ebene E zur Kugel K mit dem Mittelpunkt $M(1|-1|1)$ und dem Radius $r = 7$.
Bestimmen Sie Gleichungen der Tangentialebenen an die Kugel K, die parallel zu E sind.

3.3.4 Die Ebene E ist Tangentialebene an eine Kugel mit r = 6. Bestimmen Sie die Punkte auf der Geraden $g_0$, die jeweils die Mittelpunkte einer solchen Kugel sind.

3.3.5 Ermitteln Sie eine Gleichung für eine der Kugeln mit dem Radius 4, die die Gerade $g_0$ und die x-y-Ebene berühren.

***Lösungsvorschlag***

3.3.1 $\sin\alpha = \frac{-2+12-6}{21} = \frac{4}{21}$, $\alpha \approx 10{,}98°$

Berechnung des Abstandes: $\begin{pmatrix} 1-t \\ 5+2t-3 \\ 6+2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -1+t+4+4t+12+4t = 0$

$$\Leftrightarrow \quad t = -\frac{5}{3}$$

Koordinaten des Lotfußpunktes: $F\left(\frac{8}{3} \mid \frac{5}{3} \mid \frac{8}{3}\right)$

Abstand des Punktes *Q* von $g_1$: $\left|\overrightarrow{FQ}\right| = \sqrt{\frac{64}{9} + \frac{16}{9} + \frac{64}{9}}$

$$= 4$$

3.3.2 Untersuchung auf Parallelität bzw. Enthaltensein:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \\ 2a \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{5}$$

Für $a = \frac{3}{5}$ ist $P\left(\frac{3}{5} \mid \frac{29}{5} \mid 6\right)$ ein Punkt von $g_{\frac{3}{5}}$. Wegen $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{29}{5} - 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$

ist P auch Punkt der Ebene E, damit liegt $g_{\frac{3}{5}}$ in der Ebene.

Untersuchung auf Orthogonalität:

$$r\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 2a \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

(1) 2r = - a

(2) 6r = 2a

(3) -3r = 2

mit $r = -\frac{2}{3}$ aus (3) ergibt sich keine Lösung für a in (1) und (2). Es gibt keine zu E orthogonale Gerade .

3.3.3

$$d(M,E) = \left| \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \right|$$

$= \frac{25}{7}$ , $\frac{25}{7} < 7$ , d.h. die Ebene E schneidet die Kugel K

Berechnung der Berührungspunkte $P_1$ und $P_2$ der Tangentialebenen $T_1$ und $T_2$:

Lotgerade *g* zu E durch M : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

g in K: $(2t)^2 + (6t)^2 + (-3t)^2 = 49 \quad \Leftrightarrow t = 1 \vee t = -1,$

$P_1(3 \mid 5 \mid -2),\ P_2(-1 \mid -7 \mid 4)$

Tangentialebenen $T_1$ bzw. $T_2$:

$T_1$: 2x +6y –3z = 42

$T_2$: 2x +6y –3z = -56

3.3.4 $g_0: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $M(0 \mid 7 \mid 6 + 2t)$

$$d(M,E) = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6+2t \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = 6$$

$\Leftrightarrow t = -6 \vee t = 8$

$M_1(0 \mid 7 \mid -6)$ bzw. $M_2(0 \mid 7 \mid 22)$

3.3.5 Die Gerade $g_0$ verläuft in der y-z-Ebene parallel zur z-Achse durch den Punkt $P(0 \mid 7 \mid 6)$. Daher ist auch die y-z-Ebene Tangentialebene und es gilt z. B. $M(4 \mid 7 \mid 4)$.

Eine solche Kugel hat daher die Gleichung $\left( \vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \right)^2 = 16$.

***Bewertungsvorschlag***

| | **Geforderte Leistung** | **BE** | **AB** |
|---|---|---|---|
| 3.3.1 | Berechnung der Größe des Schnittwinkels zwischen Ebene und Gerade | 2 | I |
| | Berechnung des Abstandes | 4 | I |
| 3.3.2 | Untersuchung auf Parallelität | 2 | I o. II |
| | Nachweis des Enthaltenseins | 2 | I o. II |
| | Nachweis, dass keine Orthogonalität vorliegen kann | 2 | I o. II |
| 3.3.3 | Bestimmung der Lage zwischen Kugel und Ebene | 2 | I |
| | Bestimmung der Gleichungen der Tangentialebenen | 5 | II |
| 3.3.4 | Berechnung der Koordinaten der beiden möglichen Mittelpunkte | 3 | II |
| 3.3.5 | Gleichung einer möglichen Kugel | 3 | III |
| | **Summe:** | **25** | |

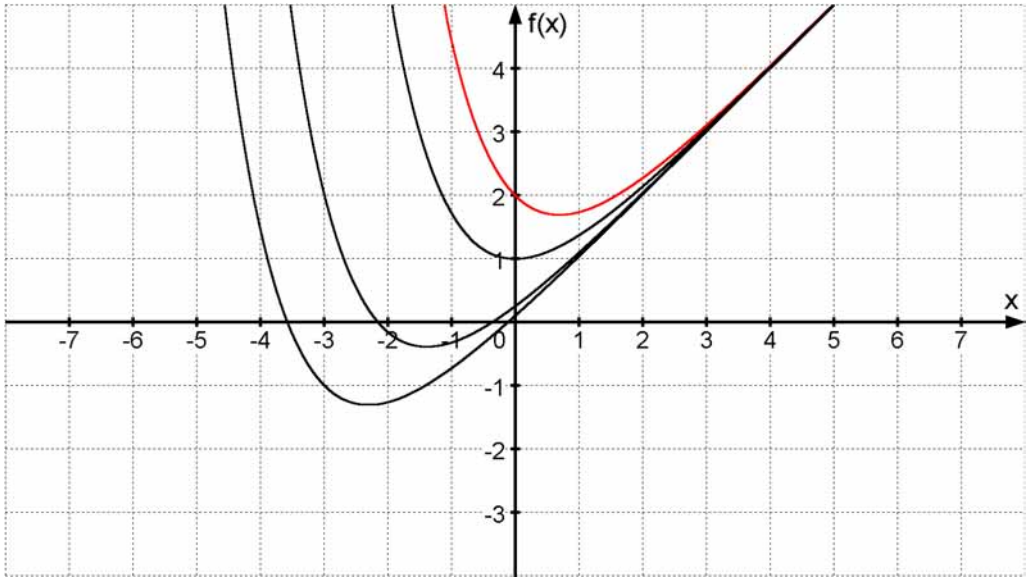
## 1.3 Aufgabenbeispiele für den Leistungskurs

### 1.3.1 Aufgabe 1.1 (Analysis)

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a$ durch $f_a(x) = x + a \cdot e^{-x}$ , $x \in R$, $a \geq 0$.

Ihr Graph sei $G_a$.

1.1.1 Die Abbildung zeigt die Graphen $G_1$, $G_{\frac{1}{10}}$, $G_{\frac{1}{4}}$ und $G_2$. Ordnen Sie die richtige Bezeichnung zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.




1.1.2 Ein Graph der Schar $G_a$ verläuft durch den Punkt $T(1|2)$. Geben Sie a für diesen Fall an und weisen Sie nach, dass T Tiefpunkt dieses Graphen ist.

Bestimmen Sie die Extrempunkte $E_a$ der Schar $G_a$ und weisen Sie ihre Art nach.

Zeigen Sie, dass alle Tiefpunkte der Schar $G_a$ auf einer Geraden liegen und geben Sie eine Gleichung dieser Geraden an.

Zeigen Sie, dass $G_a$ keine Wendepunkte hat.

1.1.3 Weisen Sie nach, dass eine Kurve der Schar $G_a$ Asymptote für alle Kurven dieser Schar ist. Geben Sie eine Funktionsgleichung für die Asymptote an.

1.1.4 Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an $G_2$ für den Fall, dass der Berührpunkt der Schnittpunkt von $G_2$ mit der y-Achse ist.

Zeigen Sie, dass sich alle Tangenten der Scharkurven, für die der Berührpunkt der Schnittpunkt des jeweiligen Graphen mit der y-Achse ist, in einem Punkt schneiden. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes.

1.1.5 Eine Scharkurve von $G_a$ schließt mit den beiden Koordinatenachsen und der Geraden $x = 2$ eine Fläche vollständig ein. Wie muss a gewählt werden, damit für deren Flächeninhalt A gilt: $A = 3 - \frac{1}{e^2}$ Flächeneinheiten?

1.1.6 $G_1$, die y-Achse und eine Parallele zur x-Achse durch den Punkt $\left(0 \middle| 2 + \frac{1}{e^2}\right)$ be-

grenzen im 1. Quadranten eine Fläche. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der bei Rotation dieser Fläche um die y-Achse entsteht.

***Lösungsvorschlag***

1.1.1 Eine Entscheidung ist durch Bestimmung des Schnittpunktes des Graphen mit der y-Achse möglich:

$$f_a(0) = 0 + a \cdot e^0$$
$$f_a(0) = a \qquad \Rightarrow \underline{\underline{S_y(0 \mid a)}}$$

Daraus ergibt sich die Reihenfolge („von oben nach unten“): $G_2, G_1, G_{\frac{1}{4}}, G_{\frac{1}{10}}$.

1.1.2

$$f_a'(x) = 1 - a \cdot e^{-x}$$
$$f_a''(x) = a \cdot e^{-x}$$

$$1 - a \cdot e^{-x} = 0$$
$$-a \cdot e^{-x} = -1$$
$$a = \frac{1}{e^{-x}}$$

Mit $x = 1$

$$a = \frac{1}{e^{-1}}$$
$$\underline{\underline{a = e}}$$

$$f_e''(x) = e \cdot e^{-x}$$
$$f_e''(1) = e \cdot e^{-1} = 1 < 0 \Rightarrow \text{Tiefp.}$$

Bestimmen von $E_a$:

$$a = e^x \Rightarrow x = \ln a$$
$$f(\ln a) = \ln a + a \cdot e^{-\ln a}$$
$$f(\ln a) = \ln a + 1$$

$$f_a''(\ln a) = a \cdot e^{-\ln a}$$
$$f_a''(\ln a) = 1 > 0$$

$$\Rightarrow \underline{T_a(\ln a \mid \ln a + 1)}, a > 0$$

Ortskurve der Tiefpunkte:

$$\underline{y = x + 1}$$

Wendepunkte:

$$f_a''(x) = 0$$
$$a \cdot e^{-x} = 0$$
$$e^{-x} \neq 0$$

Für a = 0 wird der Graph zu y = x. Es gibt also keine Wendepunkte.

1.1.3 Die Asymptote ist eine Gerade. Somit kommt nur $G_0 : y = x$ in Frage:

$$\lim_{x \to \infty} (f_a(x) - x) = \lim_{x \to \infty} \left(x + a \cdot e^{-x} - x\right)$$
$$= \lim_{x \to \infty} \left(a \cdot e^{-x}\right)$$
$$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{a}{e^x}\right)$$
$$= 0$$

1.1.5 $f_2(x) = x + 2 \cdot e^{-x}$ $\quad y = m \cdot x + n$

$f_2'(x) = 1 - 2 \cdot e^{-x}$ $\quad m = f_2'(0) = -1 \Rightarrow$ Tangente: $\underline{\underline{y = -x + 2}}$

$B(0|2)$ $\quad n = 2$

$B_a(0|a)$

$f_a'(x) = 1 - a \cdot e^{-x} \Rightarrow$ Tangentengleichung allgemein: $y_a = (1-a) \cdot x + a$

$f_a'(0) = 1 - a$

Schnittpunkt der Tangenten ($a_1 \neq a_2$):

$$(1-a_1) \cdot x + a_1 = (1-a_2) \cdot x + a_2$$
$$(1-a_1) \cdot x - (1-a_2) \cdot x = a_2 - a_1$$
$$x \cdot (1 - a_1 - 1 + a_2) = a_2 - a_1$$
$$x = \frac{a_2 - a_1}{a_2 - a_1} = 1$$

$y_a$ für $x = 1$: $y_a = (1-a) \cdot 1 + a$

$y_a = 1$

Alle Tangenten dieser Art schneiden sich im Punkt $(1|1)$.

1.1.5

$$A = \int_0^2 (x + a \cdot e^{-x})dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{2} - a \cdot e^{-x}\right]_0^2$$
$$= (2 - a \cdot e^{-2}) - (-a)$$
$$= 2 - a \cdot e^{-2} + a$$

$$2 - a \cdot e^{-2} + a = 3 - \frac{1}{e^2}$$
$$-a \cdot e^{-2} + a = 1 - \frac{1}{e^2}$$
$$a \cdot \left(-\frac{1}{e^2} + 1\right) = 1 - \frac{1}{e^2}$$
$$\underline{\underline{a = 1}}$$

$f_1(x) = x + e^{-x}$

$f_1'(x) = 1 - e^{-x}$

Schnittstelle zwischen Parallele und $G_1$:

$$2 + \frac{1}{e^2} = x + e^{-x}$$
$$2 + \frac{1}{e^2} = x + \frac{1}{e^x}$$
$$\Rightarrow x = 2$$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^2 x^2 \cdot f_1'(x)dx$$
$$V_y = \pi \cdot \int_0^2 x^2 \cdot (1 - e^{-x})dx$$
$$V_y = \pi \cdot \int_0^2 (x^2 - x^2 \cdot e^{-x})dx$$
$$V_y = \pi \cdot \left(\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 - \int_0^2 (x^2 \cdot e^{-x})dx\right)$$

$$\int e^{-x} \cdot x^2 dx$$
$$= -e^{-x} \cdot x^2 - \int -e^{-x} \cdot 2x\,dx \qquad u_1' = e^{-x} \Rightarrow u_1 = -e^{-x}$$
$$= -e^{-x} \cdot x^2 + 2 \cdot \int e^{-x} \cdot x\,dx \qquad v_1' = x^2 \Rightarrow v_1 = 2x$$
$$= -e^{-x} \cdot x^2 - 2 \cdot e^{-x} \cdot x - 2 \cdot \int -e^{-x} dx \qquad u_2' = e^{-x} \Rightarrow u_2 = -e^{-x}$$
$$= -e^{-x} \cdot x^2 - 2 \cdot e^{-x} \cdot x - 2e^{-x} \qquad v_2' = x \Rightarrow v_2 = 1$$
$$= -e^{-x} \cdot \left(x^2 + 2x + 2\right)$$

$$V_y = \pi \cdot \left( \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^2 + \left[ e^{-x} \cdot \left(x^2 + 2x + 2\right) \right]_0^2 \right)$$
$$V_y = \pi \cdot \left( \frac{8}{3} + 10 \cdot e^{-2} - 2 \right)$$
$$\underline{\underline{V_y = \pi \cdot \left( \frac{10}{e^2} + \frac{2}{3} \right) \approx 6{,}346 \text{ VE}}}$$

***Bewertungsvorschlag***

| | **Geforderte Leistung** | **BE** | **AB** |
|---|---|---|---|
| 1.1.1 | Bestimmung der Graphenbezeichnungen mit Begründung | 2 | I |
| 1.1.2 | a bestimmen, Tiefpunkt T nachweisen | 2 | I |
| | Tiefpunkte allgemein bestimmen und nachweisen | 2 | II |
| | Geradengleichung für Tiefpunkte | 2 | II |
| | Nachweis, dass es keinen Wendepunkt gibt | 2 | I |
| 1.1.3 | Bestimmung der Asymptotengleichung | 2 | II |
| | Nachweis, dass es sich um eine Asymptote handelt | 1 | II |
| 1.1.4 | Tangente an | 3 | I |
| | Tangentenschnittpunkt aller Tangenten | 3 | II |
| 1.1.5 | Flächeninhalt in Abhängigkeit von a | 3 | II |
| | a bestimmen | 2 | II |
| 1.1.6 | Ansatz (mit Grenzen) | 1 | I |
| | Bestimmen der Stammfunktion mit zweimaliger partieller Integration | 3 | II o. III |
| | Volumen | 2 | II o. III |
| | **Summe** | **30** | |

## 1.3.2 Aufgabe 1.2 (Analysis)

Gegeben ist die Funktionenschar $f_t$ mit $f_t(x) = (t - x) \cdot \sqrt{x}$ , $x \in D_{f_t}$ , $t \in R$ .
Ihr Graph sei $G_t$ .

