Die Senatorin
für Bildung und Wissenschaft

Freie Hansestadt Bremen

Schriftliche Abiturprüfung 2010 im dritten Prüfungsfach

Grundkurs Mathematik (CAS)

Dienstag, 20. April 2010, 9.00 Uhr

Unterlagen für Lehrerinnen und Lehrer

- Diese Unterlagen sind nicht für die Schülerinnen und Schüler bestimmt -

---

Diese Unterlagen enthalten …

- Allgemeines,
- die Bewertung der Prüfungsleistung,
- Aufgaben mit Lösungsskizzen,
- einen Protokollbogen zur Auswahl der Aufgaben für die Prüfungsakten Ihrer Schule,
- einen Rückmeldebogen für die Zentralabiturkommission zur Auswahl der Aufgaben.

Allgemeines

- Wählen Sie gemeinsam mit Ihrer Korreferentin / Ihrem Korreferenten aus den fünf vorgelegten Aufgaben drei zur Bearbeitung aus. Die Aufgaben kommen aus mindestens zwei verschiedenen Themenbereichen, mindestens eine der Aufgaben ist aus dem Themenbereich Analysis. Kommt es zu keiner Einigung, bestimmt die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses die Auswahl der Aufgaben (§ 10 Abs. 2 Nr. 1 AP-V). Protokollieren Sie auf dem beigefügten Protokollformular, welche Aufgaben Sie gewählt haben (Prüferin/Prüfer und Korreferentin/Korreferent und ggf. auch die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses unterschreiben das Protokoll).
- Füllen Sie bitte für die Zentralabiturkommission Mathematik den beigefügten Rückmeldebogen zur Auswahl der Aufgaben aus und schicken ihn an die dort genannte Adresse.
- Fragen Sie vor Verteilung der Aufgaben nach der Arbeitsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler und weisen Sie diese auf die Regelungen des § 5 AP-V (Täuschung und Behinderung) hin.
- Machen Sie die Schülerinnen und Schüler auf die Arbeitshinweise aufmerksam, die am Anfang der Unterlagen für die Prüfungsteilnehmer stehen. Geben Sie ihnen ggf. die nötigen Angaben zur Schulnummer sowie zur genauen Kursbezeichnung.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: Graphikfähiger Taschenrechner (CAS), dessen Betriebsfähigkeit die Schülerin / der Schüler gewährleistet, Formelsammlung, Zeichengerät, Rechtschreiblexikon

Die Bewertung der Prüfungsleistung

Die Lösungsskizze stellt eine Lösungsvariante dar; andere gleichwertige Lösungen sind entsprechend zu bewerten. Die Bewertungsanteile pro Teilaufgabe sind obligatorisch.

Für die Festlegung der Gesamtleistung werden den erzielten Bewertungseinheiten die entsprechenden Notenstufen gemäß folgender Tabelle zugeordnet.

Bewertungs-einheiten	KMK Punkte
0 bis 14,5	00
15 bis 20	01
20,5 bis 24,5	02
25 bis 29,5	03
30 bis 33,5	04
34 bis 37	05
37,5 bis 41	06
41,5 bis 44,5	07
45 bis 48,5	08
49 bis 52	09
52,5 bis 56	10
56,5 bis 59,5	11
60 bis 63,5	12
64 bis 67	13
67,5 bis 71	14
71,5 bis 75	15

Aufgabe 1 - zum Themenbereich Analysis

Ausbreitung eines Internetvirus

Der *Code Red Worm* ist ein Internetvirus. Das Virus richtet nur auf zentralen Computern (Servern) einen Schaden an. Von einem Virus befallene Server sind nicht mehr einsatzfähig.
Der *Code Red Worm* hat am $13.07.2001$ innerhalb einiger Stunden von insgesamt $280\,000$ Servern viele befallen. Die Anzahl der befallenen Server wird vom CERT * über ein Meldesystem ausgezählt. Mit Hilfe der Daten werden mathematische Modelle entwickelt, um Vorhersagen über die Ausbreitung von ähnlichen Viren zu machen. Dazu sollen Sie in dieser Aufgabe mathematische Modelle überprüfen.

Die Tabelle gibt die Anzahl der am $13.07.2001$ befallenen Server zu einer bestimmten Zeit an, die in Stunden ab 10 Uhr gemessen wird:

Vergangene Zeit ab 10 Uhr in Stunden	0	2	4	6	8
Anzahl der infizierten Server (Messwerte)	$20\,000$	$100\,000$	$205\,000$	$250\,000$	$277\,500$

a) Eine Modellierung der Ausbreitung des Virus soll mit Hilfe der Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(t) = 20\,000 \cdot e^{0,5818 \cdot t},\ t \geq 0$$

beschrieben werden. t ist die ab 10 Uhr vergangene Zeit in Stunden, $f(t)$ die Anzahl der zum Zeitpunkt t von Viren befallenen Server.

Entscheiden Sie auch mit Hilfe von Rechnungen, ob der Modellierungsansatz mit der Funktion f gut geeignet ist, um diesen Wachstumsprozess zu beschreiben und begründen Sie Ihre Entscheidung.

(4 Punkte)

Im Weiteren soll eine Modellierung der Virusausbreitung mit Hilfe der Funktion g mit der Funktionsgleichung

$$g(t) = 280\,000 - 260\,000 \cdot e^{-0,3599 \cdot t},\ t \geq 0$$

betrachtet werden. t ist die ab 10 Uhr vergangene Zeit in Stunden, $g(t)$ die Anzahl der zum Zeitpunkt t von Viren befallenen Server.

b) Zeigen Sie unter Angabe des Rechenwegs, dass mit Hilfe des Messwertes zur Zeit $t = 6$ die Wachstumskonstante k in der Funktionsgleichung $g(t) = 280\,000 - 260\,000 \cdot e^{-k \cdot t}$ zu $k \approx 0,3599$ bestimmt werden kann.

Skizzieren Sie den Graphen der Funktion g für $0 \leq t \leq 8$ mit Hilfe von fünf Punkten für $t = 0; 2; 4; 6; 8$ in ein Koordinatensystem.

Zeichnen Sie die fünf Messpunkte aus der obigen Tabelle zum Vergleich ein.

(6 Punkte)

c) Berechnen Sie den Zeitpunkt t, zu dem $140\,000$ Server mit dem Virus infiziert sind.

Bestimmen Sie ohne Verwendung eines Taschenrechners den Grenzwert von g für $t \to \infty$ und interpretieren Sie diesen im Sachzusammenhang.

