Die Senatorin
für Bildung und Wissenschaft

Freie
Hansestadt
Bremen

Schriftliche Abiturprüfung 2009 im dritten Prüfungsfach

Grundkurs Mathematik (GTR)

Dienstag, 21. April 2009, 9.00 Uhr

Unterlagen für Lehrerinnen und Lehrer

- Diese Unterlagen sind nicht für die Prüflinge bestimmt -

Diese Unterlagen enthalten …

- Allgemeines,
- die Bewertung der Prüfungsleistung,
- Aufgaben mit Lösungsskizzen,
- einen Protokollbogen zur Auswahl der Aufgaben für die Prüfungsakten Ihrer Schule,
- einen Rückmeldebogen für die Zentralabiturkommission zur Auswahl der Aufgaben.

Allgemeines

- Wählen Sie gemeinsam mit Ihrer Korreferentin / Ihrem Korreferenten aus den fünf vorgelegten Aufgaben drei zur Bearbeitung aus. Die Aufgaben kommen aus mindestens zwei verschiedenen Themenbereichen, mindestens eine der Aufgaben ist aus dem Themenbereich Analysis. Kommt es zu keiner Einigung, bestimmt die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses die Auswahl der Aufgaben (§ 10 Abs. 2 Nr. 1 AP-V). Protokollieren Sie auf dem beigefügten Protokollformular, welche Aufgaben Sie gewählt haben (Prüferin/Prüfer und Korreferentin/Korreferent und ggf. auch die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses unterschreiben das Protokoll).
- Füllen Sie bitte für die Zentralabiturkommission Mathematik den beigefügten Rückmeldebogen zur Auswahl der Aufgaben aus und schicken ihn an die dort genannte Adresse.
- Fragen Sie vor Verteilung der Aufgaben nach der Arbeitsfähigkeit der Prüflinge und weisen Sie diese auf die Regelungen des § 5 AP-V (Täuschung und Behinderung) hin.
- Machen Sie die Prüflinge auf die Arbeitshinweise aufmerksam, die am Anfang der Unterlagen für die Prüfungsteilnehmer stehen. Geben Sie ihnen ggf. die nötigen Angaben zur Schulnummer sowie zur genauen Kursbezeichnung.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: Graphikfähiger Taschenrechner (GTR), dessen Betriebsfähigkeit die Schülerin / der Schüler gewährleistet, Formelsammlung, Zeichengerät, Rechtschreiblexikon

Die Bewertung der Prüfungsleistung

Die Lösungsskizze stellt eine Lösungsvariante dar; andere gleichwertige Lösungen sind entsprechend zu bewerten. Die Bewertungsanteile pro Teilaufgabe sind obligatorisch.

Für die Festlegung der Gesamtleistung werden den erzielten Bewertungseinheiten die entsprechenden Notenstufen gemäß folgender Tabelle zugeordnet.

Bewertungs-einheiten	KMK Punkte
0 bis 14,5	00
15 bis 20	01
20,5 bis 24,5	02
25 bis 29,5	03
30 bis 33,5	04
34 bis 37	05
37,5 bis 41	06
41,5 bis 44,5	07
45 bis 48,5	09
49 bis 52	09
52,5 bis 56	10
56,5 bis 79	11
60 bis 63,5	12
64 bis 67	13
67,5 bis 71	14
71,5 bis 75	15

Aufgabe 1 - zum Themenbereich Analysis

DSL-Boom

In regelmäßigen Abständen werden neue Zahlen zu den DSL-Internet-Zugängen veröffentlicht. Die nebenstehende Grafik zeigt die Entwicklung vom Jahr 2002 bis zum Jahr 2006.

Quelle: BITKOM (Bundesverband der Informationswirtschaft, Telekommunikation und neue Medien)

Durch die Analyse der Daten eines zurückliegenden Zeitraums versucht man Vorhersagen für die Zukunft abzuleiten. Dazu werden mathematische Modelle entwickelt.

In einer ersten Modellannahme soll exponentielles Wachstum angenommen werden. Die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 3{,}3 \cdot e^{0{,}37 \cdot x}$ beschreibt die Anzahl DSL-Anschlüsse in Millionen zum Zeitpunkt x in Jahren ($x = 0$ entspricht Ende 2002).

a) Zeigen Sie, dass die angenommene Funktion f für die Vorhersage der DSL-Anschlüsse der Jahre 2002 und 2005 eine gute Annäherung darstellt. Stellen Sie die Funktion f grafisch dar, indem Sie den von Ihrem Rechner dargestellten Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem übertragen. Ergänzen Sie in der Darstellung den Verlauf bei linearem Wachstum mit den Daten der Jahre 2002 und 2005. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $g(x)$ des linearen Wachstums.