1.2.1 Bestimmen Sie den Definitionsbereich von $f_t$. Untersuchen Sie $G_t$ auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen. Zeichnen Sie $G_5$ für $0 \le x \le 7$ und $G_{-3}$ für $0 \le x \le 2$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (1LE = 1cm)

1.2.2 Untersuchen Sie $G_t$ in Abhängigkeit von t auf lokale Extrempunkte.

Bestimmen Sie t so, dass der Graph $G_t$ die Gerade mit der Gleichung $y = 2$ als Tangente hat. Geben Sie die Gleichung der Kurve an, auf der alle Hochpunkte von $G_t$ liegen.

1.2.3 Untersuchen Sie $G_t$ auf die Existenz von Wendepunkten und bestimmen Sie eine Gleichung der Wendetangente von $G_{-3}$ [Kontrollergebnis: $y = -3x - 1$].

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von der x-Achse, $G_{-3}$ und der Wendetangente von $G_{-3}$ eingeschlossen wird.

1.2.4 Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn das Flächenstück, das $G_5$ mit der x-Achse einschließt, um die x-Achse rotiert.

1.2.5 Jede Kurve von $G_t$ mit $t > 0$ erzeugt bei Rotation des von ihr mit der x-Achse eingeschlossenen Flächenstücks um die x-Achse einen Körper. Eine zur x-Achse senkrechte Ebene mit der Gleichung $x = b$, $(0 < b < t)$ hat mit dem jeweiligen Rotationskörper von $G_t$ eine Schnittfläche gemeinsam.

Geben Sie den Flächeninhalt A dieser Fläche in Abhängigkeit von b und t an. In welchem Verhältnis muss die senkrechte Ebene die Strecke zwischen dem Koordinatenursprung und dem Schnittpunkt des jeweiligen Graphen von $f_t$ mit der x-Achse teilen, damit A maximal wird?

***Lösungsvorschlag***

1.2.1 $D_f$ : $\underline{x \ge 0}$

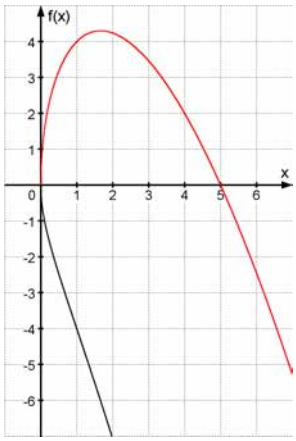
Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

$(t - x) \cdot \sqrt{x} = 0$ $\qquad$ $t - x = 0$

$\sqrt{x} = 0$ $\qquad$ $x = t$ $\quad$ Wegen $D_f$ existiert $S_{x_2}$ nur für $>$ .

$\Rightarrow \underline{S_{x_1}(0|0) = S_y}$ $\qquad$ $\Rightarrow \underline{S_{x_2}(t|0)}$

$G_5$ und $G_{-3}$:



1.2.2

$$f_t'(x) = -1 \cdot \sqrt{x} + (t - x) \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f_t'(x) = -\sqrt{x} + \frac{t - x}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

$$f_t'(x) = \frac{-2x + t - x}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

$$f_t'(x) = \frac{-3x + t}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

$$f_t'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{x = \frac{t}{3}} \text{ mit } t > 0$$

$$f_t''(x) = \frac{-3 \cdot 2 \cdot \sqrt{x} - (-3x + t) \cdot x^{-\frac{1}{2}}}{4x}$$

$$f_t''(x) = \frac{-6x + 3x - t}{4x \cdot \sqrt{x}}$$

$$f_t''(x) = \frac{-3x - t}{4x \cdot \sqrt{x}}$$

$$f_t''\left(\frac{t}{3}\right) = \frac{-3 \cdot \frac{t}{3} - t}{4 \cdot \frac{t}{3} \cdot \sqrt{\frac{t}{3}}}$$

$$f_t''\left(\frac{t}{3}\right) = \frac{-2t}{4 \cdot \frac{t}{3} \cdot \sqrt{\frac{t}{3}}} < 0 \text{ für } t > 0 \Rightarrow \text{HP}$$

$$f\left(\frac{t}{3}\right) = \left(t - \frac{t}{3}\right) \cdot \sqrt{\frac{t}{3}}$$

$$f\left(\frac{t}{3}\right) = \frac{2}{3} t \cdot \sqrt{\frac{t}{3}}$$

$$\underline{H\left(\frac{t}{3} \middle| \frac{2}{3} t \cdot \sqrt{\frac{t}{3}}\right)} \quad \text{für } t > 0$$

Waagerechte Tangente $y = 2$, d. h.

$$\frac{2}{3} t \cdot \sqrt{\frac{t}{3}} = 2$$

$$\frac{4}{27} t^3 = 4$$

$$t^3 = 27$$

$$\underline{\underline{t = 3}}$$

Ortskurve der Hochpunkte:

$$x = \frac{t}{3}$$

$$\Rightarrow t = 3x$$

$$y = \frac{2}{3} t \cdot \sqrt{\frac{t}{3}}$$

$$y = \frac{2}{3} \cdot 3x \cdot \sqrt{\frac{3x}{3}}$$

$$\underline{y = 2x \cdot \sqrt{x}}$$

Alle Hochpunkte liegen auf der Kurve mit der Gleichung $y = 2x \cdot \sqrt{x}$.

1.2.3 $f_t''(x) = 0$

$\Rightarrow -3x - t = 0$

$\underline{x_W = -\frac{t}{3}}$ mit $t < 0$

$$f'''(x) = \frac{-3 \cdot 4x \cdot \sqrt{x} - (-3x - t) \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{16x^3}$$

$$f'''(x) = \frac{-12x \cdot \sqrt{x} + 18x \cdot \sqrt{x} + 6t \cdot \sqrt{x}}{16x^3}$$

$$f'''(x) = \frac{6x \cdot \sqrt{x} + 6t \cdot \sqrt{x}}{16x^3}$$

$$f'''(x) = \frac{3 \cdot \sqrt{x} \cdot (x + t)}{8x^3}$$

$$f'''\left(-\frac{t}{3}\right) = -\frac{9 \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot (-t)^{\frac{3}{2}}} \neq 0 \Rightarrow \text{WP}$$

Wendestellen sind $x_w = -\frac{t}{3}$ für $t < 0$.

Wendetangente an $G_{-3}$:

$f_{-3}(x) = (-3 - x) \cdot \sqrt{x}$

$f_{-3}''(x) = \frac{-3x + 3}{4x \cdot \sqrt{x}}$

$\Rightarrow x_w = -\frac{-3}{3} = 1$

$f_{-3}(1) = -4$

$y = mx + n$

$m = f_{-3}'(1) = \frac{-3 \cdot 1 - 3}{2 \cdot \sqrt{1}} = -3$

$-4 = -3 \cdot 1 + n$

$n = -1$

$\underline{\underline{y = -3x - 1}}$

Fläche:

$A = A_1 + A_2$

$$A_1 = \left| \int_0^1 \left[ (-3 - x) \cdot \sqrt{x} - (-3x - 1) \right] dx \right|$$

$$A_1 = \left| \int_0^1 \left( -3 \cdot x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + 3x + 1 \right) dx \right|$$

$$A_1 = \left| \left[ -2 \cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{2} x^2 + x \right]_0^1 \right|$$

$$A_1 = \left| -2 - \frac{2}{5} + \frac{3}{2} + 1 \right|$$

$$A_1 = \frac{1}{10} \text{FE}$$

$$A_2 = \frac{a \cdot b}{2}$$

$$A_2 = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{2}$$

$$A_2 = \frac{1}{6} \text{FE}$$

$$A = \left( \frac{1}{10} + \frac{1}{6} \right) \text{FE}$$

$$A = \frac{4}{15} \text{FE}$$

$$\underline{\underline{A \approx 0{,}266 \text{ FE}}}$$

1.2.4

$$(5-x)\cdot\sqrt{x}=0$$
$$x_1=0 \vee x_2=5$$
$$V=\pi\cdot\int_0^5 (5-x)^2\cdot x\,dx$$
$$V=\pi\cdot\int_0^5 \left(25-10x+x^2\right)\cdot x\,dx$$
$$f_5(x)=(5-x)\cdot\sqrt{x}$$
$$V=\pi\cdot\left[\frac{25}{2}x^2-\frac{10}{3}x^3+\frac{x^4}{4}\right]_0^5$$
$$V=\pi\cdot\left(\frac{625}{2}-\frac{1250}{3}+\frac{625}{4}\right)-0$$
$$V=\pi\cdot\frac{625}{12}\,\text{VE}$$
$$\underline{\underline{V\approx 163{,}625\ \text{VE}}}$$

1.2.5

$$A(t,b)=\pi\cdot\left[(t-b)\cdot\sqrt{b}\right]^2$$
$$A(t,b)=\pi\cdot(t-b)^2\cdot b$$
$$A(t,b)=\pi\cdot\left(t^2\cdot b-2b^2\cdot t+b^3\right)$$
$$A'(b)=\pi\cdot\left(t^2-4bt+3b^2\right)$$

$$A'(b)=0$$
$$\Rightarrow b^2-\frac{4}{3}b\cdot t+\frac{t^2}{3}=0$$
$b_1=t$ entfällt
$$\underline{b_2=\frac{t}{3}}$$

$$A''(b)=\pi\cdot(-4t+6b)$$
$$A''\left(\frac{t}{3}\right)=-2t\cdot\pi<0 \text{ für } t>0$$
$\Rightarrow$ lokales Maximum

Für $b=0$ bzw. $b=t$ wird der Flächeninhalt Null, d. h. für $b=\frac{t}{3}$ liegt ein globales Maximum vor.

Erkennt der Schüler, dass lediglich der Radius r der Kreisfläche, also $f_t(x)$ maximal werden muss, kann er unmittelbar auf die x-Koordinate des Hochpunktes zurückgreifen.

Die Ebene teilt diese Strecke im Verhältnis $1:2$.

***Bewertungsvorschlag***

| | **Geforderte Leistung** | **BE** | **AB** |
|---|---|---|---|
| 1.2.1 | Bestimmung des Definitionsbereichs | 1 | I |
| | Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen | 2 | I |
| | $G_5$ und $G_{-3}$ in ein Koordinatensystem zeichnen | 3 | I |
| 1.2.2 | Untersuchung auf Extrempunkte | 4 | II |
| | t zur Tangente $y=2$ bestimmen | 2 | I |
| | Ortskurve der Hochpunkte bestimmen | 2 | II |
| 1.2.3 | Berechnung und Nachweis der Wendestellen und Erkenntnis, dass sie nur für negative t existieren | 3 | II |
| | Aufstellen der Gleichung für die Wendetangente von $G_{-3}$ | 3 | II |
| | Berechnung des Flächeninhalts der Fläche, die von der x-Achse, $G_{-3}$ | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | und der zugehörigen Wendetangente eingeschlossen wird | 3 | II |
| 1.2.4 | Volumen des Rotationskörpers bei Rotation von $G_5$ um die x-Achse berechnen | 3 | I |
| 1.2.5 | Angabe des Flächeninhaltes $A(b,t)$<br>Bestimmen des gesuchten Streckenverhältnisses | 1<br>3 | III<br>III |
| | **Summe** | **30** | |

### 1.3.3 Aufgabe 2.1 (Analytische Geometrie/Lineare Algebra)

Gegeben sind die Punkte $A(1|-1|1)$, $B(5|5|7)$, $C(1|5|1)$ sowie eine Schar von Punkten $D_k(2k-1|2k+1|-5)$, $k \in R$.

2.1.1 Zeigen Sie, dass die Punkte A, B, C die Eckpunkte eines Dreiecks sind und berechnen Sie die Größe des Innenwinkels BAC.

Bestimmen Sie k so, dass das Dreieck ABC zu einem Parallelogramm $ABCD_k$ ergänzt wird.

2.1.2 Der Punkt T teilt die Seite $\overline{AC}$ des Dreiecks ABC im Verhältnis $\overline{AT}:\overline{TC}=1:2$. Der Punkt S sei der Schnittpunkt der Strecke $\overline{BT}$ mit der Seitenhalbierenden, die durch den Punkt A verläuft.
In welchem Verhältnis teilt S die Strecke $\overline{BT}$?

2.1.3 Begründen Sie, dass die Punkte der Schar $D_k$ auf einer Geraden liegen und berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels zwischen dieser Geraden und der Ebene, die durch die Punkte A, B und C bestimmt wird.

2.1.4 Alle Geraden durch den Koordinatenursprung und einen der Punkte der Schar $D_k$ bilden eine Geradenschar $g_k$. Die Gerade h sei durch die Punkte A und C bestimmt.

Bestimmen Sie die Gerade der Schar $g_k$, die die Gerade h schneidet und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes.

2.1.5 Ermitteln Sie den Punkt aus der Schar $D_k$, der zu der Geraden durch die Punkte A und C den kleinsten Abstand hat.

***Lösungsvorschlag***

2.1.1

Die Vektoren $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}4\\6\\6\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}$ sind nicht kollinear, damit liegen die Punkte A, B und C nicht auf einer Geraden und sind Eckpunkte eines Dreiecks.

Innenwinkel $\alpha$: $\cos\alpha=\dfrac{\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{22}}=\dfrac{3}{\sqrt{22}}$, $\alpha\approx 50{,}24°$

Berechnung von k:

$$\overrightarrow{AD}_k = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2k-2 \\ 2k+2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (2k+2=0 \wedge 2k-2=-4) \Leftrightarrow k=-1$$

2.1.2 Es sei $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ und M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ des Dreiecks ABC.