(5 Punkte)

* CERT: Computer Emergency Response Team, Notfalldienst für Computerstörungen aller Art

d) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion g unter Angabe des Rechenwegs. (Zur Kontrolle: $g'(t) = 93574 \cdot e^{-0,3599 \cdot t}$.)

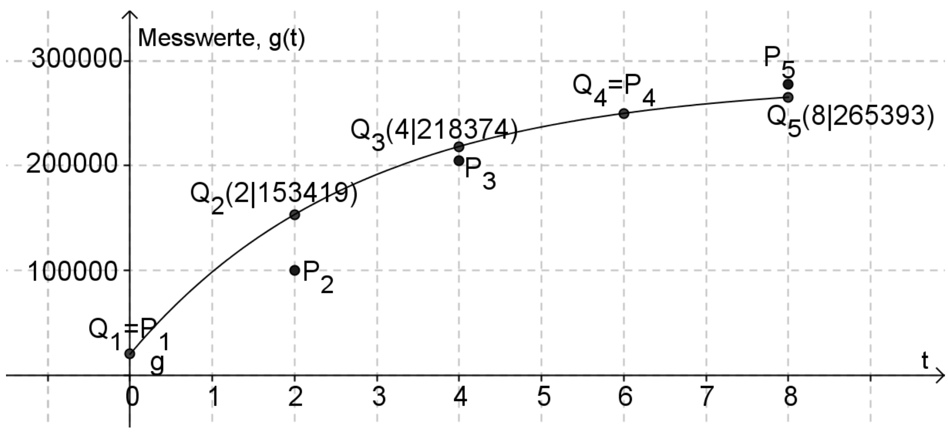
Berechnen Sie $g'(2)$. Ermitteln Sie $\lim\limits_{t \to \infty} g'(t)$. Interpretieren Sie die Ergebnisse in Bezug auf die Ausbreitung der Viren.

(6 Punkte)

e) Berechnen Sie den Wert $\frac{1}{8}\int_0^8 g'(t)dt$ unter Angabe des Rechenwegs und erläutern Sie, warum es sich bei diesem Wert um den mittleren Zuwachs infizierter Server in den ersten 8 Stunden handelt.

(4 Punkte)

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 1**

	Lösungsskizze	Bewertung I	II	III
1a	Eine mögliche Lösung: Eine Berechnung mittels Tabellenfunktion des CAS oder GTR liefert eine Übereinstimmung des Wertes $f(0)=20000$ mit dem Tabellenwert und einen Wert für $f(4)\approx 204984$, der sehr wenig vom Tabellenwert abweicht. Die anderen Werte weichen sehr stark ab. Z. B. ist $f(8)\approx 2\,100923$ ein Vielfaches des Tabellenwerts. Eine Alternative: $f(0)=20000$ stimmt mit dem Tabellenwert überein und $f(4)\approx 204984$ weicht nur sehr wenig ab, aber f beschreibt ein unbeschränktes Wachstum. Dies passt nicht zu der Vorgabe, dass die Anzahl der Server auf 280000 beschränkt ist. In jedem Fall: Das Modell ist ungeeignet.	2	2	
1b	Berechnung von k: $250000=280000-260000\cdot e^{-k\cdot 6}\quad\Leftrightarrow$ $k=\dfrac{\ln\left(\dfrac{250000-280000}{-260000}\right)}{-6}\approx 0{,}3599$ 	2	4	
1c	Berechnung des Zeitpunkts: $140000=280000-260000\cdot e^{-0{,}3599\cdot t}$ wird gelöst durch $t\approx 1{,}72$ Nach $t\approx 1{,}72$ Stunden sind 140000 Server mit dem Virus infiziert. Grenzwertberechnung: $\lim\limits_{t\to\infty}(g(t))=\lim\limits_{t\to\infty}\left(280000-260000\cdot e^{-0{,}3599\cdot t}\right)=280000,\text{ weil}$ $\lim\limits_{t\to\infty}(-260000\cdot e^{-0{,}3599\cdot t})=0$ Der Funktionswert nähert sich für $t\to\infty$ dem Wert der maximal infizierbaren Server.	2	3	

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
1d	Die Ableitung: $g'(t) = 0 - 260000 \cdot (-0{,}3599) \cdot e^{-0{,}3599 \cdot t} = 93574 \cdot e^{-0{,}3599 \cdot t}$. $g'(2) \approx 45556$ $\lim\limits_{t \to \infty} g'(t) = \lim\limits_{t \to \infty} \left(93574 \cdot e^{-0{,}3599 \cdot t}\right) = 0$. Zur Zeit $t = 2$ beträgt die momentane Zuwachsrate ca. 45556 Infektionen pro Stunde, langfristig geht die Zuwachsrate gegen 0, die Sättigungsgrenze ist fast erreicht.	2	3	1
1e	$\frac{1}{8} \int_0^8 g'(t)dt = \frac{g(8) - g(0)}{8} \approx \frac{265393{,}28 - 20000}{8} \approx 30674$. Das Integral liefert die Anzahl aller infizierten Server in den ersten acht Stunden. Durch die Multiplikation mit dem Faktor $\frac{1}{8}$ wird die mittlere Anzahl der Infektionen pro Stunde berechnet.	2	1	1
Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**10**	**13**	**2**

Aufgabe 2 - zum Themenbereich Analysis

Pralinen

Das kleine Unternehmen „Pralinera“ produziert Pralinen.

Der „Pralinera“ entstehen unterschiedliche Gesamtkosten in Abhängigkeit von der produzierten Menge der Pralinen bei fest stehender Lieferzeit. Je größer die Menge der produzierten Pralinen, desto höher fallen die Gesamtkosten aus, wobei der Gesamtkostenzuwachs mit jeder zusätzlich produzierten Einheit unterschiedlich ist. Bei größeren Produktionsmengen können die Gesamtkosten besonders stark steigen z.B. durch Überstunden, Nachtarbeit oder zusätzlichen Maschinenbedarf.

a) Der „Pralinera“ entstehen bei der Produktion für einen Auftrag folgende Gesamtkosten: Bei einer Produktionsmenge von null kg belaufen sich die Gesamtkosten auf 100 €. Bei einer Produktionsmenge von 50 kg betragen die Gesamtkosten 1400 €. Bei einer Produktionsmenge von 100 kg betragen die Gesamtkosten 3000 €. Bei einer Produktionsmenge von 50 kg beträgt die lokale (momentane) Änderungsrate der Gesamtkosten 18 € pro kg.
Bestimmen Sie aus den Angaben eine ganzrationale Funktion f mit möglichst kleinem Grad, wobei x die Produktionsmenge (in kg) und $f(x)$ die Gesamtkosten (in €) in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x beschreiben, und begründen Sie ihren Ansatz. (7 Punkte)

Für einen anderen Auftrag entstehen der „Pralinera“ bei einer Produktionsmenge von x die Gesamtkosten $K(x)$ in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x (x in kg, $K(x)$ in €). Diese können durch die Funktion K mit $K(x) = 0{,}0044x^3 - 0{,}4x^2 + 20x + 100$, $0 \le x \le 100$ beschrieben werden.