b) Bestimmen Sie für die Modellannahme des exponentiellen Wachstums den Wachstumsfaktor und die prozentuale Zunahme der DSL-Anschlüsse pro Jahr.
Bestimmen Sie außerdem die Verdopplungszeit für die Zahl der DSL-Anschlüsse.

c) Bestimmen Sie, wann nach diesem Wachstumsmodell dreiviertel aller Haushalte in Deutschland einen DSL-Anschluss haben müssten, wenn von insgesamt 40 Mio. vorhandenen Haushalten ausgegangen wird. Geben Sie die Umformungsschritte an, die auf die Lösung führen.
Begründen Sie, warum die weitere Entwicklung über einen längeren Zeitraum vermutlich mit der obigen Funktionsgleichung nicht vorhergesagt werden kann.

d) Bestimmen Sie für die Funktion f die erste Ableitung und erläutern Sie, welche Bedeutung diese für die Entwicklung der DSL-Anschlusszahlen hat.

In einem anderen Modell wird angenommen, dass sich die zukünftige Entwicklung der DSL-Anschlusszahlen besser beschreiben lässt durch eine Funktionsgleichung vom Typ

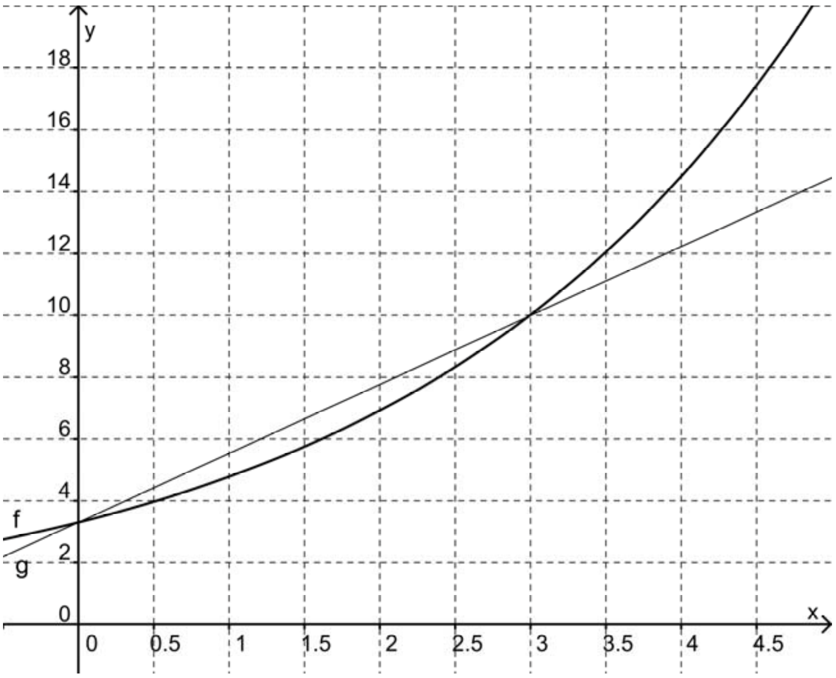
$$h(x) = 35 - (35 - a) \cdot e^{-0{,}13 \cdot x}.$$

x in Jahren ($x = 0$ entspricht hier Ende 2005), $h(x)$ in Millionen DSL-Anschlüsse.

Benutzen Sie diese Funktionsgleichung für die nachfolgenden Untersuchungen.

e) Bestimmen Sie mit der Anzahl der DSL-Anschlüsse am Ende des Jahres 2005 der obigen Statistik der BITKOM einen Wert für a in Mio. Anschlüssen.
Ermitteln Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to \infty} h(x)$ und beurteilen Sie, wie viele Haushalte nach diesem Modell langfristig ohne DSL-Anschluss verbleiben, wenn pro Haushalt immer nur ein DSL-Anschluss eingeplant wird. Gehen Sie dabei wieder von insgesamt 40 Mio. vorhandenen Haushalten in Deutschland aus. Nennen Sie Gründe dafür, dass dieser Modellierungsansatz der Realität vermutlich näher kommen wird.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 1**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
1a	Durch Einsetzen der x-Werte (Anzahl der Jahre) in die Funktionsgleichung ergeben sich die $f(x)$-Werte (Anzahl der DSL-Anschlüsse), in Mio. Für das Jahr $2002: x=0 \Leftrightarrow f(0)=3{,}3\cdot e^{0{,}37\cdot 0}=3{,}3$ Für das Jahr $2005: x=3 \Leftrightarrow f(3)=3{,}3\cdot e^{0{,}37\cdot 3}=10$  Für die lineare Funktion $g(x)=m\cdot x+b$ ergibt sich $b=3{,}3$ direkt aus dem Sachzusammenhang und $m=\frac{10-3{,}3}{3-0}=\frac{6{,}7}{3}\approx 2{,}23$. Damit wird $g(x)=2{,}23\cdot x+3{,}3$	3	2	
1b	Der Wachstumsfaktor ergibt sich zu $e^{0{,}37}\approx 1{,}45$, d.h. die Zahl der DSL-Anschlüsse wächst nach diesem Modell pro Jahr mit dem Faktor $1{,}45$, bzw. um ca. 45%. Für die Verdoppelungszeit x_d ergibt sich $2=e^{0{,}37\cdot x_d} \Leftrightarrow x_d\approx 1{,}87$, also jeweils nach einer Zeit von ca. $1{,}9$ Jahren oder gut 22 Monaten.	2	3	