Dann gilt:

$$\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TA} = \vec{o}$$

$$r\overrightarrow{AM} + s\overrightarrow{BT} - \frac{1}{3}\vec{b} = \vec{o}$$

$$r\left(\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}\right) + s\left(\frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}\right) - \frac{1}{3}\vec{b} = \vec{o}$$

$$\left(\frac{1}{2}r + \frac{1}{3}s - \frac{1}{3}\right)\vec{b} + \left(\frac{1}{2}r - s\right)\vec{c} = \vec{o}$$

Die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig, also muss gelten:

(1) $$\frac{r}{2} + \frac{s}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

(2) $$\frac{r}{2} - s = 0$$

(1) – (2) $$\frac{4}{3}s = \frac{1}{3}$$

$$s = \frac{1}{4}$$

Der Punkt S teilt die Strecke $\overline{BT}$ im Verhältnis $3:1$.

Andere Lösungsmöglichkeit zu 2.1.2:

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gerade durch B und T: $$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Gerade durch A und M: $$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt S der beiden Geraden: $S\left(2\,|\,2\,|\,\frac{5}{2}\right)$.

Teilverhältnis:
$$\frac{\left|\overrightarrow{BS}\right|}{\left|\overrightarrow{ST}\right|} = \frac{\sqrt{9+9+\frac{81}{4}}}{\sqrt{1+1+\frac{9}{4}}}$$
$$= \frac{3\sqrt{1+1+\frac{9}{4}}}{\sqrt{1+1+\frac{9}{4}}}$$
$$= -$$

2.1.3

$\vec{x} = \overrightarrow{OD_k} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, d. h. alle Punkte liegen auf einer Geraden.

Ebene durch A, B, C: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Winkel $\varphi$: $\sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{13}}$, $\varphi \approx 36{,}04°$

2.1.4

Geradenschar $g_k$: $\vec{x} = t\begin{pmatrix} 2k-1 \\ 2k+1 \\ -5 \end{pmatrix}$

Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt S:

(1) $1 = (2k-1)t$

(2) $-1 + r = (2k+1)t$

(3) $1 = -5t$

Aus den Gleichungen (1) - (3) folgt $t = -\frac{1}{5}$, $r = \frac{8}{5}$, $k = -2$ und damit $S\left(1\,|\,\frac{3}{5}\,|\,1\right)$.

2.1.5 Berechnung von r in Abhängigkeit von k:

$$\begin{pmatrix} 1-2k+1 \\ -1+r-2k-1 \\ 1+5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow r - 2k - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow r = 2k + 2$$

Damit ergibt sich $F_k(1 \mid 2k+1 \mid 1)$ und $\overrightarrow{F_kD_k}(2k-2 \mid 0 \mid -6)$.

Berechnung des minimalen Abstandes: $\left|\overrightarrow{F_kD_k}\right| = 2\sqrt{k^2 - 2k + 10}$ .

Wegen der Monotonie der Wurzelfunktion wird dieser Abstand am kleinsten, wenn der Radikand ein (globales) Minimum annimmt. Das befindet sich bei einer quadratischen Funktion an der Scheitelpunktsstelle, d. h. k = 1 und $D_1(1 \mid 3 \mid -5)$.

***Bewertungsvorschlag***

| | **Geforderte Leistung** | **BE** | **AB** |
|---|---|---|---|
| 2.1.1 | Nachweis, dass die Punkte A,B,C Eckpunkte eines Dreiecks sind | 2 | I o. II |
| | Innenwinkel $\alpha$ | 2 | I |
| | k für Parallelogramm | 2 | I o. II |
| 2.1.2 | Ansatz über geeignete Vektorkette | 1 | II |
| | Linearkombination des Nullvektors aus $\vec{b}$ und $\vec{c}$ | 3 | II |
| | LGS und Berechnung des Teilverhältnisses | 3 | II |
| 2.1.3 | Begründung | 2 | I o. II |
| | Normalenvektor der Ebene | 1 | I o. II |
| | Winkel | 2 | I o. II |
| 2.1.4 | Gleichungen der beiden Geraden | 2 | I |
| | Berechnung von k für die schneidende Gerade | 3 | II |
| 2.1.5 | Berechnung des Lotfußpunktes und des Vektors $\overrightarrow{F_kD_k}$ | 3 | II |
| | Ansatz für den Abstand | 1 | II |
| | Diskussion globales Minimum | 3 | III |
| | **Summe** | **30** | |

### 1.3.4 Aufgabe 2.2 (Analytische Geometrie/Lineare Algebra)

Gegeben sind die Ortsvektoren $\vec{a}$ , $\vec{b}$ und $\vec{c}_k$ der Punkte A, B und $C_k$ durch $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c}_k = \begin{pmatrix} k \\ 2k-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $k \in R$ sowie der Punkt P $(3\,|\,-1\,|\,2)$.

2.2.1 Untersuchen Sie, für welche k die Vektoren $\vec{a}$ , $\vec{b}$ und $\vec{c}_k$ linear abhängig bzw. linear unabhängig sind.

2.2.2 Ermitteln Sie eine Gleichung für die Ebene $E_{ABC_1}$ in Koordinatenform.

Welchen Abstand hat der Punkt P von dieser Ebene?

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $P'$, der durch Spiegelung von P an der Ebene $E_{ABC_1}$ entsteht.

2.2.3 Die Punkte A, B und $C_0$ sind die Eckpunkte der Grundfläche eines geraden dreiseitigen Prismas $ABC_0DEF$.

Weisen Sie nach, dass die Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck ist.

Berechnen Sie die Koordinaten der für D möglichen Punkte, wenn das Prisma ein Volumen von 2 Volumeneinheiten hat.

2.2.4 Der Vektor $\vec{a}$ ist ein Normalenvektor der Ebene F, die den Punkt P enthält.
Die Ebenen $E_k$ verlaufen durch den Koordinatenursprung und haben $\vec{c}_k$ als Normalenvektor.
Zeigen Sie, dass keine der Ebenen $E_k$ zur Ebene F parallel ist.
Berechnen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden von F und $E_1$.
Beschreiben Sie die Lage der Ebene F zur y–Achse.

2.2.5 Für welche k gilt die Doppelungleichung $\vec{a} \cdot \overrightarrow{c_k} < \vec{b} \cdot \overrightarrow{c_k} < \overrightarrow{c_k}^2$ ?

***Lösungsvorschlag***

2.2.1

Lineares Gleichungssystem (LGS): $r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} k \\ 2k-1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{o}$

$$\begin{array}{rrrl} r & + & kt & = 0 \\ & -s & +(2k-1)t & = 0 \\ -r & -s & +t & = 0 \\ \hline r & + & kt & = 0 \\ & -s & +(2k-1)t & = 0 \\ & -s & +(k+1)t & = 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} r \quad + \quad kt &= 0 \\ -s + (2k-1)t &= 0 \\ (k-2)t &= 0 \end{aligned}$$

Für k = 2 besitzt das LGS nichttriviale Lösungen, die Vektoren sind linear abhängig.

Für $k \neq 2$ hat des LGS nur die triviale Lösung, die Vektoren sind linear unabhängig.

2.2.2

Gleichung der Ebene $E_{ABC_1}$: $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{AC}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$-2x + 2y - z = -2 + 1$$

$$E_{ABC_1}: \ 2x - 2y + z = 1$$

Abstand von P: $d(P, E_{ABC_1}) = \dfrac{6+2+2-1}{3} = 3$

Berechnung von $P'$: $\vec{OP'} = \vec{OP} - 6\vec{n}_0$

$$\vec{OP'} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.2.3

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{BC}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{AB} \cdot \vec{BC}_0 = 0$, das Dreieck $ABC_0$ hat einen rechten Winkel bei B.

Höhe des Prismas: $2 = \dfrac{\left|\vec{AB}\right| \left|\vec{BC}_0\right|}{2} h$, $h = \sqrt{2}$.

Berechnung von $D_{1,2}$: $\vec{n}_{ABC_0} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{OD}_{1,2} = \vec{OA} \pm \sqrt{2} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \vec{n}_{ABC_0}$

$$D_1(2 \mid -1 \mid -1), \ D_2(0 \mid 1 \mid -1)$$

Anderer Lösungsweg zur Berechnung von $D_{1,2}$:

$E_{ABC_0}: \ x - y = 1$

Gleichungen der Parallelebenen zu $E_{ABC_0}$ im Abstand $\sqrt{2}$: $\dfrac{x - y - 1}{\sqrt{2}} = \pm\sqrt{2}$

Parallelebene für $D_1$: $x - y = 3$

Parallelebene für $D_2$: $x - y = -1$

$D_1$ bzw. $D_2$ ergibt sich als Schnittpunkt der Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit der jeweiligen Parallelebene.

2.2.4 $F: \left( \vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$, $E_k: \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} k \\ 2k-1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 2k-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt

(1) $r = k$

(2) $0 = 2k - 1$

(3) $-r = 1$

aus (1) und (3) folgt k = -1, mit (2) aber 0 = -3, d. h., die Normalenvektoren sind nicht kollinear und damit die Ebenen nicht parallel.

Schnittgerade von F und $E_1$:

$E_1: x + y + z = 0$
$F: x \quad - z = 1$

z = t, x = 1 + t, y = - 2t – 1

Schnittgerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Ebene F ist wegen $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ parallel zur y–Achse.

2.2.5 Mit $\vec{a} \cdot \vec{c}_k = k - 1$, $\vec{b} \cdot \vec{c}_k = -2k$, $\overrightarrow{c_k}^2 = 5k^2 - 4k + 2$ ergibt sich die Doppelungleichung $k - 1 < -2k < 5k^2 - 4k + 2$

$k - 1 < -2k \Leftrightarrow k < \frac{1}{3}$

$-2k < 5k^2 - 4k + 2 \Leftrightarrow 0 < 5k^2 - 2k + 1$

$5k^2 - 2k + 1 > 0$ gilt für alle $k \in R$.

Die Doppelungleichung gilt somit für $k < \frac{1}{3}$

***Bewertungsvorschlag***

| | **Geforderte Leistung** | **BE** | **AB** |
|---|---|---|---|
| 2.2.1 | Linearkombination des Nullvektors | 1 | I o. II |
| | LGS | 1 | I o. II |
| | Fallunterscheidung und Lösung für k | 2 | II |
| 2.2.2 | Ebenengleichung | 2 | I |
| | Abstand von P | 1 | I |
| | Berechnung der Koordinaten des Spiegelpunktes | 3 | II |
| 2.2.3 | Nachweis der Rechtwinkligkeit | 1 | I |
| | Höhe des Prismas | 1 | II |
| | Berechnung der Koordinaten der für D möglichen Punkte | 3 | II |
| 2.2.4 | Gleichungen der beiden Ebenen | 2 | I |
| | Nachweis der Nichtparallelität | 2 | II |
| | Gleichung der Schnittgeraden | 3 | I |
| | Lage von F zur y–Achse | 2 | II |
| 2.2.5 | Doppelungleichung in k | 2 | II |
| | Lösung der 1. Ungleichung | 1 | III |
| | Lösung der 2. Ungleichung | 2 | III |
| | Gesamtlösung | 1 | III |
| | **Summe** | **30** | |

### 1.3.5 Aufgabe 3.1 (Stochastik)

3.1.1 40 % der Deutschen im Alter über 14 Jahre sind derzeit online.

Dieser Personenkreis nutzt das Internet mit unterschiedlicher Intensität:

- 36,7 % täglich,
- 36,2 % mehrmals pro Woche,
- 13,1 % genau einmal pro Woche und
- 14,0 % seltener.

3.1.1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: Nur der dritte und der sechste von sieben nacheinander befragten Internetnutzern beanspruchen das Internet "genau einmal pro Woche".

B: Unter zwanzig zufällig ausgewählten Usern befindet sich höchstens eine Person, die das Internet "seltener" benutzt.

C: Von zehn zufällig ausgewählten Internetnutzern ordnen sich mindestens zwei Personen der Gruppe der "täglichen Surfer" zu.

3.1.1.2 Wie viele deutsche Bürger über 14 Jahre müsste man befragen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,985 wenigstens einen Internetnutzer zu finden?

3.1.1.3 27,9 % der weiblichen und 53,16 % der männlichen Bevölkerung Deutschlands im Alter über 14 Jahre nutzen das Internet.

Man gehe davon aus, dass 52,1 % der Deutschen im Alter über 14 Jahre Frauen sind.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter User eine Frau ist.

3.1.2 Eine Volkshochschule einer kreisfreien Stadt des Landes Brandenburg bietet zu Beginn eines Schuljahres Internetlehrgänge für insgesamt 120 Teilnehmer an.

Erfahrungsgemäß werden 10 % der Anmeldungen kurzfristig vor Lehrgangsbeginn widerrufen. Um dennoch eine möglichst vollständige Auslastung zu gewährleisten, werden mehr als 120 Anmeldungen angenommen.

3.1.2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zu Lehrgangsbeginn mindestens 120 der angemeldeten 130 Personen erscheinen.

3.1.2.2 Berechnen Sie, wie viele Anmeldungen höchstens akzeptiert werden dürfen, damit das Platzangebot für 120 Teilnehmer mit einer Mindestwahrscheinlichkeit von 0,98 ausreicht.

***Lösungsvorschlag***

3.1.1.1 **A:** Lösungshilfe z. B.: reduziertes, siebenstufiges Baumdiagramm mit

p = P("genau einmal pro Woche") = 0,131

q = 1 – p = 0,869

$P(A) = 0{,}131^2 \cdot 0{,}869^5 \approx 0{,}0085$

**B:** X: Anzahl der Personen, die das Internet "seltener" nutzen

X ist $B_{20;0,14}$ - verteilt mit n = 20

p = 0,14

q = 0,86

$P(B) = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$

$$P(B) = \binom{20}{0} \cdot 0{,}14^0 \cdot 0{,}86^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0{,}14 \cdot 0{,}86^{19} \approx 0{,}2084$$

**C:** X: Anzahl der Personen, die "täglich surfen"

X ist B - verteilt mit n = 10

p = 0,367

q = 0,633

$P(C) = P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$

$$P(C) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0{,}367^0 \cdot 0{,}633^{10} - \binom{10}{1} \cdot 0{,}367 \cdot 0{,}633^9 \approx 0{,}9298$$

3.1.1.2 Y: Anzahl der über 14-jährigen Deutschen, die das Internet nutzen

Y ist $B_{n;0,4}$ - verteilt mit n gesucht

p = 0,4

q = 0,6

$P(Y \geq 1) \geq 0{,}985$

$$1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^n \geq 0{,}985$$

$$0{,}015 \geq 0{,}6^n$$

$$n \geq \frac{\ln 0{,}015}{\ln 0{,}6}$$

$$n \geq 8{,}22 \quad \text{Ergebnis}: n \geq 9$$

Mindestens neun Personen sind zu befragen.