Die „Pralinera“ möchte die Pralinen zum Preis von 20 € pro kg verkaufen. Die Einnahmen, welche als Menge mal Preis definiert sind, werden dann durch die Funktion E mit $E(x) = 20 \cdot x$ für jede Produktionsmenge x beschrieben (x in kg, $E(x)$ in €).

b) Die Funktion G mit $G(x) = -0{,}0044x^3 + 0{,}4x^2 - 100$ gibt für jede Produktionsmenge x den zugehörigen Gewinn $G(x)$ an (x in kg, $G(x)$ in €).
Begründen Sie diese Aussage.

Skizzieren Sie den Graphen der Funktion G in ein Koordinatensystem. (5 Punkte)

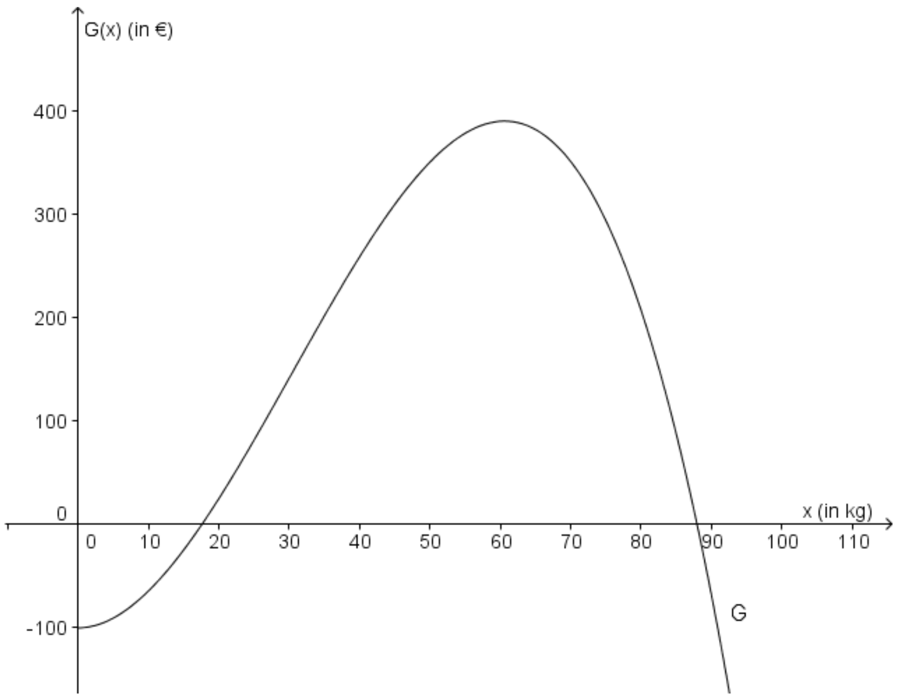
c) Entscheiden Sie, ob die „Pralinera“ bei einer Produktionsmenge von 24 kg einen Gewinn oder einen Verlust erwirtschaftet.
Bestimmen Sie ein Intervall für die Produktionsmengen, in dem die „Pralinera“ einen Gewinn erwirtschaftet und begründen Sie Ihren Ansatz. (5 Punkte)

d) Ermitteln Sie in dem Intervall $[0;100]$ die Produktionsmenge, mit der der größte Gewinn erwirtschaftet wird, und geben Sie diesen größten Gewinn an.

Die „Pralinera“ produziert genau diese optimierte Produktionsmenge. Aufgrund einer Mieterhöhung steigen die Gesamtkosten für jede Produktionsmenge um den gleichen Betrag. Ein Unternehmensmitglied behauptet, dass man nun mehr produzieren sollte, um den Gewinn zu vergrößern.
Entscheiden Sie, ob diese Aussage richtig oder falsch ist und begründen Sie Ihre Antwort. (5 Punkte)

e) Einem Kunden ist der Preis zu hoch. Die „Pralinera“ will den Preis senken und ein Lockangebot für den Kunden abgeben.
Ermitteln Sie mit Hilfe von K bei einer Produktionsmenge von 50 kg den Preis, bei dem weder Gewinn noch Verlust erwirtschaftet wird. (3 Punkte)

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 2**

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>2a</td><td>Aus dem Text lassen sich vier Informationen entnehmen, welche zu vier Gleichungen führen. Deshalb wird eine allgemeine ganzrationale Funktion 3. Grades als Ansatz gewählt: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f(0) = 100$ und somit $d = 100$
$f(50) = 125000a + 2500b + 50c + d = 1400$
$f(100) = 1000000a + 10000b + 100c + d = 3000$
$f'(50) = 7500a + 100b + c = 18$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 125000 & 2500 & 50 & 1 & 1400 \\ 1000000 & 10000 & 100 & 1 & 3000 \\ 7500 & 100 & 1 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}0044 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0{,}6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right]$$
$f(x) = 0{,}0044x^3 - 0{,}6x^2 + 45x + 100$</td><td>3</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>2b</td><td>Der Gewinn berechnet sich aus der Differenz der Einnahmen und der Gesamtkosten, d.h. $G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}0044x^3 + 0{,}4x^2 - 100$.

