Leistungskurs Mathematik (Baden-Württemberg): Abiturprüfung 1991

Analysis 1991 I

Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion gegeben durch $f_t(x) = \frac{1}{t}x + \frac{t}{x-t}$; $x \neq t$. Ihr Graph sei K_t.

a) Untersuchen Sie K_t auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Hoch -, Tief - und Wendepunkte sowie auf Asymptoten. Zeichnen Sie K_2 für $-2 \leq x \leq 7$. (Längeneinheit 1 cm)

b) Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte von K_1 und K_2. Welcher dieser Punkte liegt auf allen Kurven K_t ? Begründen Sie, dass sich in diesem Punkt alle Kurven K_t berühren.
Bestimmen Sie denjenigen Punkt P_t auf der x - Achse, der vom Hochpunkt und vom Tiefpunkt von K_t gleich weit entfernt ist.

c) Die Geraden $x = 4$ und $x = k$ mit $2 < k < 4$, der Graph K_2 und die x - Achse umschließen ein Flächenstück. Zeigen Sie, dass dieses Flächenstück von der Geraden $y = 0{,}5x$ halbiert wird, wenn gilt: $4 - 2 \cdot \ln\left(\frac{2}{k-2}\right) - \frac{1}{4}k^2 = 0$ (*).
Ein Computer errechnet den Näherungswert $x_0 = 1{,}3260$ für eine Lösung der Gleichung $4 + 2\ln(x - 1) - x^2 = 0$.
Geben Sie durch geeignete Umformung von Gleichung (*) mit Hilfe dieses Wertes x_0 einen Näherungswert für eine Lösung der Gleichung (*) an.

Analysis 1991 II

Gegeben ist eine Funktion f durch $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{1+x^2}}$; $x \in$ IR. Ihr Graph sei K.

a) Bestimmen Sie die Symmetrie und die Asymptoten von K. Untersuchen Sie K auf Wendepunkte. Zeichnen Sie K für $-4 \leq x \leq -4$. (Längeneinheit 1 cm)

b) Zeigen Sie: f hat für $x \in$ IR eine Umkehrfunktion f^{-1}. Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)^{-1}$ und geben Sie die Definitionsmenge von f an. Zeichnen Sie den Graphen K^{-1} von f^{-1} für $x > 0$ in das vorhandene Achsenkreuz ein. K und K^{-1} umschließen im 1. Feld ein Flächenstück. Berechnen Sie seinen Inhalt.

c) Die Gerade $x = 3$, die x-Achse und die Kurve C mit der Gleichung $y = \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}$ für $-4 < x < 4$ umschließen im 1. Feld ein Flächenstück. Dieses Flächenstück rotiert um die x - Achse und erzeugt dabei einen Drehkörper mit dem Volumen V . Zeigen Sie zunächst:
In der Gleichung $\frac{x^2}{16-x^2} = r + \frac{s}{4-x} + \frac{t}{4+x}$ lassen sich die Konstanten r, s und t so bestimmen, dass diese Gleichung für alle x mit $-4 < x < 4$ gilt . Berechnen Sie damit das Volumen V.

d) Eine Funktion h ist in einem Intervall $a \leq x \leq b$ stetig differenzierbar. In diesem Intervall gilt $h(x) > 0$, $h'(x) > 0$ und $h(a) = 9$.
Eine Funktion g ist gegeben durch $g(x) = \frac{h'(x)}{\sqrt{h(x)}}$; $a \leq x \leq b$. Der Graph von g schließt mit der x - Achse sowie mit den Geraden $x = a$ und $x = b$ eine Fläche mit dem Inhalt 4 ein. Berechnen Sie h(b). Erläutern Sie, weshalb $h'(x) > 0$ für $a \leq x \leq b$ vorausgesetzt wurde.

Analysis 1991 III

Zu jedem $t \neq 0$ ist eine Funktion $f_t(x)$ gegeben durch $f_t(x) = \ln(2 - te^{-x})$; $x \in D_t$. Ihr Graph sei K_t.

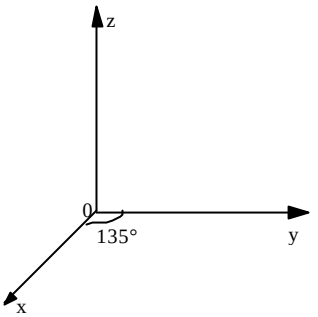
a) Bestimmen Sie für f_2 die maximale Definitionsmenge D_2. Untersuchen Sie K_2 auf Asymptoten, gemeinsame Punkte mit der x - Achse sowie auf Hoch -, Tief - und Wendepunkte. Zeichnen Sie K_2 samt Asymptoten für $0 < x \leq 3{,}5$. (Längeneinheit 2 cm)
(Teilergebnis: $f_2'(x) = \frac{1}{e^x - 1}$)

b) Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge D_t in Abhängigkeit von t.
Nun sei $t > 0$. Untersuchen Sie K_t auf gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen. Bestimmen Sie die Gleichungen der Asymptoten von K_t.

c) Nun sei $t < 0$. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f_t. Begründen Sie: Jede Funktion f_t besitzt eine Umkehrfunktion f_t^{-1}. Bestimmen Sie den Funktionsterm $f_t^{-1}(x)$ sowie die maximale Definitionsmenge und die Wertemenge von f_t^{-1}.

d) Im vierten Feld schließen die x - Achse, K_2, die Gerade $x = \frac{1}{e}$ und die Gerade $x = u$ mit $0 < u < \frac{1}{e}$ eine Fläche mit Inhalt A(u) ein. Es gilt die Beziehung $2 - 2 \cdot e^{-x} \geq x$ für $0 \leq x \leq \frac{1}{e}$.
Schätzen Sie mit Hilfe dieser Beziehung A(u) nach oben ab.
Zeigen Sie damit, das der rechtsseitige Grenzwert $\lim\limits_{u \to 0} A(u)$ existiert.