3.1.1.3 F: Person ist weiblich

N: Person ist Internetnutzer

P(F) = 0,521

P(N) = 0,4

P (N) = 0,279

gesucht: $P_N(F)$

Aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit $P_N(F) = \frac{P(N \cap F)}{P(N)}$ mit $P(N \cap F) = P(F \cap N) = P(F) \cdot P_F(N)$ folgt

$$P_N(F) = \frac{P(F) \cdot P_F(N)}{P(N)}$$

$$P_N(F) = \frac{0{,}521 \cdot 0{,}279}{0{,}4} \approx 0{,}3634.$$

3.1.2.1 Z: Anzahl derer, die zum Lehrgang erscheinen

Z ist $B_{130;0,9}$ - verteilt mit n = 130

p = 0,9

q = 0,1

$P(Z \geq 120) = 1 - P(Z \leq 119)$

Die Berechnung erfolgt mithilfe der Näherungsformel von de-Moivre-Laplace (globale Näherungsformel) mit $P(Z \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k + 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right)$, wobei gilt: $\mu = n \cdot p$,

$\mu = 130 \cdot 0{,}9 = 117$; $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$, $\sigma^2 = 130 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 11{,}7 > 9$ ("Faustregel" ...).

$$P(Z \geq 120) \approx 1 - \Phi\left(\frac{119 + 0{,}5 - 117}{\sqrt{11{,}7}}\right) \approx 1 - \Phi(0{,}7309) \approx 1 - \Phi(0{,}7)$$

$P(Z \geq 120) \approx 1 - 0{,}7580 \approx 0{,}242$ ($\Phi$-Tabelle; hier: "paetec – Verlag")

3.1.2.2 Z: Anzahl derer, die zum Lehrgang erscheinen

Z ist $B_{n;0,9}$ - verteilt mit n gesucht

$p = 0{,}9$

$q = 0{,}1$

$P(Z \le 120) \ge 0{,}98$

Da $n \ge 120$ zu erwarten ist, gilt $\sigma^2 = 120 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 10{,}8 > 9$ ("Faustregel" ...).

$\mu = 0{,}9 \cdot n,\ \sigma^2 = n \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}09 \cdot n,\ \sigma = 0{,}3 \cdot \sqrt{n}$

$$P(Z \le 120) \approx \Phi\left(\frac{120 + 0{,}5 - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}}\right) \ge 0{,}98$$

$$\frac{120 + 0{,}5 - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}} \ge 2{,}1 \qquad (\Phi\text{- Tabelle, vgl. 3.1.})$$

$0 \ge 0{,}9n + 0{,}63\sqrt{n} - 120{,}5$

Lösung der Gleichung $0{,}9x^2 + 0{,}63x - 120{,}5 = 0$ mit $x = \sqrt{n}$ :

$x^2 + 0{,}7x - 133{,}89 = 0$

$x_1 \approx 11{,}23$, $n_1 = x_1^2 \approx 126{,}1$; $(x_2 \approx -11{,}93 < 0)$

Lösung der Ungleichung: $0 \le n \le 126$ (höchstens 126 Anmeldungen)

***Bewertungsvorschlag***

| | **Geforderte Leistung** | **BE** | **AB** |
|---|---|---|---|
| 3.1.1.1 | **A:** Formalisieren ( p, q ) | 1 | I |
| | Modell, Berechnung von P(A) | 2 | I |
| | **B:** Zufallsgröße, Parameter der Binomialverteilung | 1 | I |
| | Ansatz, Berechnung von P(B) | 2 | I |
| | **C:** Zufallsgröße, Parameter der Binomialverteilung | 1 | I |
| | Ansatz, Berechnung von P(C ) | 2 | I |
| 3.1.1.2 | Zufallsgröße, Parameter der Binomialverteilung | 1 | I |
| | Ansatz | 1 | I |
| | Berechnung von n | 2 | II |
| 3.1.1.3 | Formalisierung gegebener bzw. gesuchter Wahrscheinlichkeiten | 1 | I |
| | Ansatz: Bedingte Wahrscheinlichkeit | 1 | II |
| | Berechnung der Wahrscheinlichkeit | 2 | II |
| 3.1.2.1 | Zufallsgröße, Parameter der Binomialverteilung | 1 | II |
| | Ansatz | 1 | II |
| | Näherungsformel mit Berechnung von $\mu, \sigma^2$ ( > 9 ) | 2 | II |
| | Berechnung der Wahrscheinlichkeit mit Tabelle | 1 | II |
| 3.1.2.2 | Zufallsgröße, Parameter der Binomialverteilung | 1 | II |
| | Ansatz | 1 | II |

| | Geforderte Leistung | BE | AB |
|---|---|---|---|
| | Näherungsformel mit Berechnung von $\mu, \sigma^2$ ( > 9 ) | 2 | II |
| | Aufstellen der Ungleichung durch Nutzung der Tabelle | 2 | III |
| | Lösen der Ungleichung (Substitution), Angabe der Lösungsmenge | 2 | III |
| | **Summe:** | **30** | |

### 1.3.6 Aufgabe 3.2 (Analysis)

Gegeben ist die Funktionenschar $f_k$ mit $f_k(x) = e^x \cdot \sqrt{k + e^x}$ , $k, x \in R, k \geq 0$.

Der Graph von $f_k$ sei $G_k$.

3.2.1 Zeichnen Sie $G_2$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (1 LE = 1cm)

Geben Sie den Wertebereich von $f_k$ an und bestimmen Sie die Schnittpunkte von $G_k$ mit der y-Achse des Koordinatensystems.

3.2.2 Untersuchen Sie $G_k$ auf Extrempunkte.

3.2.3 Bestimmen Sie eine Gleichung der Normalen von $G_0$ im Schnittpunkt von $G_0$ mit der y-Achse.

3.2.4 Bestimmen Sie eine Gleichung der Umkehrfunktion $\overline{f_0}$ von $f_0$. Der Graph von $\overline{f}_0$ sei $\overline{G}_0$. Der Schnittpunkt von $G_0$ mit der y-Achse sei P, der Schnittpunkt von $\overline{G}_0$ mit der x-Achse sei Q. Die Tangente an $\overline{G}_0$ im Punkt Q sei t. Der Schnittpunkt von t mit der y-Achse sei R.

Weisen Sie nach, dass das Dreieck PQR einen 2,5-fachen Flächeninhalt der Fläche hat, die im 4. Quadranten von $\overline{G}_0$, t und der y-Achse eingeschlossen wird.

3.2.5 Die x-Achse, $G_2$ und die Gerade $x = b$ $(0 \leq b \leq 1)$ schließen eine Fläche ein. Bestimmen Sie den Grenzwert des Flächeninhalts A dieser Fläche in Abhängigkeit von b. Für welches b halbiert die y-Achse die beschriebene Fläche?

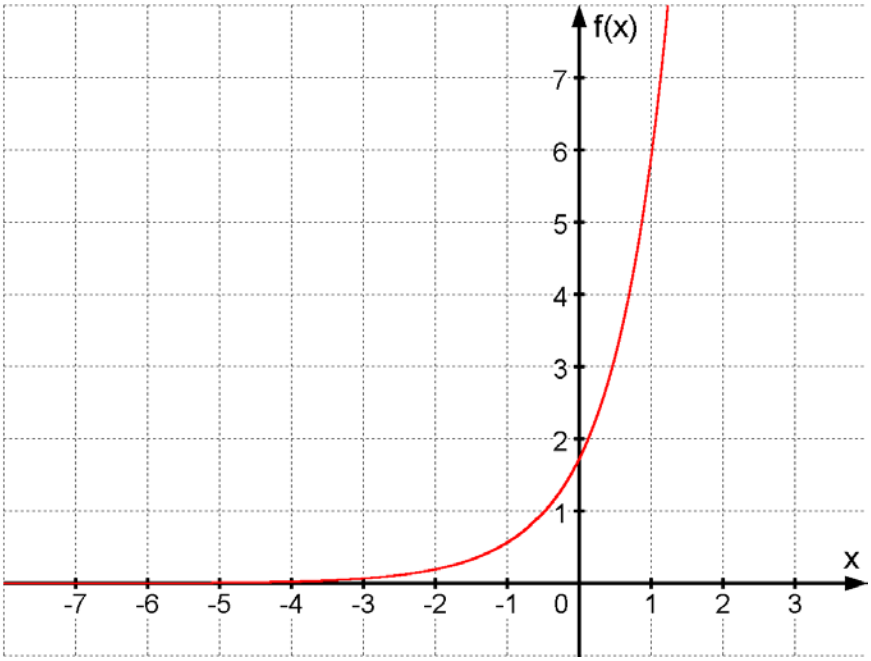
3.2.6 Jeder Graph der Schar begrenzt im II. Quadranten des Koordinatensystems mit beiden Koordinatenachsen eine ins Unendliche reichende Fläche. Rotiert diese Fläche um die x-Achse, entsteht ein Rotationskörper.

Für welchen Graph der Schar hat dieser Rotationskörper ein Volumen von $\frac{4}{3}\pi$ Volumeneinheiten?

***Lösungsvorschlag***

3.2.1 $f_2(x) = e^x \cdot \sqrt{2 + e^x}$

Graph $G_2$:




Wertebereich: $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$f_k(0) = e^0 \cdot \sqrt{2 + e^0}$$
$$f_k(0) = \sqrt{3}$$
$$\underline{S_y\left(0 \middle| \sqrt{3}\right)}$$

3.2.2

$$f_k'(x) = e^x \cdot \sqrt{k + e^x} + \frac{e^x \cdot e^x}{2 \cdot \sqrt{k + e^x}}$$
$$f_k'(x) = \frac{e^x \cdot 2 \cdot \left(k + e^x\right) + e^{2x}}{2 \cdot \sqrt{k + e^x}}$$
$$f_k'(x) = \frac{e^x \cdot \left(2k + 3e^x\right)}{2 \cdot \sqrt{k + e^x}}$$

$$f_k'(x) = 0$$
$$e^x \cdot \left(2k + 3e^x\right) = 0$$
$$\Rightarrow x = \ln\left(-\frac{2}{3}k\right) \text{ nicht def. für } k \geq 0$$

$G_k$ hat keine Extrempunkte.

3.2.3

$$f_0'(x) = \frac{3e^{2x}}{2 \cdot \sqrt{e^x}}$$
$$f_0'(0) = \frac{3}{2} = m_{Tangente}$$

$$m_{Normale} = -\frac{1}{m_{Tangente}}$$
$$m_{Normale} = -\frac{2}{3}$$

$$\underline{y_N = -\frac{2}{3}x + 1}$$

3.2.4

$$f_0(x) = e^x \cdot \sqrt{e^x}$$

$$f_0(x) = e^{\frac{3}{2}x}$$

$$y = e^{\frac{3}{2}x}$$

$$\ln y = \frac{3}{2}x \cdot \ln e$$

$$\frac{2}{3}\ln y = x$$

$$\underline{\bar{f}_0(x) = \frac{2}{3}\ln x}$$

$$\underline{P(0|1)}$$

$$\frac{2}{3}\ln x = 0$$

$$x = 1$$

$$\underline{Q(1|0)}$$

Tangente t :

$$f_0'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x}$$

$$f_0'(1) = \frac{2}{3} = m_t$$

$$y = m \cdot x + n$$

$$0 = \frac{2}{3} \cdot 1 + n$$

$$n = -\frac{2}{3}$$

$$\underline{t: y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}}$$

$$y = \frac{2}{3} \cdot 0 - \frac{2}{3}$$

$$y = -\frac{2}{3}$$

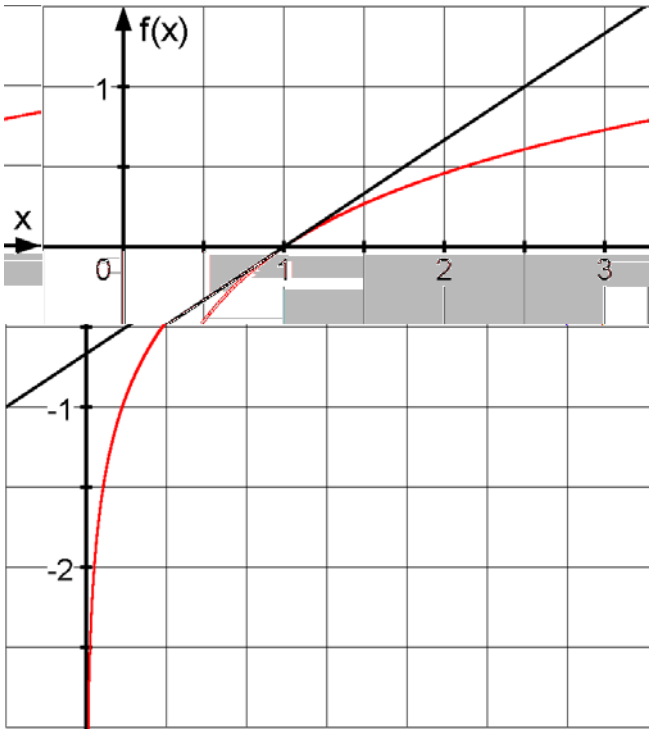
$$\underline{R\left(0 \middle| -\frac{2}{3}\right)}$$

Flächeninhalt des Dreiecks PQR:

$$A_1 = \frac{\left(\frac{2}{3} + 1\right) \cdot 1}{2}$$

$$\underline{A_1 = \frac{5}{6}FE}$$

Flächeninhalt zwischen t, $\bar{G}_0$ und y-Achse:



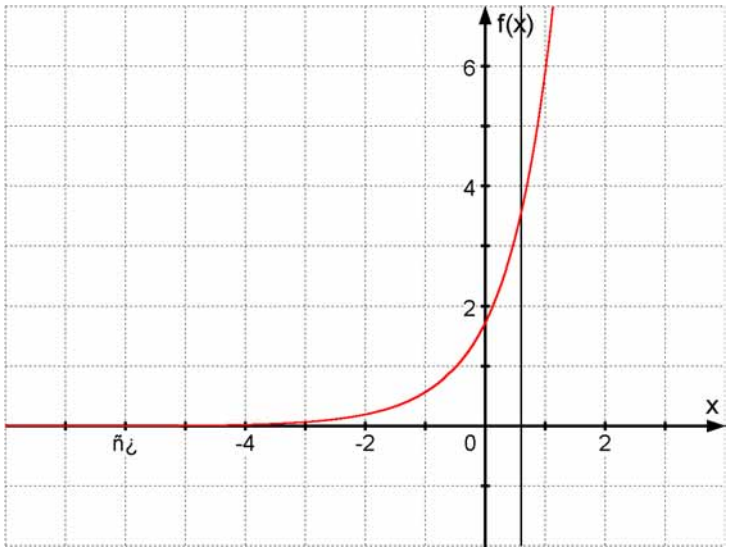

$$A_2 = \left| \lim_{u \to 0} \int_u^1 \left( \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\ln x \right) dx \right|$$

$$A_2 = \left| \lim_{u \to 0} \left[ \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}x \cdot (\ln x - 1) \right]_u^1 \right|$$

$$A_2 = \left| \lim_{u \to 0} \left[ \left( \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) - \left( \frac{u^2}{3} - \frac{2}{3}u - \frac{2}{3}u \cdot (\ln u - 1) \right) \right] \right|$$

$$A_2 = \frac{1}{3}\text{FE} \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{2{,}5}}$$

3.2.5 $f_2(x) = e^x \cdot \sqrt{2 + e^x}$




$$A(b) = \lim_{u \to -\infty} \int_u^b \left( e^x \cdot \sqrt{2 + e^x} \right) dx$$