</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr>
</table>

Lösungsskizze		Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
2c	Da $G(24) \approx 69{,}57 > 0$, wird ein Gewinn erwirtschaftet. Für Produktionsmengen $x \in [17{,}6;88]$ erwirtschaftet die „Pralinera“ einen Gewinn ($G(x) \geq 0$). Eine mögliche Begründung: Die Nullstellen der Funktion G kennzeichnen den Wechsel vom Verlust zum Gewinn und umgekehrt, deshalb folgt $G(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx -14{,}7 \vee x \approx 17{,}6 \vee x \approx 88$. Die Stelle $x \approx -14{,}7$ liegt nicht im Definitionsbereich.	2	3	
2d	$G'(x) = -0{,}0132x^2 + 0{,}8x$. Es gilt $-0{,}0132x^2 + 0{,}8x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{2000}{33}$. Ein Vergleich der Funktionswerte an den Stellen und den Randstellen des Intervalls ergibt $G(0) = -100$, $G(\frac{2000}{33}) \approx 389{,}75$ und $G(100) = -500$. Bei $\frac{2000}{33}$ kg wird das absolute Maximum des Gewinns mit ca. $389{,}75$ € erzielt. Nein, das Unternehmensmitglied hat nicht Recht. Mögliche Begründung: Der Graph der Gesamtkostenfunktion verschiebt sich um den Betrag der Mieterhöhung in Richtung der y - Achse. Da die Einnahmen gleich bleiben, verringert sich der maximale Gewinn, aber die Produktionsmenge mit dem maximalen Gewinn bleibt $\frac{2000}{33}$ kg.	2	2	1
2e	Eine mögliche Lösung: Die Gesamtkosten bei einer Produktionsmenge von 50 kg betragen 650 €. Die Einnahmen werden mit dem gesuchten Preis a durch $E(50) = a \cdot 50$ beschrieben. Es gilt insgesamt: $a \cdot 50 - 650 = 0 \Leftrightarrow a = 13$. Mit einem Preis von 13 € pro kg wird bei einer Produktionsmenge von 50 kg weder Gewinn noch Verlust erwirtschaftet.	1	1	1
Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**10**	**13**	**2**

Aufgabe 3 - zum Themenbereich Wahrscheinlichkeitsrechnung / Statistik

Mehrwegflaschen

Mehrwegflaschen haben eine sehr hohe Rücklaufquote. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine solche Flasche zurückgegeben wird, heißt Rückgabewahrscheinlichkeit. Bei Milchflaschen liegt sie bei 90%, bei Bierflaschen und Mineralwasserflaschen zwischen 96% und 98%.

a) Es werden zunächst Mehrweg-Mineralwasserflaschen betrachtet. Rechnen Sie im Folgenden mit einer Rückgabewahrscheinlichkeit pro Flasche von $p_W = 0{,}97$.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 16 einzeln verkauften Flaschen

- genau 15 Flaschen zurückgegeben werden.
- mindestens 15 Flaschen zurückgegeben werden.
- weniger als 14 Flaschen zurückgegeben werden.

Geben Sie die Voraussetzungen an, auf denen Ihre Berechnung beruht.
Runden Sie Ihre Ergebnisse auf drei Nachkommastellen. (7 Punkte)

b) Jetzt betrachten wir Mehrweg-Milchflaschen mit einer Rückgabewahrscheinlichkeit von $p_M = 0{,}9$ pro Flasche.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 10 einzeln verkauften Milchflaschen mindestens eine *nicht* zurückgegeben wird.

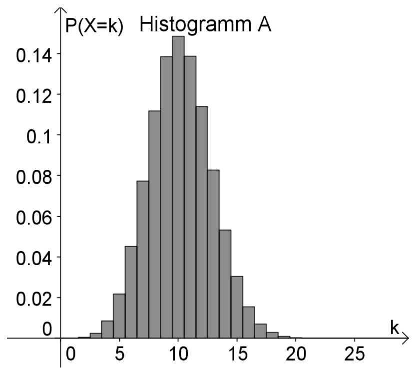
Ermitteln Sie, ab wie vielen verkauften Milchflaschen die Wahrscheinlichkeit, dass alle Flaschen zurückkommen, höchstens 5% beträgt und formulieren Sie einen Antwortsatz. (6 Punkte)

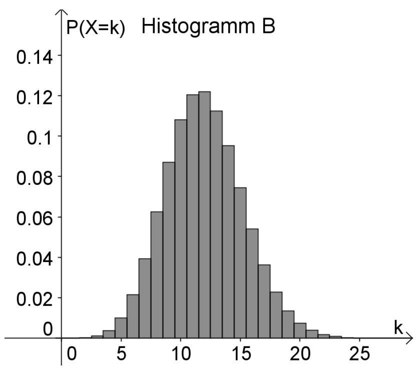
c) Ein kleiner Supermarkt verkauft pro Woche ca. 100 Flaschen Milch ($1l$ Mehrwegflaschen).
Berechnen Sie für 100 Flaschen den Erwartungswert für die nicht zurückgegebenen Flaschen.

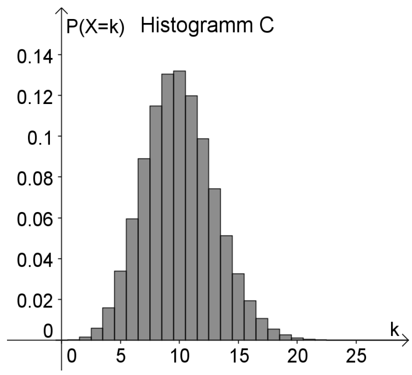
Hier sehen Sie die Histogramme von drei Wahrscheinlichkeitsverteilungen.
Entscheiden Sie, welches dieser Histogramme zu der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße

X: Anzahl der nicht zurückgegebenen Flaschen mit $n = 100;\ p = 0{,}1$ gehört.

Begründen Sie jeweils mit einem Argument, warum es die beiden anderen Diagramme nicht sein können.







(4 Punkte)

d) Bei den Milch-Mehrwegflaschen handelt es sich um Literflaschen. Jede zurückgegebene Flasche wird wieder gefüllt und verkauft.

- Erklären Sie mit Hilfe eines Baumdiagramms, warum die Wahrscheinlichkeit, dass mit einer Flasche mindestens 5 Liter Milch verkauft werden, $0{,}9^4 = 65{,}61\%$ beträgt.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich mit einer Flasche genau 5 Liter Milch verkaufen lassen.

Wir nehmen an, dass eine Flasche nach 30 Füllungen wegen möglicher Beschädigungen aussortiert wird[1].

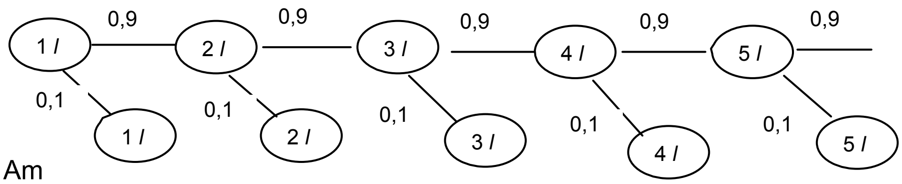
- Bestimmen Sie unter dieser Annahme die Wahrscheinlichkeit, dass genau 30 Liter Milch mit einer Mehrwegflasche verkauft werden.
- Bestimmen Sie unter dieser Annahme den Erwartungswert für die Menge Milch, die mit einer Mehrwegflasche verkauft wird.