Analytische Geometrie 1991 I



Die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$, sowie der Punkt $S_3(0|\ 0|\ 3)$ liegen in der Ebene E_1. E_1 schneidet die x - Achse in S_1 und die y - Achse in S_2.

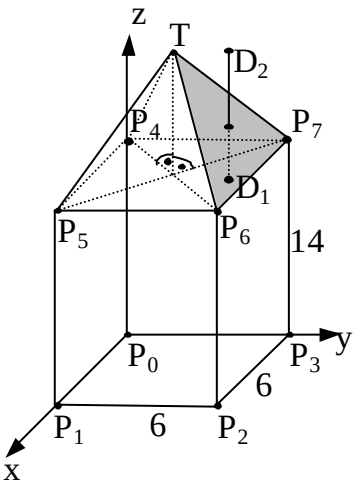
a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E_1. Zeichnen Sie ein Schrägbild der Geraden g und des Dreiecks $S_1S_2S_3$. (Querformat; Ursprung in Blattmitte; Längeneinheit 1 cm; Verkürzungsfaktor in x - Richtung $\frac{1}{2}\sqrt{2}$)
Eine Kugel hat ihren Mittelpunkt im Ursprung und berührt E_1. Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Kugel.
Die Gerade g schneidet die Strecke S_2S_3 im Punkt P. In welchem Verhältnis teilt P diese Strecke? (Teilergebnis: $E_1: x + y + 4z = 12$)

b) Auf S_1S_2 liegen die Punkte A und B. Bestimmen Sie A und B so, dass das Dreieck ABS_3 gleichschenklig ist und die Basis AB die Länge $8 \cdot \sqrt{2}$ hat.
Das Dreieck ABS_3 ist die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide mit der Höhe $6 \cdot \sqrt{2}$. Der Fußpunkt der Pyramidenhöhe ist der Schwerpunkt des Dreiecks ABS_3. Bestimmen Sie die Spitze C dieser Pyramide, wenn der z - Wert von C positiv ist.

c) Die Ebene E_2 ist parallel zur z - Achse und enthält die Gerade S_1S_2. Geben Sie eine Koordinatengleichung von E_2 an.
Die Kugel K berührt die Ebene E_2 und die z - Achse in deren positiven Bereich so, dass die Verbindungsstrecke der Berührpunkte ein Durchmesser ist. Außerdem berührt K die Ebene E_1. Bestimmen Sie eine Gleichung von K.

d) Zwei Kugeln berühren die Ebene E_1 im Punkt $Q(4|\ 4|\ 1)$ und die xy - Ebene in je einem weiteren Punkt. Eine zentrische Streckung mit Zentrum Z bildet die kleinere Kugel auf die größere ab. Berechnen Sie die Koordinaten von Z.

Analytische Geometrie 1991 II



Der Turm einer Burg hat die Form einer senkrechten quadratischen Säule, der eine Pyramide aufgesetzt ist (siehe Zeichnung ; Maße in Meter). Drei Kanten des Turms liegen auf den Koordinatenachsen; der Burghof liegt in der horizontalen xy - Ebene.

a) Berechnen Sie den Winkel zwischen dem Dachboden $P_4P_5P_6P_7$ und der Dachfläche P_6P_7T.
Der Dachständer D_1D_2 der Länge 5 m steht senkrecht auf dem Dachboden und durchstößt im Schwerpunkt der Dachfläche P_6P_7T das Dach. Welchen Abstand hat die Spitze D_2 des Dachständers von dieser Dachfläche?

b) Im pyramidenförmigen Dachraum soll ein kugelförmiger Behälter gelagert werden. Welchen Radius kann dieser Behälter

höchstens haben? Untersuchen Sie, ob zur Lagerung dieses Behälters mit maximalem Radius der Dachständer (siehe Teilaufgabe a)) entfernt werden muss.

c) Im Punkt F_1 (3| 20| 0) des Burghofes steht ein 13 m hoher lotrechter Fahnenmast. Von der Spitze dieses Fahnenmastes soll ein Seil zur Turmspitze T gespannt werden. (Der Verlauf des Seiles soll als geradlinig angenommen werden.) Zeigen Sie, dass diesem Seil der Dachständer aus Teilaufgabe a) nicht im Weg ist.
Da man an dem Seil zur Dekoration Wimpel anbringen will, die auch beim Flattern im Wind den Dachständer nicht berühren sollen, interessiert man sich für den Abstand des Punktes D_2 vom Seil. Bestimmen Sie diesen Abstand auf Zentimeter gerundet.

d) Der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$ gibt die Richtung von einfallendem Sonnenlicht an. Zeigen Sie, dass dann der Schatten des Fahnenmastes F_1F_2 aus Teilaufgabe c) eine Turmwand trifft. Berechnen Sie die gesamte Länge des Schattens.