Zunächst wird mittels Integration durch Substitution das unbestimmte Integral berechnet:

$$\int e^x \cdot \sqrt{2 + e^x}\, dx = \int \frac{e^x \cdot \sqrt{z}}{e^x} dz$$

$$= \int z^{\frac{1}{2}} dz \qquad z = 2 + e^x$$

$$= \frac{2}{3} \cdot z^{\frac{3}{2}} \qquad \frac{dz}{dx} = e^x$$

$$dx = \frac{1}{e^x} dz$$

$$\underline{\int e^x \cdot \sqrt{2 + e^x}\, dx = \frac{2}{3} \cdot \left(2 + e^x\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$A(b) = \lim_{u \to -\infty} \left[ \frac{2}{3} \cdot \left(2 + e^x\right)^{\frac{3}{2}} \right]_u^b$$

$$A(b) = \lim_{u \to -\infty} \left[ \frac{2}{3} \cdot \left(2 + e^b\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot \left(2 + e^u\right)^{\frac{3}{2}} \right]$$

$$A(b) = \frac{2}{3} \cdot \left(2 + e^b\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot 2^{\frac{3}{2}} \qquad \lim_{u \to -\infty} e^u = 0$$

$$\underline{A(b) = \frac{2 \cdot \left(2 + e^b\right)^{\frac{3}{2}} - 4 \cdot \sqrt{2}}{3}}$$

Fläche bis zur y – Achse:

$$A(0) = \frac{2 \cdot (2+1)^{\frac{3}{2}} - 4 \cdot \sqrt{2}}{3}$$

$$\underline{A(0) = \frac{6 \cdot \sqrt{3} - 4 \cdot \sqrt{2}}{3} \approx 1{,}578}$$

Für welches b halbiert die y-Achse die beschriebene Fläche?

$$2 \cdot A(0) = A(b)$$

$$\frac{2 \cdot \left(6 \cdot \sqrt{3} - 4 \cdot \sqrt{2}\right)}{3} = \frac{2 \cdot \left(2 + e^b\right)^{\frac{3}{2}} - 4 \cdot \sqrt{2}}{3}$$

$$12 \cdot \sqrt{3} - 8 \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \left(2 + e^b\right)^{\frac{3}{2}} - 4 \cdot \sqrt{2}$$

$$6 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{2} = \left(2 + e^b\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\left(6 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{2}\right)^{\frac{2}{3}} = 2 + e^b$$

$$3{,}8533 - 2 = e^b$$

$$b = \ln 1{,}8533$$

$$\underline{\underline{b \approx 0{,}167}}$$

3.2.6

$$V = \pi \cdot \lim_{u \to -\infty} \int_u^0 \left(e^x \cdot \sqrt{k + e^x}\right)^2 dx$$

$$V = \pi \cdot \lim_{u \to -\infty} \int_u^0 e^{2x} \cdot \left(k + e^x\right) dx$$

$$V = \pi \cdot \lim_{u \to -\infty} \int_u^0 \left(k \cdot e^{2x} + e^{3x}\right) dx$$

$$V = \pi \cdot \lim_{u \to -\infty} \left[ \frac{k}{2} \cdot e^{2x} + \frac{1}{3} e^{3x} \right]_u^0$$

$$V = \pi \cdot \lim_{u \to -\infty} \left[ \left( \frac{k}{2} e^0 + \frac{1}{3} e^0 \right) - \left( \frac{k}{2} e^{2u} + \frac{1}{3} e^{3u} \right) \right]$$

$$\underline{V = \pi \cdot \left( \frac{k}{2} + \frac{1}{3} \right) VE}$$

$$\pi \cdot \left( \frac{k}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi$$

$$\frac{k}{2} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\underline{\underline{k = 2}}$$

$G_2$ erzeugt bei Rotation um die x-Achse den beschriebenen Rotationskörper.

***Bewertungsvorschlag***

| | **Geforderte Leistung** | **BE** | **AB** |
|---|---|---|---|
| 3.2.1 | in das Koordinatensystem zeichnen | 2 | I |

| | **Geforderte Leistung** | **BE** | **AB** |
|---|---|---|---|
| | Wertebereich bestimmen | 1 | I |
| | Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse | 1 | I |
| 3.2.2 | $f_k'(x)$ bilden | 2 | I |
| | x berechnen und begründet ausschließen | 2 | II |
| 3.2.3 | Bestimmen des Tangentenanstiegs | 1 | I |
| | Bestimmen einer Normalengleichung | 2 | I |
| 3.2.4 | Gleichung der Umkehrfunktion zu f aufstellen | 3 | II |
| | P, Q und R angeben | 1 | I |
| | Gleichung der Tangente t aufstellen | 2 | II |
| | Flächeninhalt des Dreiecks PQR berechnen | 1 | I |
| | Berechnung der zweiten Fläche und Nachweis | 3 | II |
| 3.2.5 | Ansatz und $\int e^x \cdot \sqrt{2+e^x}\,dx$ bestimmen | 2 | II |
| | $A(b)$ berechnen | 2 | III |
| | b berechnen | 2 | III |
| 3.2.6 | Ansatz und Volumenbestimmung des Körpers in Abhängigkeit von k | | |
| | k berechnen | 3 | II |
| | **Summe** | **30** | |

### 1.3.7 Aufgabe 3.3 (Analytische Geometrie/Lineare Algebra)

Gegeben ist eine Schar von Dreiecken mit den Eckpunkten $A(12|1|4), B(4|5|-4)$ und $C_k(k|4k-5|k+4)$, $k \in R$.

3.3.1 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $ABC_2$.

3.3.2 Geben Sie eine Parametergleichung der Ebenenschar $E_{ABC_k}$ an, die durch die Punkte A, B und $C_k$ bestimmt wird. Ermitteln Sie k so, dass $E_{ABC_k}$ die Gleichung $-x+8y+5z-16=0$ hat.

Stellen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene $E_{ABC_2}$ auf. Berechnen Sie das Volumen der dreiseitigen Pyramide $ABC_2C_3$.

3.3.3 Zeigen Sie, dass der Punkt $M(5|0|1{,}5)$ Mittelpunkt der Umkugel K der dreiseitigen Pyramide $ABC_{2,5}C_0$ ist. Ermitteln Sie eine Gleichung in Koordinatenform derjenigen Tangentialebene T, die die Kugel K in A berührt.

3.3.4 Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{C_0C_2}$ sei gleichzeitig der Mittelpunkt einer Schar von Kugeln $K_r$ mit dem Radius r.

Geben Sie eine Gleichung der Kugelschar an.

Bestimmen Sie die Kugel der Schar, die die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 10z - 9 = 0$ hat.

Die Ebene $E_{ABC_4}$ sei Tangentialebene an eine Kugel der Schar. Berechnen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes.

3.3.5 Ermitteln Sie eine Gleichung der Kugel mit dem kleinsten Radius, die die Geraden $g_{AB}$ und $g_{C_0C_1}$ berührt.

***Lösungsvorschlag***

3.3.1 Flächeninhalt des Dreiecks $ABC_2$: $A(12|1|4)$, $B(4|5|-4)$, $C_2(2|3|6)$

$$A = \frac{1}{2}\left|\left(\overrightarrow{AB}\right)\times\left(\overrightarrow{AC}\right)\right| \qquad A = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}24\\96\\24\end{pmatrix}\right|$$

$$A = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-8\\4\\-8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-10\\2\\2\end{pmatrix}\right| \qquad A = \frac{1}{2}\sqrt{10368} = 36\cdot\sqrt{2} \approx \underline{50{,}91\,FE}$$

3.3.2

$$E_{ABC_k}: \vec{x} = \begin{pmatrix}12\\1\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-8\\4\\-8\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}k-12\\4k-6\\k\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{E_k} = \begin{pmatrix}4k-(-8)\cdot(4k-6)\\-8\cdot(k-12)-(-8)\cdot k\\-8\cdot(4k-6)-4\cdot(k-12)\end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_{E_k} = \begin{pmatrix}36k-48\\96\\-36k+96\end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix}3k-4\\8\\-3k+8\end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor der gegebenen Ebene ist: $\vec{n} = \begin{pmatrix}-1\\8\\5\end{pmatrix}$.

Aus $\begin{pmatrix}3k-4\\8\\-3k+8\end{pmatrix} = t\cdot\begin{pmatrix}-1\\8\\5\end{pmatrix} \Rightarrow t = 1 \wedge \underline{k = 1}$

Die Ebene $E_1$ hat die Gleichung $-x + 8y + 5z - 16 = 0$.

Falls der allgemeine Teil nicht bewältigt wurde, kann $E_2$ so bestimmt werden:

$A(12|1|4)$, $B(4|5|-4)$, $C_2(2|3|6)$

$$E_{ABC_2}: \vec{x} = \begin{pmatrix}12\\1\\4\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}-8\\4\\-8\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}-10\\2\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix}2\\8\\2\end{pmatrix}$$

$E_{ABC_2}: 2x + 8y + 2z - 40 = 0$

$E_{ABC_2}: x + 4y + z - 20 = 0$

Volumen der dreiseitigen Pyramide $ABC_2C_3$:

$C_3(3|7|7)$

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC_2}\right) \cdot \overrightarrow{AC_3}\right|$$

$$V = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} -8 & -10 & -9 \\ 4 & 2 & 6 \\ -8 & 2 & 3 \end{matrix}\right\|$$

$$V = \frac{1}{6}\left|-48 + 480 - 72 - 144 + 96 + 120\right|$$

$$V = 72\,VE$$

3.3.3 $A(12|1|4)$, $B(4|5|-4)$, $C_{2,5}(2{,}5|5|6{,}5)$, $C_0(0|-5|4)$

M als gegeben annehmen und mit Hilfe von A den Radius bestimmen:

$$\left[\vec{x}_A - \vec{x}_M\right]^2 = r^2$$

$$\left[\begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1.5 \end{pmatrix}\right]^2 = r^2$$

$$r^2 = 56{,}25$$

$$r = 7{,}5$$

$$\left[\vec{x}_B - \vec{x}_M\right]^2 = 56{,}25$$

$$\left[\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}\right]^2 = 56{,}25$$

$$56{,}25 = 56{,}25$$

$$\left[\vec{x}_{C_{2,5}} - \vec{x}_M\right]^2 = 56{,}25$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 5 \\ 6{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}\right]^2 = 56{,}25$$

$$56{,}25 = 56{,}25$$

$$\left[\vec{x}_{C_0} - \vec{x}_M\right]^2 = 56{,}25$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1.5 \end{pmatrix}\right]^2 = 56{,}25$$

$$56{,}25 = 56{,}25$$

Alle vier Punkte der Pyramide liegen auf der Kugel mit $M(5|0|1{,}5)$

Tangentialebene:

Eine Gerade durch M und A hat den Richtungsvektor: $\begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \vec{n}_T$

Dieser ist ein Normalenvektor der Tangentialebene T.

$$T: \left[\vec{x} - \vec{x}_A\right] \cdot \vec{n}_T = 0$$

$$T: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2.5 \end{pmatrix} = 0$$

$$\underline{T: 7x + y + 2{,}5z - 95 = 0}$$

3.3.4 $C_0(0|-5|4),\ C_2(2|3|6) \Rightarrow M_{C_0C_2}(1|-1|5)$

$$K_r: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right]^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 10z - 9 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 2y + 1 - 1 + z^2 - 10z + 25 - 25 - 9 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 36 \Rightarrow r = 6$$

$K_6$ hat die gegebene Gleichung.

Berechnung der Koordinaten des Berührpunktes P der Tangentialebene $E_{ABC_4}$ an $K_0$ 00011 Tc0

2
t 2
1 ABC4 [ ( ) $\vec{E}_{ABC_4}$ $\vec{E}_{ABC_4}$

Für die Gerade durch den Mittelpunkt M der Kugel und den Berührpunkt P gilt:

0 = ( − ) + ABC4 · ( − ) · [ ( − ) =

$g_M$ , als auch in der Ebene $E_{A\ _4B\ C}$

2
0
2
1

$$-22 - 4 = 1 + 4t + 4 + 4t + 4t = 0$$

$$t = 3 \Rightarrow \underline{P(7|5|2)} = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \end{pmatrix}$$

3.3.5 A B $\vec{r}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ \end{pmatrix}$ $C_0C_1$ $\vec{}$

Berechnung des Abstands der beiden windschiefen Geraden und Ermittlung der Kugelgleichung:

$$\text{I} \quad \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12+v+8u \\ -6+4v-4u \\ v+8u \end{pmatrix} = 0 \; ; \; \text{II} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12+v+8u \\ -6+4v-4u \\ v+8u \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{I} \quad 96-8v-64u-24+16v-16u-8v-64u=0$$
$$-144u=-72$$
$$u=\frac{1}{2} \Rightarrow F_1(8|3|0)$$

$$\text{II} \quad -12+v+8u-24+16v-16u+v+8u=0$$
$$18v=36$$
$$v=2 \Rightarrow F_2(2|3|6)$$

$$\overrightarrow{OM_{Ku}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OF_1}+\overrightarrow{OF_2}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad r_{Ku} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{F_1F_2}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{72} = 3\cdot\sqrt{2}$$

Kugelgleichung: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right]^2 = 18$

***Bewertungsvorschlag***

| | **Geforderte Leistung** | **BE** | **AB** |
|---|---|---|---|
| 3.3.1 | Flächeninhalt des Dreiecks $ABC_2$ berechnen | 3 | I |
| 3.3.2 | Parametergleichung für $E_k$ aufstellen | 1 | I |
| | k zu vorgegebener Koordinatengleichung bestimmen | 3 | II |
| | Koordinatengleichung von $E_{ABC_2}$ aufstellen | 3 | I |
| | Volumen der Pyramide $ABC_2C_3$ berechnen | 3 | I |
| 3.3.3 | Nachweis, dass Punkt M Mittelpunkt der Umkugel ist | 2 | II |
| | Gleichung der Tangentialebene durch A bestimmen | 3 | II |
| 3.3.4 | Gleichung der Kugelschar aufstellen | 2 | II |
| | Kugel konkret bestimmen (r = 6) | 2 | II |
| | Gleichung für $E_{ABC_4}$ aufstellen | 1 | I |
| | Berührpunkt ermitteln | 3 | II |
| 3.3.5 | Berechnung des Abstands der Geraden | 3 | III |
| | Kugelgleichung angeben | 1 | III |
| | **Summe** | **30** | |

# 2 Korrektur- und Bewertungshinweise

Die schriftliche Prüfungsarbeit wird korrigiert und beurteilt. Die Beurteilung umfasst das Gutachten sowie die Bewertung mit einer Note, der gegebenenfalls eine Tendenz hinzuzufügen ist.