(8 Punkte)

[1] Die Angaben zur Zahl der durchschnittlich möglichen Füllungen schwanken zwischen 20 und 40.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 3**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
3a	X: Anzahl der Flaschen, die zurück gegeben werden $n = 16;\ p = 0{,}97$ X ist binomialverteilt mit n und p: zwei mögliche Ergebnisse pro „Versuchsstufe“ (zurück gegeben /nicht zurück gegeben), unabhängige Ausfälle auf jeder Stufe, da einzeln verkauft) $P(X = 15) \approx 0{,}304$ $P(X \geq 15) = P(X = 15) + P(X = 16) \approx 0{,}918$ $P(X < 14) = 1 - P(X \geq 14) \approx 0{,}011$	6	1	
3b	X: Anzahl der verkauften Flaschen Milch, die nicht zurück gegeben werden $n = 10;\ p = 0{,}1$ Da X (analog zu a) binomialverteilt ist, gilt: $P(X \geq 1) \approx 0{,}651$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 65% wird mindestens eine von 10 Milchflaschen nicht zurückgegeben. X: Anzahl der verkauften Flaschen, die zurück gegeben werden n unbekannt, $p = 0{,}9$: $P(X = n) = 0{,}9^n \leq 5\% \Rightarrow n = 29$ (Sowohl Probierlösungen als auch exakte Rechnungen sind zulässig.) Es müssen mindestens 29 Milchflaschen verkauft werden, damit die Wahrscheinlichkeit, dass alle Flaschen zurück kommen, höchstens 5% beträgt.	2	4	
3c	X wie oben, $n = 100;\ p = 0{,}1$: Der Erwartungswert für binomial verteilte Zufallsgrößen ergibt sich aus $\mu = n \cdot p = 10$ Das Histogramm zur Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X: Anzahl der nicht zurückgegebenen Flaschen mit $n = 100;\ p = 0{,}1$ ist das Histogramm C. Argumentationen zu den beiden anderen Histogrammen zum Beispiel: Das Histogramm B passt nicht zur Wahrscheinlichkeitsverteilung für X, da der Erwartungswert einer binomial verteilten Zufallsgröße der Wert ist, der die größte Wahrscheinlichkeit hat, das Maximum bei Histogramm B aber bei $X = 12$ und nicht bei $X = 10$ liegt. Das Histogramm A passt nicht zur Wahrscheinlichkeitsverteilung für X, da für $n = 100;\ p = 0{,}1$ gilt: $P(X = 10) = \binom{100}{10} \cdot 0{,}1^{10} \cdot 0{,}9^{90} \approx 0{,}132$. In Histogramm A liegt die Wahrscheinlichkeit für $X = 10$ aber deutlich über $0{,}132$, in Histogramm C dagegen entspricht $P(X = 10)$ dem berechneten Wert.	1	3	

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
3d	X : Anzahl der mit einer Flasche verkauften Liter Milch, wenn die Flasche nach 30 Füllungen aussortiert wird. Baumdiagramm:  Am Baumdiagramm sieht man, dass der Pfad zum Ereignis „Mindestens 5 Liter werden mit einer Flasche verkauft“ die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 5) = 0{,}9^4$ hat. $P(X = 5) \approx 0{,}6561 \cdot 0{,}1 \approx 0{,}066$, Wahscheinlichkeit für "genau 5 Liter". $P(X = 30) = 0{,}9^{29} \approx 0{,}047$, Wahscheinlichkeit für "genau 30 Liter", wenn die Flasche nach 30 Füllungen aussortiert wird. $E(X) = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1 + ... + 29 \cdot 0{,}9^{28} \cdot 0{,}1 + 30 \cdot 0{,}9^{29}$ $= \sum_{k=1}^{29} k \cdot 0{,}9^{k-1} \cdot 0{,}1 + 30 \cdot 0{,}9^{29} \approx 8{,}2 + 1{,}4 = 9{,}6$ Der Erwartungswert für die Anzahl der mit einer Mehrwegflasche verkauften Liter Milch beträgt also ca. $9{,}6 l$.	1	5	2
	Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	**10**	**13**	**2**

Aufgabe 4 - zum Themenbereich Lineare Algebra

Waschbären

Zwei Waschbärenpaare wurden 1934 erstmalig in Deutschland am Edersee in Hessen ausgesetzt. Bis dahin waren die Waschbären in Deutschland nicht heimisch.

Inzwischen haben sich die Waschbären stark verbreitet und ihren Lebensraum sowohl in Wäldern als auch in Städten gefunden. Da sich die Tiere sehr erfolgreich an den Menschen anpassen können, sind sie in einigen Städten schon zur Plage geworden. Die Waschbären können Dachböden besiedeln, sie machen sich über Mülltonnen und auch über Hunde- und Katzenfutter her.

Wie in der Populationsdynamik üblich, werden in dieser Aufgabe nur weibliche Waschbären (Fähen) betrachtet. Diese werden in drei Altersklassen eingeteilt:

w Anzahl nicht geschlechtsreifer weiblicher Tiere, von der Geburt bis zu einem Jahr (Welpen).

j Anzahl junger, gerade geschlechtsreifer Fähen, von einem bis zwei Jahren (Junge).

r Anzahl reifer Fähen, zwei Jahre und älter (Reife).

Eine Population von Fähen wird zum Beobachtungsbeginn durch einen Populationsvektor $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} w \\ j \\ r \end{pmatrix}$

dargestellt, mit Matrix-Vektor-Multiplikation soll der Populationsvektor für das Folgejahr berechnet werden.

Für eine im Wald lebende Population gilt:

- Junge, gerade geschlechtsreife Fähen bringen in jedem Jahr im Schnitt $1{,}9$ weibliche Welpen zur Welt, reifere Fähen dagegen nur $1{,}4$.
- Ca. 54% der Welpen sterben noch in ihrem ersten Lebensjahr, von den Jungen sterben jährlich ca. 43% und von den Reifen ca. 58% .

a)

- Geben Sie für die Überlebens- und Geburtenraten ein Übergangsdiagramm an.
- Entscheiden Sie, welche der drei Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}46 & 0 \\ 1{,}9 & 0 & 0{,}57 \\ 1{,}4 & 0 & 0{,}42 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1{,}9 & 1{,}4 \\ 0{,}46 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}57 & 0{,}42 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1{,}9 & 1{,}4 \\ 0{,}54 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}43 & 0{,}58 \end{pmatrix}.$$

dem Übergangsdiagramm entspricht, so dass für eine Anfangspopulation $\vec{v}_0$ mit der Matrix-Vektor-Multiplikation eine Vorhersage über die Entwicklung der Waschbärenpopulation gemacht werden kann.
Begründen Sie mit jeweils einem Argument, warum die beiden anderen Matrizen nicht geeignet sind.