Die Bewertung der Abiturprüfungsklausur erfolgt nach fachlichen und pädagogischen Gesichtspunkten auf der Grundlage der im Erwartungshorizont für jede Aufgabe vorgegebenen Zuordnungstabelle der Bewertungseinheiten (BE). Es werden nur ganze Bewertungseinheiten erteilt. Für richtig vollzogene Teilschritte, in die falsche Zwischenergebnisse eingegangen sind, wird die vorgesehene BE-Anzahl erteilt; es sei denn, die Teilschritte haben sich durch die vorher begangenen Fehler wesentlich vereinfacht oder das Ergebnis ist nicht sinnvoll.

Der vorgeschlagene Erwartungshorizont ist als Orientierung zu verstehen. Für gleichwertige Leistungen ist die Verteilung der BE sinngemäß vorzunehmen.

Die pro Teilaufgabe erreichbare BE-Anzahl (Angabe in der Tabelle des Erwartungshorizonts zu jeder Aufgabe und auf dem Aufgabenblatt für die Schüler) ist verbindlich.

Die Bewertung der Prüfungsarbeit muss sich durch Offenlegung des Bewertungsmaßstabes und der Bewertungskriterien, Randbemerkungen und Korrekturhinweise ausreichend nachvollziehen lassen.

Es empfiehlt sich, beim Schreiben des Endgutachtens die für die Lehrkraft vorgegebenen Tabellen der Zuordnungen der BE zu den einzelnen Teilaufgaben zu nutzen und zu kennzeichnen, welche BE der Schüler nicht erreicht hat. Der Abzug der BE ist zu begründen, sofern die Ursache dafür nicht schon aus den Randbemerkungen klar nachvollziehbar ist.

Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit in der deutschen Sprache und gegen die äußere Form sind bei der Korrektur angemessen zu berücksichtigen. Es ist zu beachten, dass ab 01.08.2003 die Neuregelung der deutschen Rechtschreibung gilt. In der Übergangszeit werden bei der Korrektur jene fehlerhaften Schreibweisen, die nach der alten Rechtschreibung korrekt waren, angestrichen, aber nicht als Fehler gezählt. Zu Anforderungen an die äußere Form gehören z. B. ein übersichtlich gegliederter und durchschaubarer Lösungsweg, die Hervorhebung der Ergebnisse, ein sauberes und ordentliches Schriftbild, saubere graphische Darstellungen, ordentliche Zeichnungen und Skizzen, ein Rand links und rechts auf den Lösungsblättern usw.

Bei gehäuften Verstößen kann die Gesamtnote um bis zu zwei (Noten)-Punkte gesenkt werden. Gehäufte Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit und gegen die äußere Form liegen dann vor, wenn die Mängel so zahlreich und gravierend sind, dass sie nicht dem Leistungsstand entsprechen, der im letzten Schulhalbjahr der Qualifikationsphase von einem Abiturienten erwartet werden kann (vgl. § 12 Abs. 7 GOSTV).

Entsprechend der Bewertungsvorschläge für diese **Beispiel**aufgaben werden für die Grundkursklausur maximal 75 BE und für Leistungskursklausur maximal 90 BE vergeben. Entsprechend den EPA Mathematik in der Fassung vom 24.05.2002 gelten folgende Bewertungsmaßstäbe. Die prozentualen Vorgaben beschreiben die verwendete Berechnungsgrundlage.

**Grundkursklausur: (erreichbar 75 BE)**

| Punkte | Note | ab ... BE | ab ... % |
|---|---|---|---|
| 15 | 1+ | 71 | 95 |
| 14 | 1 | 68 | 90 |
| 13 | 1- | 64 | 85 |
| 12 | 2+ | 60 | 80 |
| 11 | 2 | 56 | 75 |
| 10 | 2- | 53 | 70 |

| Punkte | Note | ab ... BE | ab ... % |
|---|---|---|---|
| 9 | 3+ | 49 | 65 |
| 8 | 3 | 45 | 60 |
| 7 | 3- | 41 | 55 |
| 6 | 4+ | 38 | 50 |
| 5 | 4 | 34 | 45 |
| 4 | 4- | 27 | 36 |
| 3 | 5+ | 20 | 27 |
| 2 | 5 | 14 | 18 |
| 1 | 5- | 7 | 9 |
| 0 | 6 | 0 | 0 |

**Leistungskursklausur: (erreichbar 90 BE)**

| Punkte | Note | ab ... BE | ab ... % |
|---|---|---|---|
| 15 | 1+ | 86 | 95 |
| 14 | 1 | 81 | 90 |
| 13 | 1- | 77 | 85 |
| 12 | 2+ | 72 | 80 |
| 11 | 2 | 68 | 75 |
| 10 | 2- | 63 | 70 |
| 9 | 3+ | 59 | 65 |
| 8 | 3 | 54 | 60 |
| 7 | 3- | 50 | 55 |
| 6 | 4+ | 45 | 50 |
| 5 | 4 | 41 | 45 |
| 4 | 4- | 32 | 36 |
| 3 | 5+ | 24 | 27 |
| 2 | 5 | 16 | 18 |
| 1 | 5- | 8 | 9 |
| 0 | 6 | 0 | 0 |

Die Erstkorrektur der schriftlichen Prüfungsarbeit erfolgt in der Regel durch die im letzten Schulhalbjahr der Qualifikationsphase regelmäßig unterrichtende Lehrkraft. Jede schriftliche Prüfungsarbeit ist von einer Zweitkorrektorin oder einem Zweitkorrektor, die oder der von der oder dem Prüfungsvorsitzenden bestimmt wird, zu korrigieren und zu beurteilen. Die Festlegung der Bewertung erfolgt durch die Prüfungsvorsitzende oder den Prüfungsvorsitzenden. Bei Bewertungsabweichungen von weniger als vier Punkten (gemeint sind hier immer die *Punkte*, die den Noten zugeordnet werden, also z.B. Note 2 11 Punkte) zwischen Erst- und Zweitkorrektur erfolgt die Festlegung der Note durch die Prüfungsvorsitzende oder den Prüfungsvorsitzenden. Bei Bewertungsabweichungen zwischen Erst- und Zweitgutachten um einen Punkt ist in der Regel die höhere Punktzahl maßgebend. Bei Bewertungsabweichungen um zwei Punkte wird in der Regel die Durchschnittspunktzahl gebildet, bei Abweichungen um drei Punkte wird die Durchschnittspunktzahl in der Regel aufgerundet. Bei Bewertungsabweichungen von vier oder mehr Punkten zwischen Erst- und Zweitgutachten wird durch die Prüfungsvorsitzende oder den Prüfungsvorsitzenden ein Drittgutachten veranlasst. Die mit dem Drittgutachten beauftragte Lehrkraft unterbreitet der oder dem Prüfungsvorsitzenden auf der Basis der Erst- und Zweitgutachten einen begründeten Notenvorschlag, auf deren Grundlage der Prüfungsausschuss entscheidet.

Grundsätzlich ist erstmalig mit der Abiturprüfung 2005 für Grund- und Leistungskurse gleichermaßen die folgenden Bewertungstabelle anzuwenden:

| **Punkte** | **Note** | **untere Grenze in %** | **obere Grenze in %** |
|---|---|---|---|
| 15 | 1+ | 95 | 100 |
| 14 | 1 | 90 | 94 |
| 13 | 1- | 85 | 89 |
| 12 | 2+ | 80 | 84 |
| 11 | 2 | 75 | 79 |
| 10 | 2- | 70 | 74 |
| 9 | 3+ | 65 | 69 |
| 8 | 3 | 60 | 64 |
| 7 | 3- | 55 | 59 |
| 6 | 4+ | 50 | 54 |
| 5 | 4 | 45 | 49 |
| 4 | 4- | 36 | 44 |
| 3 | 5+ | 27 | 35 |
| 2 | 5 | 18 | 26 |
| 1 | 5- | 9 | 17 |
| 0 | 6 | 0 | 8 |

# 3 Anlage: Beispiele für anwendungsorientierte Aufgaben

## 3.1 Leistungskurs

### 3.1.1 Kettenlinien

Für ein zwischen zwei Punkten ausgespanntes Seil, das nur seinem Eigengewicht als Belastung unterworfen ist, und das keine Biegefestigkeit aufweist, gilt die Gleichung $f(x) = \frac{1}{2a}\left(e^{ax+b} + e^{-(ax+b)}\right) + c$ .

Dabei ist $a = \frac{q}{H}$, q ist das Seilgewicht je Längeneinheit und H die Horizontalkomponente der Seilzugkraft. Die Parameter $b \in R$ und $c \in R$ ergeben sich jeweils durch die Koordinaten der Aufhängepunkte.

Kurven mit der Gleichung f(x) nennt man Kettenlinien.

a) Begründen Sie, dass die beiden Aufhängepunkte symmetrisch zur y-Achse sind, wenn $b = 0$ ist.
Es sei jetzt auch $c = 0$ und $a = 1$. Berechnen Sie die Koordinaten des lokalen Extrempunktes des Graphen dieser Funktion.

Zeichnen Sie den Graphen mindestens im Intervall [-ln3|ln3], 1LE = 2cm.

An den Stellen –ln3 und ln3 befinden sich die Aufhängepunkte des Seils jeweils an einer zur x-Achse senkrechten Wand.

Berechnen Sie die Größe des Winkels, den das Seil mit der Wand einschließt.

b) Berechnen Sie in Abhängigkeit von a, b und c die Koordinaten des Punktes, in dem das Seil am weitesten durchhängt.

c) Galilei war der Meinung, dass die Graphen der Kettenlinien Parabeln seien. Die Graphen quadratischer Funktionen können die Kettenlinien allerdings teilweise gut annähern.

Ermitteln Sie die Gleichung einer Parabel p, die die Kettenlinie mit $a = \frac{1}{2}$ und $b = c = 0$ im Intervall [-1|1] annähert.

Berechnen Sie für $x = \frac{1}{2}$ die Abweichung der beiden Funktionswerte.

Begründen Sie, dass mit wachsendem x die Abweichungen größer werden.

d) Ermitteln Sie die Funktionsgleichung einer Kettenlinie mit a=1, deren Aufhängepunkte die Koordinaten $P_1(0\,|\,1)$ und $P_2(\ln 4\,|\,1)$ haben.

e) Die Funktion k : $k(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ heißt auch Kosinus hyperbolicus ($k(x) = \cosh x$), die Funktion s : $s(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ bezeichnet man als Sinus hyperbolicus ($s(x) = \sinh x$).

Zeigen Sie, dass jede Funktion eine Stammfunktion der jeweils anderen Funktion ist.

Zeigen Sie außerdem, dass analog zu den Winkelfunktionen gilt: $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$ .

***Lösungsvorschlag***

a) Für b=0 erhält man $f(x) = \frac{1}{2a}\left(e^{ax} + e^{-ax}\right) + c$. Wegen $f(-x) = \frac{1}{2a}\left(e^{-ax} + e^{ax}\right) + c = f(x)$ ist der gesamte Graph symmetrisch zur y-Achse.

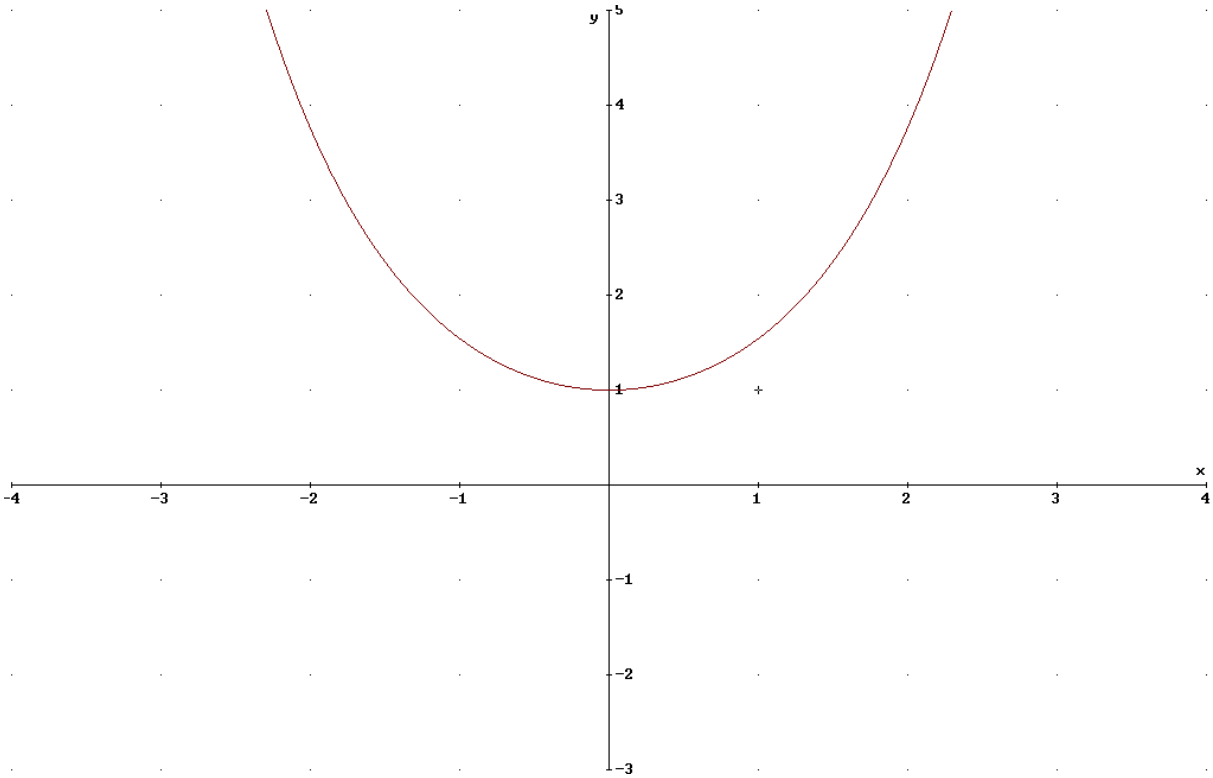
Koordinaten des Extrempunktes für a=1, b=c=0 :

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = 0 \Leftrightarrow e^{x} = e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

T(0 | 1)

Graph von f mit $f(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$:




$$f'(\ln 3) = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{4}{3}$$

Der Anstiegswinkel $\alpha$ der Tangente an der Stelle ln3 beträgt dann $\alpha = 53{,}13°$, der gesuchte Winkel $\varphi$ ist der Ergänzungswinkel zu 90°: $\varphi = 36{,}87°$.

b) $f'(x) = \frac{1}{2a}\left(ae^{ax+b} - ae^{-(ax+b)}\right)$

$$ae^{ax+b} - ae^{-(ax+b)} = 0 \Leftrightarrow e^{ax+b} = e^{-(ax+b)} \Leftrightarrow e^{2(ax+b)} = 1 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

(a>0 wegen $a = \frac{q}{H}$)

$$f\left(-\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2a}\left(e^{0} + e^{0}\right) + c$$

$= \frac{1}{a} + c$

$T\left(-\frac{b}{a} \mid \frac{1}{a} + c\right)$

(auf den Nachweis des Extremums kann wegen der Aufgabenstellung verzichtet werden)

c) $a = \frac{1}{2}, b = c = 0$ : $f(x) = e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}$, $f(1) = \frac{e+1}{\sqrt{e}}$

Gemeinsame Punkte der Graphen von f und p : $T(0 \mid 2)$ , $P\left(1 \mid \frac{e+1}{\sqrt{e}}\right)$

Parabelgleichung: $p(x) = a_2x^2 + a_0$ , mit $p(0) = 2$ gilt $a_0 = 2$,

zusammen mit $p(1) = \frac{e+1}{\sqrt{e}}$ gilt $\frac{e+1}{\sqrt{e}} = a_2 + 2 \Leftrightarrow a_2 = \frac{\left(\sqrt{e}-1\right)^2}{\sqrt{e}}$ , also

$p(x) = \frac{\left(\sqrt{e}-1\right)^2}{\sqrt{e}} x^2 + 2$

Vergleich der Funktionswerte für $x = \frac{1}{2}$:

$p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\sqrt{e}-1\right)^2}{4\sqrt{e}} + 2 \approx 2.0638$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{4}} + e^{-\frac{1}{4}} \approx 2{,}0628$

Die gerundeten Funktionswerte weichen um 0,001 voneinander ab.

Mit größer werdendem x wachsen die Funktionswerte beider Funktionen unbeschränkt, jedoch die der Exponentialfunktion weitaus stärker als die der quadratischen Funktion.

d) a=1 : $f(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x+b} + e^{-(x+b)}\right) + c$

Mit den Koordinaten von $P_1$ und $P_2$ gilt :

(1) $1 = \frac{1}{2}\left(e^{b} + e^{-b}\right) + c$

(2) $1 = \frac{1}{2}\left(e^{\ln 4 + b} + e^{-(\ln 4 + b)}\right) + c$

(1)-(2) $0 = \frac{1}{2}\left(e^{b} + e^{-b}\right) - \frac{1}{2}\left(4e^{b} + \frac{1}{4e^{b}}\right)$

$$\Leftrightarrow 0 = -\frac{3}{2}e^{b} + \frac{3}{8e^{b}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}e^{2b} = \frac{3}{8}$$

$$\Leftrightarrow e^{2b} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow e^{b} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow b = \ln\frac{1}{2}$$

Aus (1) folgt $c = -\frac{1}{4}$ und $f(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x+\ln\frac{1}{2}} + e^{-\left(x+\ln\frac{1}{2}\right)}\right) - \frac{1}{4}$

e) Wegen $\int \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}dx = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} + d$ ist mit d=0 s eine Stammfunktion zu k. Analog ist wegen $\int \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}dx = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} + d$ auch k Stammfunktion zu s.

$$\sinh 2x = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}$$

$$= \frac{\left(e^{x}\right)^2 - \left(e^{-x}\right)^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)\left(e^{x}+e^{-x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\sinh x\right)\left(2\cosh x\right)$$

$$= 2\sinh x\cosh x$$

***Bewertungsvorschlag***

| | **Geforderte Leistung** | **BE** | **AB** |
|---|---|---|---|
| a) | Begründung der Symmetrie der Funktionsgraphen für den Fall b=0 | 2 | I |
| | Koordinaten des lokalen Extrempunktes | 3 | I |
| | Graph | 1 | I |
| | Anstiegswinkel der Tangente | 2 | I |
| | Winkel zwischen der Tangente und der Senkrechten | 1 | I o.II |
| b) | 1. Ableitung | 1 | I o.II |
| | Lösen der Exponentialgleichung | 2 | II |
| | Koordinaten von T | 1 | II |
| c) | Punkte T und P | 2 | II |
| | Berechnung der Koeffizienten $a_2$ und $a_0$ | 2 | II |
| | Funktionswerte und Vergleich | 2 | II |

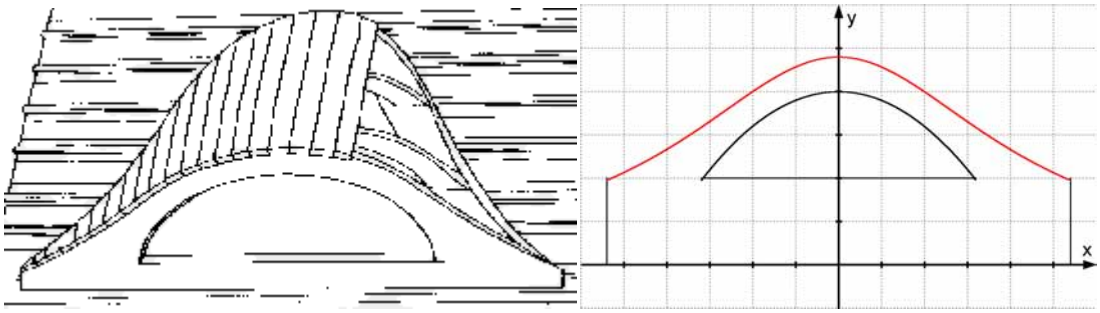
| | Geforderte Leistung | BE | AB |
|---|---|---|---|
| | Begründung für die größer werdenden Abweichungen | 1 | I o. II |
| d) | Gleichungssystem aus zwei Exponentialgleichungen<br>Lösen des Gleichungssystems und Funktionsgleichung | 1<br>4 | II<br>II |
| e) | Nachweis, dass k und s wechselseitig Stammfunktionen sind<br>Beweis der Doppelwinkelformel | 2<br>3 | I<br>III |
| | **Summe:** | **30** | |

### 3.1.2 Fledermausgaube (Leistungskurs)

Der Querschnitt der Dachform eines Dachausbaus, eine sogenannte Fledermausgaube, entspricht annähernd einem Graphen $G_k$ der Funktionenschar $f_k$ mit $f_k(x) = \frac{12}{x^2 + k}$, $k \in R^+$.

Das parabelförmige Fenster hat eine Brüstungshöhe von 1 m. Der höchste Punkt des Fensters liegt genau 2 m über dem Fußboden des Dachausbaus.

Im Koordinatensystem ist die x-Achse auf Fußbodenhöhe.




a) Wie muss k gewählt werden, damit der höchste Punkt der Gaube (Wandstärken werden vernachlässigt) 2,40 m über dem Fußboden liegt?

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Parabelbahn des Fensterbogens, wenn es $\sqrt{10}\,\text{m} \approx 3{,}16\,\text{m}$ breit ist.
Berechnen Sie, wie viel Quadratmeter Glas man bei einfacher Verglasung für das Fenster benötigt.

**Für die folgenden Aufgaben nehmen wir an, dass die Dachform der Gaube $G_5$ entspricht.**

c) Ist es günstig in der Höhe, in der die Dachkurve der Gaube ihr Krümmungsverhalten ändert, eine Zwischendecke einzuziehen? Begründen Sie Ihre Aussage durch geeignete Berechnungen und weisen Sie vor Ihrem Urteil sicherheitshalber nach, dass sich in den von Ihnen berechneten Punkten das Krümmungsverhalten der Dachkurve tatsächlich ändert.

d) Vor dem Einbau des parabelförmigen Fensters wurde kurzzeitig erwogen, ein symmetrisches dreieckiges Fenster mit maximalem Flächeninhalt so einzubauen, dass ein Eckpunkt des Fensters direkt am Fußboden (Koordinatenursprung), die beiden anderen unmittelbar unter dem Dach (also auf der Dachkurve) liegen. Der Bauherr verwarf jedoch diese ausgefallene Lösung. Untersuchen Sie, ob dieses dreieckige Fenster einen größeren Lichteinfall zugelassen hätte.

e) Die Fensterfront der Gaube soll neu mit Silikatputz versehen werden. Für die exakte Berechnung dieser Fassadenfläche mittels Integralrechnung benötigt man die Stammfunktion von $f_5$. Bestimmen Sie diese. [ Hinweis: $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + c$ ]

***Lösungsvorschlag***

zu a)

$$f_k(0) = \frac{12}{k} = 2{,}40$$
$$\Rightarrow \underline{k = 5}$$

zu b)

$$p(x) = a \cdot x^2 + 2$$

einsetzen von $P\left(\frac{\sqrt{10}}{2} \middle| 1\right)$:

$$1 = a \cdot \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 + 2$$
$$-1 = \frac{10}{4}a$$
$$\underline{a = -\frac{2}{5}}$$

$$p(x) = -\frac{2}{5}x^2 + 2$$

$$A_{Glas} = 2 \cdot \int_0^{\frac{\sqrt{10}}{2}} \left(-\frac{2}{5}x^2 + 2 - 1\right) dx$$
$$A_{Glas} = 2 \cdot \left[-\frac{2}{15}x^3 + x\right]_0^{\frac{\sqrt{10}}{2}}$$
$$A_{Glas} = \frac{2}{3}\sqrt{10}$$
$$\underline{A_{Glas} \approx 2{,}11\,m^2}$$

Man benötigt mindestens 2,11 Quadratmeter Glas für das parabelförmige Fenster.

zu c)

Für die gesuchte Höhe muss ein Wendepunkt von $G_5$ bestimmt werden:

$$f_5'(x) = \frac{0 \cdot (x^2+5) - 12 \cdot 2x}{(x^2+5)^2}$$

$$f_5'(x) = \frac{-24x}{(x^2+5)^2}$$

$$f_5''(x) = \frac{-24 \cdot (x^2+5)^2 - [(-24x) \cdot 2 \cdot (x^2+5) \cdot 2x]}{(x^2+5)^4}$$

$$f_5''(x) = \frac{72x^2 - 120}{(x^2+5)^3}$$

$$\frac{72x^2 - 120}{(x^2+5)^3} = 0$$

$$x_w = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$$

Nachweis der Wendestellen:

$$f'''(x) = \frac{144x \cdot (x^2+5)^3 - (72x^2 - 120) \cdot 3 \cdot (x^2+5)^2 \cdot 2x}{(x^2+5)^6}$$

$$f'''(x) = \frac{-288x^3 + 1440x}{(x^2+5)^4}$$

$$f'''\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) \approx 0{,}627 \neq 0$$

$$f'''\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right) \approx -0{,}627 \neq 0$$

Berechnung der Deckenhöhe:

$$f_5\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = \frac{12}{\left(\frac{5}{3}+5\right)}$$

$$\underline{f_5\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = 1{,}80}$$

Die Deckenhöhe von 1,80m ist zu niedrig. Die Decke wäre 20cm tiefer als der höchste Punkt des Fensters.

zu d)

Ist $P(v|f(v))$, $v > 0$ ein weiterer Eckpunkt des dreieckigen Fensters, so gilt wegen der Symmetrie für die Fensterfläche:

$$A_W(v) = v \cdot f(v)$$

$$A_W(v) = \frac{v \cdot 12}{v^2 + 5}$$

$$A_W'(v) = \frac{12 \cdot (v^2 + 5) - 12v \cdot 2v}{(v^2 + 5)^2}$$

$$A_W'(v) = \frac{-12v^2 + 60}{(v^2 + 5)^2}$$

$$\frac{-12v^2 + 60}{(v^2 + 5)^2} = 0$$

$$\underline{v = \sqrt{5}}$$

$$A_W''(v) = \frac{-24v \cdot (v^2 + 5)^2 - (-12v^2 + 60) \cdot 2 \cdot (v^2 + 5) \cdot 2v}{(v^2 + 5)^4}$$

$$A_W''(v) = \frac{24v^3 - 360v}{(v^2 + 5)^3}$$

$A_W''(\sqrt{5}) < 0$, $A(\sqrt{5}) \approx 0{,}54$ / lokales Maximum

Untersuchung der Randwerte für v:

$A(0)$, ist praktisch nicht sinnvoll. Es würde kein Fenster entstehen.

Zweiter Randwert:

$$f_5(v) = 1$$

$$\frac{12}{v^2 + 5} = 1$$

$$v = \sqrt{7} \quad / \quad A(\sqrt{7}) = \sqrt{7} \approx 2{,}65$$

$$\underline{A(\sqrt{5}) = \frac{6}{5} \cdot \sqrt{5} \approx 2{,}68}$$

2,65 < 2,68, d. h. das lokale Maximum ist auch ein globales Maximum.

Das dreieckige Fenster wäre um 0,57 $m^2$ größer gewesen als das parabelförmige Fenster, hätte also mehr Licht eingelassen.

Zu e) $\int \frac{12}{x^2 + 5}\,dx = \frac{12}{5} \cdot \int \frac{1}{\frac{x^2}{5} + 1}\,dx$

Substitution:

$$z^2 = \frac{x^2}{5}$$

$$z = \frac{x}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$dx = \sqrt{5}\,dz$$

$$\int \frac{12}{x^2+5}dx = \frac{12\cdot\sqrt{5}}{5}\cdot\int\frac{1}{z^2+1}dz$$

$$= \frac{12\cdot\sqrt{5}}{5}\cdot\arctan(z)+c$$

$$\underline{\int \frac{12}{x^2+5}dx = \frac{12\cdot\sqrt{5}}{5}\cdot\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+c}$$

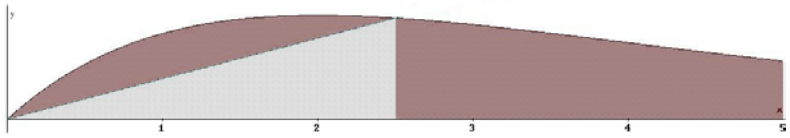
***Bewertungsvorschlag***

| | **Geforderte Leistung** | **BE** | **AB** |
|---|---|---|---|
| a) | Berechnung von k | 2 | I |
| b) | Bestimmen der Parabelgleichung | 3 | II |
| | Berechnen der Fensterfläche | 3 | II |
| c) | Erste beide Ableitungen bestimmen | 4 | I |
| | Wendestelle und Höhe berechnen | 2 | I |
| | Nachweis der Wendestelle | 2 | I |
| | Beurteilung des Deckenhöhe | 1 | I |
| d) | Flächeninhaltsfunktion aufstellen | 2 | II |
| | Extremwert bestimmen | 3 | II |
| | Nachweis des lokalen und globalen Maximums | 4 | II |
| | Berechnen der Fensterfläche und Vergleich mit Parabelfenstergröße | 1 | I |
| e) | Bestimmen der Stammfunktion | 3 | III |
| | **Summe** | **30** | |

## 3.2 Grundkurs

### 3.2.1 Blechabfälle

In einer Feinmechanikerwerkstatt entstehen bei der Herstellung von Blechteilen für Apparaturen u.a. solche Abfälle, deren krummlinige Begrenzung durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$ für $0 \le x \le 5,\ x \in R$ beschrieben werden kann (vgl. Abb.).




a) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f auf Schnittpunkte mit der x-Achse und auf Extrempunkte.
Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $-1 \le x \le 7$.

Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = -2e^{-\frac{1}{2}x} \cdot (x+2)$ eine Stammfunktion von f ist.

b) Aus den Blechabfällen sollen inhaltgrößte, rechtwinklige Dreieckstafeln zur weiteren Verwendung ausgeschnitten werden (vgl. Abb.).
ba) Berechnen Sie dafür die Längen der Katheten einer solchen Dreieckstafel.

bb) Ermitteln Sie den prozentualen Anteil des dabei entstehenden endgültigen Blechabfalls.

c) Ein Mitarbeiter der Feinmechanikerwerkstatt formuliert folgende Vermutung:
Der ursprüngliche Blechabfall mit dem inhaltgrößten, rechtwinkligen Dreieck rotiert um die x-Achse. Dadurch entsteht ein Rotationskörper mit eingelagertem Kreiskegel. Dieser Kreiskegel ist dann der inhaltgrößte, der sich dem Rotationskörper einbeschreiben lässt.