(6 Punkte)

Fortsetzung Seite 2

In den Städten sind die Lebensbedingungen für die extrem anpassungsfähigen Waschbären noch besser. Die folgende Matrix P beschreibt die Waschbärenpopulation in einer Stadt S relativ gut.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}45 \end{pmatrix}$$

Gehen Sie davon aus, dass sich die Waschbären in der Stadt S über einen Zeitraum von mehr als 25 Jahren gemäß der Matrix P ausbreiten konnten.

Nach 24 Jahren zählt man in der Stadt S insgesamt 263 Fähen mit ca. $23{,}5\%$ Jungen und $17{,}5\%$ Reifen.

b)

- Geben Sie $\vec{v}_{24}$, die Verteilung nach 24 Jahren, in absoluten Zahlen (auf ganze Zahlen gerundet) an. Zu Beginn der Waschbärenbeobachtung (zum Zeitpunkt 0) soll ein Paar mit einer reifen Fähe in S gelebt haben. Zeigen Sie, dass diese Angabe stimmen kann.
- Berechnen Sie $\vec{v}_{25}$ auf ganze Zahlen gerundet. Zeigen Sie, dass die prozentuale Verteilung nach 25 Jahren mit der nach 24 Jahren übereinstimmt, wenn man auf ganze Prozentpunkte rundet.
- Berechnen Sie den prozentualen Zuwachs der Fähen vom $24.$ zum $25.$ Jahr.
- Welche Vermutung können Sie aus den Ergebnissen für das langfristige Wachstumsverhalten der Waschbären ableiten? Geben Sie diese Vermutung an und begründen Sie sie.

(11 Punkte)

c) Die Matrix P besitzt eine stabile Verteilung mit Wachstumsfaktor $k = \frac{5}{4} = 1{,}25$.

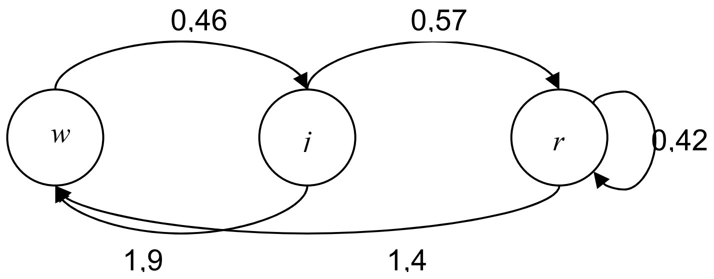
- Geben Sie ein lineares Gleichungssystem (LGS) an, mit dem man die zugehörige stabile prozentuale Verteilung $\vec{v}_s$ berechnen kann und bestimmen Sie $\vec{v}_s$.
- Aufgrund von Beobachtungen geht man davon aus, dass in Städten ca. 45 weibliche Waschbären pro Quadratkilometer leben können. Die Stadt S hat eine ungefähre Ausdehnung von $100\,\text{km}^2$.
Bereits nach 20 Jahren wurde in S eine stabile Verteilung mit 108 Fähen erreicht.
Berechnen Sie, nach wie vielen weiteren Jahren die Tiere erstmalig in das ländliche Umland abwandern müssen, da der städtische Lebensraum überfüllt ist. Die Ausbreitung entspricht weiterhin der Matrix P.

(8 Punkte)

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 4**

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>4a</td><td>

Übergangsdiagramm mit Überlebens- und Geburtenraten:



Zum Beispiel:
B ist korrekt, weil die Matrix-Vektor-Multiplikation die im Diagramm durch ankommende Pfeile dargestellte neue Aufteilung ergibt.
A ist schon deshalb nicht geeignet, da die erste Zeile besagt, dass die reifen Fähen keine Welpen zur Welt bringen.
C enthält statt der Geburtenraten die angegebenen Sterberaten.

</td><td>4</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>4b</td><td>

Geringe Abweichungen in den Ergebnissen treten auf, je nachdem, wie gerechnet oder wann gerundet wird.

- Der Anteil der Welpen beträgt 59%, daher gilt:
  $$\vec{v}_{24} = 263\begin{pmatrix} 0,59 \\ 0,235 \\ 0,175 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 155 \\ 62 \\ 46 \end{pmatrix}.$$
  Aus der Vorgabe für $\vec{v}_0$ ergibt sich $\vec{v}_{24} = P^{24} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 155 \\ 62 \\ 46 \end{pmatrix}$,
  die Ergebnisse nach 24 Jahren stimmen fast überein.
- $\vec{v}_{25} \approx P * \begin{pmatrix} 155 \\ 62 \\ 46 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 193 \\ 78 \\ 58 \end{pmatrix}$ oder $\vec{v}_{25} = P^{25} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 194 \\ 77 \\ 58 \end{pmatrix}$
  mit insgesamt $193 + 78 + 58 = 329$ Fähen nach 25 Jahren.
  $\vec{v}_{25} \approx \begin{pmatrix} 193 \\ 78 \\ 58 \end{pmatrix} \approx 329\begin{pmatrix} 0,587 \\ 0,237 \\ 0,176 \end{pmatrix}$. Die prozentualen Aufteilung entspricht auf ganze Prozentpunkte gerundet mit 59% Welpen, 24% Jungen und 18% Reifen der von $\vec{v}_{24}$.
- $\frac{329}{263} \approx 1,25$, die Population wächst um ca. 25%.
- Da die prozentualen Aufteilungen gut übereinstimmen, wachsen auch die einzelnen Generationen um 25%. Somit ist zu vermuten, dass die nach 24 Jahren erreichte Verteilung fast stabil ist und die Population danach mit einem Wachstumsfaktor von $k \approx 1,25$ wächst.