Untersuchen Sie, ob diese Vermutung zutrifft.

Berechnen Sie die maximale Maßzahl des Rauminhaltes.

***Lösungsvorschlag***

zu a)

$f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$, also $S_x(0 \mid 0)$

Extrempunkte:

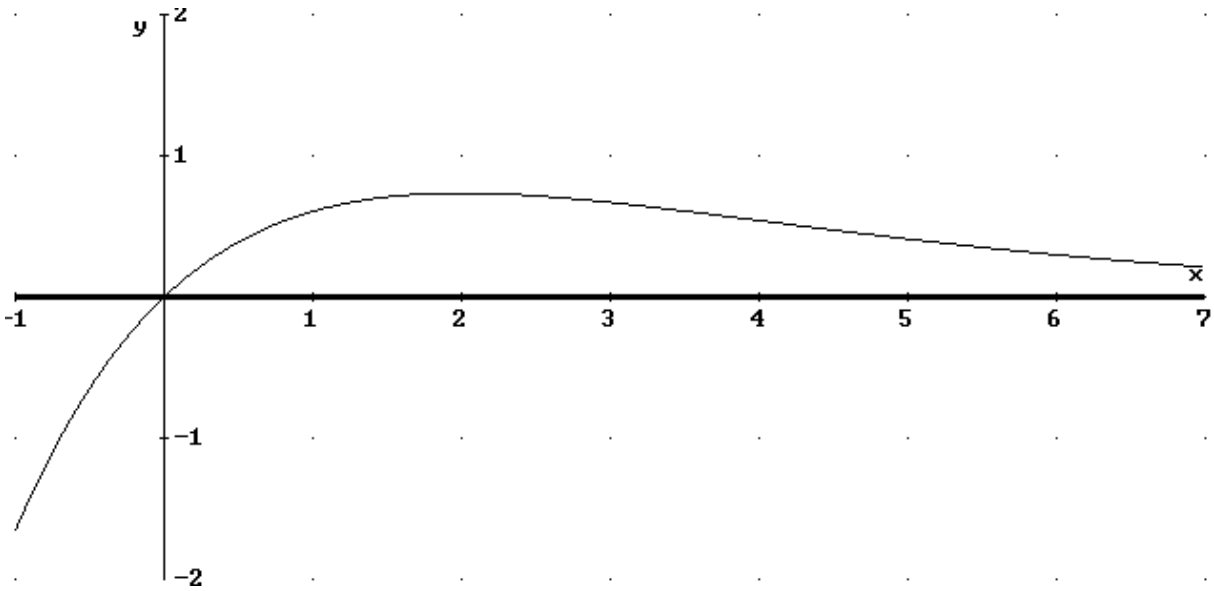
$f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x}(1 - \frac{1}{2}x), f'(x_E) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}x = 0 \Leftrightarrow x_E = 2$

$f''(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}(2 - \frac{1}{2}x)$

$f''(2) = -\frac{1}{2e} < 0$, Existenz eines lokalen Maximums, $H(2 \mid \frac{2}{e})$

Graph von f:

Berechnung weiterer Funktionswerte; unbedingt: $f(-1)$ und $f(7)$




Nachweis Stammfunktion:

zu zeigen: $F'(x) = f(x)$

$$F'(x) = -2e^{-\frac{1}{2}x} - 2(-\frac{1}{2}) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}(x+2) = e^{-\frac{1}{2}x}(-2+x+2) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = f(x)$$

zu ba)

Eckpunkte des Dreiecks:

$$P_1(0\,|\,0), P_2(u\,|\,0), P_3(u\,|\,u \cdot e^{-\frac{1}{2}u}) \text{ mit } 0 < u \le 5$$

Zielfunktion: $A(u) = \frac{1}{2}u^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}u}$ mit $0 < u \le 5$

Extremstellen:

$$A'(u) = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}u}(4u - u^2), A'(u_E) = 0 \Leftrightarrow 4u - u^2 = 0 \Leftrightarrow u_{E_1} = 0 \text{ entfällt, da } u > 0, u_{E_2} = 4$$

$$A''(u) = \frac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}u}(u^2 - 8u + 8)$$

$$A''(4) = -\frac{1}{e^2} < 0, \text{Existenz eines lokalen Maximums}$$

Wegen

$$(u \to 0 \Rightarrow A(u) \to 0), A(4) = \frac{8}{e^2} \approx 1{,}08 \text{ und } A(5) = \frac{25}{2e^{2,5}} \approx 1{,}03$$

liegt bei $u = 4$ das globale Maximum.

Länge der Katheten:

$$a = u = 4$$

$$b = f(4) = \frac{4}{e^2}$$

zu bb)

inhaltgrößtes, rechtwinkliges Dreieck: $A_1 = A(4) = \frac{8}{e^2} \approx 1{,}08$ (vgl. 2.1.)

ursprünglicher Blechabfall:

$A_2 = \int_0^5 f(x)dx = F(5) - F(0) = 4 - \frac{14}{e^{2,5}} \approx 2{,}85$ (Stammfunktion aus Teilaufgabe 1)

endgültiger Blechabfall:

$A_3 = A_2 - A_1 \approx 1{,}77$

prozentualer Anteil a: $a \approx 62{,}1\%$

zu c)

Kreiskegel: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

mit $h = u$ und $r = u \cdot e^{-\frac{1}{2}u}$ (vgl.1.2.) folgt für die Zielfunktion:

$V(u) = \frac{1}{3}\pi u^3 e^{-u}$ mit $0 < u \leq 5$

Extremstellen:

$V'(u) = \frac{1}{3}\pi e^{-u}(3u^2 - u^3), V'(u_E) = 0 \Leftrightarrow 3u^2 - u^3 = 0 \Leftrightarrow u_{E_1} = 0$, entfällt, da $u > 0$, $u_{E_2} = 3$

$V''(u) = \frac{1}{3}\pi e^{-u}(u^3 - 6u^2 + 6u)$

$V''(3) = -\frac{3\pi}{e^3} < 0$, Existenz eines lokalen Maximums

Wegen

$(u \to 0 \Rightarrow V(u) \to 0)$, $V(3) = \frac{9\pi}{e^3} \approx 1{,}41$ und $V(5) = \frac{125\pi}{3e^5} \approx 0{,}88$

liegt bei $u = 3$ das globale Maximum.

Die Vermutung trifft nicht zu; $V(3) = \frac{9\pi}{e^3}$.

***Bewertungsvorschlag***

| | **Geforderte Leistung** | **BE** | **AB** |
|---|---|---|---|
| a) | Koordinaten $S_x$ | 1 | I |
| | Koordinaten und Art der lokalen Extrempunkte | 4 | I |
| | Graph (Skizze) | 2 | I |
| | Nachweis $F'(x) = f(x)$ | 2 | II |
| ba) | Analyse, Zielfunktion A(u) | 2 | II |
| | Ableitungen | 2 | II |

| | **Geforderte Leistung** | **BE** | **AB** |
|---|---|---|---|
| | Koordinaten und Art der Extremstellen | 2 | II |
| | Länge der Katheten | 1 | II |
| bb) | Lösung bestimmtes Integral ( $A_2$ ) | 2 | I o. II |
| | Inhalt der Dreiecksfläche (vgl. ba) | 1 | II |
| | prozentualer Anteil | 1 | II |
| c) | Zielfunktion V(u) | 1 | III |
| | Ableitungen, Koordinaten und Art der Extremstellen | 3 | III |
| | Wertung der Vermutung, V(3) | 1 | III |
| | **Summe** | **50** | |

### 3.2.2 Seilbahn

Auf einem Plateau im Hochgebirge in 1000 Metern Höhe über NN befinden sich die Stationen einer Zahnradbahn und einer Seilbahn, die auf einen fast dreitausend Meter hohen Berg führen. In einem Koordinatensystem liegt dieses Plateau in der x-y-Ebene (1 Längeneinheit ist 100m). Die Station der Zahnradbahn liegt im Punkt Z(4|8|0), die der Seilbahn im Punkt S(6|9|0). Weiterhin befindet sich ein Droschkenstand, von welchem aus man in die Bergregion fahren kann, im Punkt D(2|9|0).

a) Die Kasse K für den Ticketverkauf der Bahnen liegt genau in der Mitte der Verbindungsstrecke beider Stationen. Eine Informationstafel T steht so, dass sie von den drei Punkten Z, S und D den gleichen Abstand hat.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte K und T.

b) Die Touristen können auf unterschiedliche Art auf den Berg gelangen. Am attraktivsten ist die Fahrt mit der Seilbahn. Mit ihr legt man einen Weg von 4450 Metern in nur 10 Minuten zurück.
Berechnen Sie die Koordinaten der Bergstation G, wenn sich die Seilbahn entlang der Geraden s mit $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 80 \\ -39 \end{pmatrix}$ bewegt.

Geben Sie die Höhe der Bergstation über NN sowie den überwundenen Höhenunterschied an.

Berechnen Sie die Größe des Winkels unter dem die Seilbahn ansteigt.

c) Die Endstation der Zahnradbahn liegt auf einer zum Ausgangsplateau parallelen Ebene in 2600 Metern Höhe über NN. Ein großflächiger nahezu ebener Berghang begrenzt diese Fläche teilweise. Entlang der Begrenzungslinie verläuft ein Weg. Auf dem Hang befindet sich im Punkt M(-12|-26|16) ein Markierungspunkt und in den Punkten $P(-15|-21|17)$ und Q(-10|-40|18) jeweils eine Skihütte.
Weisen Sie nach, dass der Weg entlang der Geraden w mit der Gleichung

$$w: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ -35 \\ 16 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

verläuft und berechnen Sie die Größe des Winkels, unter welchem der Hang gegenüber der Ebene ansteigt.

d) Während der Skisaison wird der Hang stets für die Skiläufer präpariert und gewartet. Um sich zu verständigen, sind die Helfer mit Sprechfunkgeräten ausgestattet.
Die Reichweite dieser Geräte beträgt 3 km. Ein Helfer steht im Punkt W(-26|-54|18).

Berechnen Sie die kürzeste Entfernung dieses Standpunktes vom Weg aus Aufgabenteil c) und untersuchen Sie, wie lang der Abschnitt des Weges ist, auf dem ein zweiter Helfer von W aus erreichbar ist.

***Lösungsvorschlag***

zu a)

K ist Mittelpunkt von $\overline{ZS}$: K (5|8,5|0)

T ist Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Dreiecks ZSD:

$$M_{\overline{SD}}(4\,|\,9\,|\,0),\quad \overrightarrow{SD}=\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}\quad \text{und}\quad M_{\overline{SZ}}(5\,|\,8{,}5\,|\,0),\quad \overrightarrow{ZS}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

Gleichungen der Mittelsenkrechten:

$$m_{\overline{SD}}:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\9\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\quad \text{und}\quad m_{\overline{SZ}}:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\8{,}5\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

Berechnung des Schnittpunktes:

Wegen s = 1 und r = 1,5 gilt T(4|10,5|0).

zu b)

Lösung z. B. durch Abstandsberechnung mithilfe des allgemeinen Geradenpunktes:

$P_S$ (6|9 + 80r|-39r), $\overline{SG}$ = 44,5 (Maßstab beachten)

$$\sqrt{0+(-80r)^2+(-39r)^2}=44{,}5$$

$$r=\pm 0{,}5 \quad\Rightarrow\quad G(6|-31|19{,}5)$$

Da die x-y-Ebene in 1000 m über NN angelegt ist gilt:

Die Bergstation liegt in einer Höhe von 2950 m.

Die Seilbahn überwindet einen Höhenunterschied von 1950 m.

Berechnung des Anstiegswinkels :

$$\sin\alpha=\frac{\left|\begin{pmatrix}0\\80\\-39\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{7921}}=-\left|\frac{39}{89}\right|,\quad \alpha\approx 26^\circ$$

zu c)

Gleichung der Hangebene:

$$E_H : \begin{pmatrix} -12 \\ -26 \\ 16 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor

$$\vec{n}_{E_H} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$E_H : 3x + y + 4z = 2$

Gleichung der Ebene in 2600m Höhe:

$E_{2600} : z = 16$

Ermittlung der Geradengleichung für die Wegführung:

$$\begin{aligned} 3x + y + 4z &= 2 \\ z &= 16 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad w : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -65 \\ 16 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Punktprobe: Der Punkt mit den Koordinaten (-9|-35|16) liegt für w = -10 auf der Geraden w.

Der Weg führt entlang der Geraden w.

Berechnung des Anstiegswinkels:

$$\cos\beta = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{26}} \quad , \quad \beta \approx 38{,}3° .$$

zu d)

Ermittlung des Abstands d(W;w):

Hilfsebene: H: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -26 \\ -54 \\ 18 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ , w in H $\Rightarrow$ s = 4 $\Rightarrow$ Fußpunkt: F(-5|-47|16)

d(W;F) = d(W;w) $\approx$ 22,23

Der Standort W ist 2223m vom Weg entfernt.

Berechnung der Entfernung mithilfe des allgemeinen Geradenpunktes:

$P_w(1 + w \mid -65 - 3w \mid 16)$ , W(-26|-54|18)

$(27 + w)^2 + (-11-3w)^2 + (-2)^2 = 900$

$$w_1 = 0{,}37$$
$$w_2 = -12{,}37$$

$\Rightarrow$ $W_1(1{,}37 \mid -66{,}1 \mid 16)$ und $W_2(-11{,}37 \mid -27{,}89 \mid 16)$

$\overline{W_1W_2} \approx 40{,}29$

Auf einem Abschnitt von ca. 4 km ist der 2. Helfer über Funk vom ersten Helfer zu erreichen.

***Bewertungsvorschlag***

| | **Geforderte Leistung** | **BE** | **AB** |
|---|---|---|---|
| a) | Koordinaten des Mittelpunktes K | 1 | I |
| | Gleichungen der Mittelsenkrechten | 2 | I o. II |
| | Koordinaten des Schnittpunktes T | 1 | I o. II |
| b) | Abstandsberechnung | 4 | II |
| | Berghöhe | 1 | I |
| | Höhenunterschied | 1 | I |
| | Winkel | 2 | I |
| c) | Gleichung der Hangebene | 1 | I |
| | Gleichung der Plateauebene | 1 | I |
| | Gleichung der Schnittgeraden | 2 | II |
| | Winkel | 2 | I |
| d) | Koordinaten des Fußpunktes über die Hilfsebene | 3 | II |
| | Berechnung des Abstands Punkt/Gerade | 1 | II |
| | Gleichung aufstellen und lösen<br>Koordinaten der Punkte<br>Abstand und Entfernung | 3 | III |
| | **Summe** | **50** | |