</td><td>4</td><td>7</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>4c</td><td>

- Für die stabile prozentuale Verteilung $\vec{v}_s = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ gilt:

$x + y + z = 1$ und $P * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1{,}25 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ bzw. $P * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 1{,}25 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

daraus ergibt sich das LGS:

$$\begin{bmatrix} x & + & y & + & z & = & 1 \\ -1{,}25x & + & 2y & + & 1{,}5z & = & 0 \\ 0{,}5x & - & 1{,}25y & & & = & 0 \\ & & 0{,}6y & - & 0{,}8z & = & 0 \end{bmatrix}$$

Mit dem TR führt die erweiterte Matrix mittels der rref-Funktion zur Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1{,}25 & 2 & 1{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & -1{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & -0{,}8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{rref} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0{,}588 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}235 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}176 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

d.h. $\vec{v}_s \approx \begin{pmatrix} 58{,}8\% \\ 23{,}5\% \\ 17{,}6\% \end{pmatrix}$.

- Die Waschbärenkapazität der Stadt S beträgt ca. 4500 Fähen. Bleibt die Zunahme unverändert, so müssen einige Waschbären erstmalig nach ca. 17 weiteren Jahren ins Umland übersiedeln, da sich die Population mit dem Wachstumsfaktor $k = 1{,}25$ vermehrt:
$108 \cdot 1{,}25^n = 4500$ besitzt die Lösung $n \approx 16{,}7$.

</td><td>2</td><td>4</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>10</td><td>13</td><td>2</td></tr>
</table>

Aufgabe 5 - zum Themenbereich Analytische Geometrie

Marktplatz

Die Abbildung auf der nächsten Seite zeigt eine Karte des Marktplatzes in Bremen mit dem Rathaus, dem Dom und weiteren sehenswürdigen Gebäuden. Legt man ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung in die Mitte des Marktplatzes, so dass die x_1-Achse nach Süden, die x_2-Achse nach Osten und die x_3-Achse senkrecht zum Himmel zeigt, ergeben sich die im Folgenden angegebenen Punkte und Vektoren.

Alle Koordinaten sind dabei in Meter angegeben.

Die Vorderseite des Rathauses steht auf der Strecke $\overline{AB}$ mit den Punkten $A(-51|27|1)$ und $B(-23|51|1)$.

a) Von der Obernstraße her führen Straßenbahngleise durch den Punkt $P(-42|20|1)$ genau parallel zur Vorderseite am Rathaus vorbei.
Geben Sie eine Gleichung für die Gerade g an, die den Verlauf dieser Gleise beschreibt.
Vor dem Dom knickt das Straßenbahngleis nach rechts ab, am Dom vorbei zur Domsheide. Dieser zweite Teil der Gleise wird durch die Gerade h mit der Gleichung $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 84 \\ 98 \\ 0,5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 91 \\ 42 \\ -0,6 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$ beschrieben.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q, an dem das Straßenbahngleis in die neue Richtung abknickt (Dass der „Knick“ in Wirklichkeit abgerundet ist, soll vernachlässigt werden). (7 Punkte)

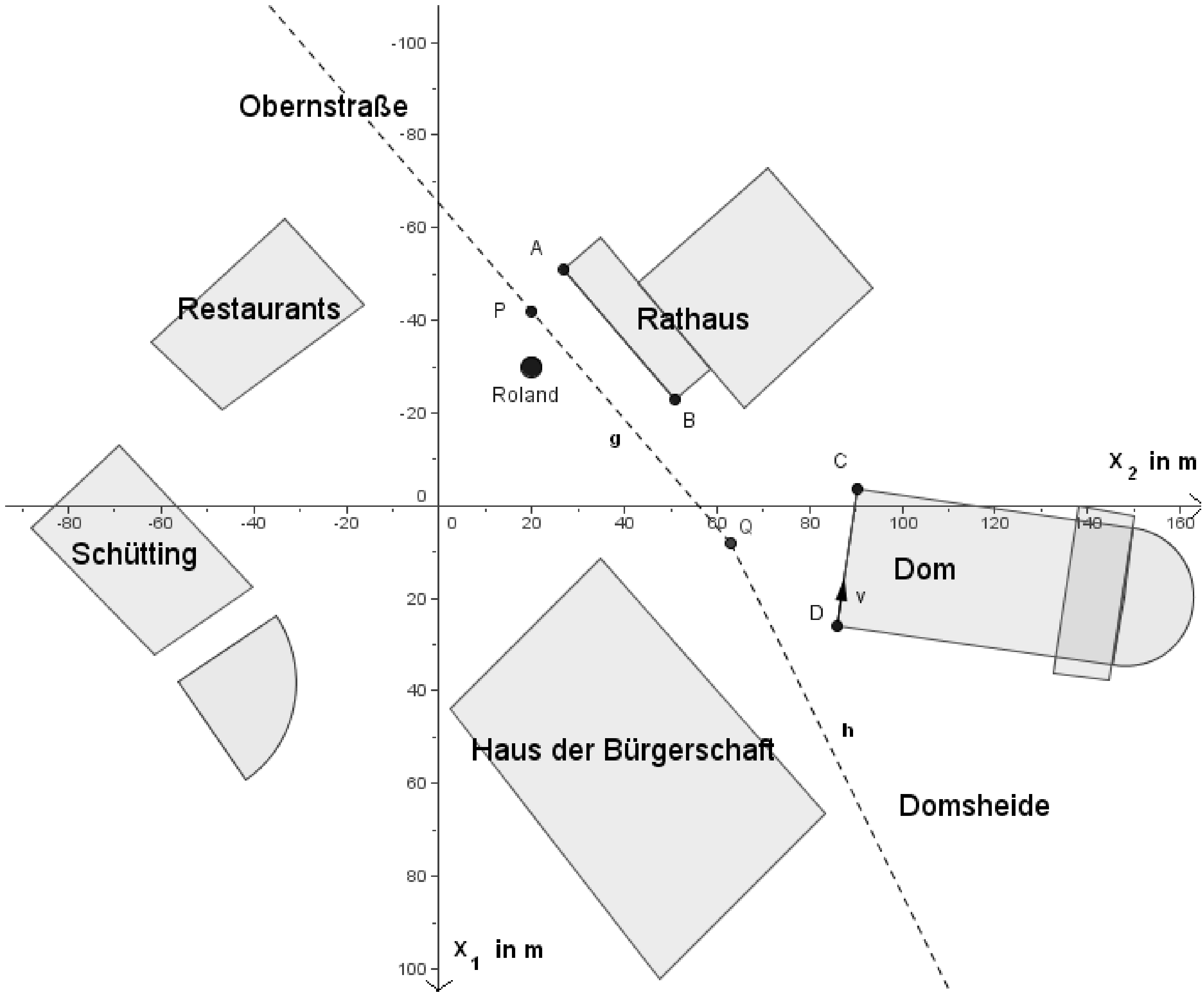
b) Von dem Straßenbahngleis vor dem Rathaus nimmt die Höhe des Marktplatzes nach Südwesten leicht ab. Dieser schräge Teil des Marktplatzes soll durch eine Ebene E beschrieben werden, die die Gerade g und den Mittelpunkt des Platzes $O(0|0|0)$ enthält.
Bestimmen Sie eine Ebenengleichung in Parameterform und Koordinatenform für die Ebene E.
(Hinweis: Für g kann die Form $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -56 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$ benutzt werden) (7 Punkte)

c) Die Turmseite des Domes steht auf der Strecke $\overline{CD}$ mit den Fußpunkten $C(-4|90|1)$ und $D(26|86|1)$. Vier große Torbögen gliedern die Turmseite in vier gleichlange Teile.
Berechnen Sie die Länge der Turmseite.
Ermitteln Sie die drei Punkte, die die Strecke $\overline{CD}$ in vier gleich lange Strecken teilt. (6 Punkte)

d) Vor dem Rathaus steht das Denkmal „Roland von Bremen“ mit standhaftem Blick auf den Dom. Der Roland wurde genau vertikal, d.h. senkrecht auf der x_1-x_2-Ebene errichtet.
Ermitteln Sie den Neigungswinkel der Figur gegen den leicht abschüssigen Marktplatz. (Falls Sie die Ebenengleichung in Teil b nicht gefunden haben, benutzen Sie stattdessen $E: \frac{6}{7}x_1 - x_2 + 56x_3 = 0$).
(5 Punkte)

Material zur Aufgabe Marktplatz

Abbildung des Marktplatzes



Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 5**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
5a	Mit P als Stützvektor und $\overrightarrow{AB}$ als Richtungsvektor ergibt sich die Geradengleichung $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -42 \\ 20 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 28 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$. Der Ansatz $\begin{pmatrix} -42 \\ 20 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 28 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 \\ 98 \\ 0,5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 91 \\ 42 \\ -0,6 \end{pmatrix}$ führt zu $s = -\frac{5}{6}$ und $t = \frac{43}{24}$. Einsetzen führt zu dem Schnittpunkt $Q(\frac{49}{6} \mid 63 \mid 1)$.	3	4	
5b	Wählt man den Ortsvektor des Ursprungspunktes als Stützvektor, den Richtungsvektor von g und $\overrightarrow{PO}$ als nicht kollineare Spannvektoren, so erhält man die Parametergleichung $E: \vec{x} = s \begin{pmatrix} 42 \\ -20 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad s, t \in \mathbb{R}$. Auflösen zweier Komponentengleichungen nach s und t, und Einsetzen in die dritte Komponentengleichung führt zu einer Koordinatenform der Ebene: $E: 6x_1 - 7x_2 + 392x_3 = 0$.	3	4	
5c	Die Länge der Strecke ist gleich der Länge des Vektors $\overrightarrow{CD}$: $\left\|\overrightarrow{CD}\right\| = \left\| \begin{pmatrix} 26 \\ 86 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 90 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 30 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{916} \approx 30,27$. Der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{CD}$ errechnet sich mit $\vec{m} = \frac{1}{2}\left(\vec{c} + \vec{d}\right) = \begin{pmatrix} 11 \\ 88 \\ 1 \end{pmatrix}$, die Mittelpunkte der Strecken $\overline{CM}$ und $\overline{MD}$ sind $M_1\left(3,5 \middle\| 89 \middle\| 1\right)$ und $M_2\left(18,5 \middle\| 87 \middle\| 1\right)$.	2	3	1
5d	Für den Winkel zwischen Roland und Normalenvektor der Ebene gilt: $\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 392 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 392 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{392}{\sqrt{153749}} \approx 0,99972$ Daraus ergibt sich $\alpha \approx 1,35°$. Der gesuchte Winkel ist dann $\beta = 90° - \alpha \approx 88,65°$.	2	2	1
	Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	**10**	**13**	**2**

Protokollbogen zur Auswahl der Aufgaben für die Prüfungsakten der Schule

Auswahl der Aufgaben:

- Fach: **Mathematik** (CAS)
- Schule: ____
- Schulinterne Kursbezeichnung: ______________________________
- **Fachlehrerin / Fachlehrer** (Name, Vorname):

  ____

  Ich wähle für die Bearbeitung durch die Schülerinnen und Schüler die 3 Aufgaben

  Nr. ________ , ________ und ________ aus.

  Bremen / Bremerhaven, den 20.4.2010

  ____
  (Unterschrift Fachlehrerin / Fachlehrer)

- **Korreferentin / Korreferent** (Name, Vorname):

  ____

  Ich schließe mich der Auswahl an / nicht an (bitte Unzutreffendes streichen). Im Falle der Nichtzustimmung füge ich eine kurze schriftliche Begründung auf der Rückseite des Protokolls bei.

  Bremen / Bremerhaven, den 20.4.2010

  ____
  (Unterschrift Korreferentin / Korreferent)

- **Auswahl durch die Vorsitzende / den Vorsitzenden des Fachprüfungsausschusses** (im Falle der Nichtübereinstimmung zwischen Fachprüferin/Fachprüfer und Korreferentin / Korreferenten)

  Ich wähle die 3 Aufgaben Nr. ____________ zur Bearbeitung durch die Schülerinnen und Schüler aus und füge eine kurze schriftliche Begründung auf der Rückseite des Protokolls bei.

  Bremen / Bremerhaven, den 20.4.2010

  ____
  (Unterschrift Vorsitzende(r) Fachprüfungsausschuss)

Rückmeldebogen für die Zentralabiturkommission Mathematik zur Auswahl der Aufgaben

Auswahl der Aufgaben:

- Fach: **Mathematik GK** (CAS)
- Schule: ____
- Schulinterne Kursbezeichnung: ______________________________
- Anzahl der Schülerinnen und Schüler: __________________________
- Der Fachprüfungsausschuss hat für die Bearbeitung durch die Schülerinnen und Schüler die drei Aufgaben Nr. ________ , ________ und ________ ausgewählt.

Bremen / Bremerhaven, den 20.4.2010

____
(Unterschrift)

Schicken Sie diesen Bogen bitte möglichst umgehend per FAX an folgende Adresse:

Landesinstitut für Schule, Herrn Löwer

FAX 0421-361-6451

Die Rückmeldebögen werden im LIS gesammelt und den Zentralabiturkommissionen zur Verfügung gestellt. Sie sind eine Grundlage für die Auswertungsgespräche mit den Schulen und die Erstellung neuer Aufgaben.