Lösungsskizze		Bewertung I	II	III
1c	Dreiviertel aller Haushalte in Deutschland ergeben 30 Mill. DSL-Anschlüsse. Daraus ergibt sich: $30 = 3{,}3 \cdot e^{0{,}37 \cdot x} \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln \frac{30}{3{,}3}}{0{,}37} \approx 5{,}97$, d.h. nach ca. 6 Jahren, also im Jahre 2008, haben dreiviertel aller Haushalte in Deutschland nach diesem Modell einen DSL-Anschluss. Beim exponentiellen Wachstum steigt die Zahl der DSL-Anschlüsse Jahr für Jahr mit dem Wachstumsfaktor weiter an. Es hat keine Obergrenze und kennt keine Marktsättigung. Als Beschränkung des Wachstums können die Anzahl aller Haushalte, mögliche wachstumshemmende Faktoren wie Finanzkrisen, neue Technologien, etc. genannt werden.	1	3	1
1d	Bestimmung der ersten Ableitung von f ergibt $f'(x) = 3{,}3 \cdot 0{,}37 \cdot e^{0{,}37 \cdot x} \approx 1{,}22 \cdot e^{0{,}37 \cdot x}$ Bedeutung der ersten Ableitung im Sachzusammenhang: Momentane Wachstumsgeschwindigkeit, bzw. Anstieg der DSL-Anschlusszahlen in Mio. pro Jahr in Deutschland.	2	3	
1e	Für das Jahr 2005 ist $x = 0$ und $h(0) = 10$. Eingesetzt in die Funktionsgleichung ergibt sich $10 = 35 - (35 - a)e^{-0{,}13 \cdot 0}$. Umgestellt ergibt sich $a = 10$. Der Grenzwert liegt bei $\lim\limits_{x \to \infty} h(x) = 35$. Bei 40 Mio. Haushalten in Deutschland bleiben nach diesem Modell 5 Mio. Haushalte langfristig ohne DSL-Anschluss. Für die Richtigkeit dieses Modellierungsansatzes spricht im Wesentlichen, dass die Funktion einen Grenzwert hat und nicht unendlich weiter wächst. Der Ansatz berücksichtigt die beschränkte Anzahl an Haushalten.	2	2	1
Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**10**	**13**	**2**

Aufgabe 2 - zum Themenbereich Analysis

Hochwasser

Wasserstandsanzeiger Bremerhaven

Auf der Höhe von Bremerhaven erzeugt der Tidenverlauf (Zyklus von Ebbe und Flut) in Verbindung mit den vorherrschenden Winden unterschiedliche Fließgeschwindigkeiten der Weser. Vom Wasser- und Schifffahrtsamt Bremerhaven wurden zu unterschiedlichen Zeitpunkten die Fließgeschwindigkeiten der Weser in $\frac{m^3}{s}$ [Kubikmeter pro Sekunde] gemessen.

a) Zu Beginn der Messung hatte die Weser eine Fließgeschwindigkeit von $6600\frac{m^3}{s}$. Eine Stunde nach Beginn der Messung stieg die Fließgeschwindigkeit auf ihren höchsten Wert von $9000\frac{m^3}{s}$ an. Drei Stunden nach Beginn der Messung hatte die Weser wieder die Fließgeschwindigkeit erreicht, die sie zu Beginn der Messung hatte.
Das Wasser- und Schifffahrtsamt möchte die Fließgeschwindigkeit der Weser auf der Höhe von Bremerhaven mit Hilfe der beschriebenen Messergebnisse näherungsweise durch eine ganzrationale Funktion f dritten Grades beschreiben.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f in Abhängigkeit von der Zeit x, wobei x die Zeit in Stunden nach Beginn der Messung und $f(x)$ die Fließgeschwindigkeit in $\frac{m^3}{s}$ zum Zeitpunkt x angibt.

Messungen an einem anderen Tag bei gleichen Tidenverhältnissen aber unterschiedlichen Winden ergaben für die Fließgeschwindigkeit der Weser die Funktion g mit

$$g(x) = 600x^3 - 3500x^2 + 5400x + 6600\,,\ 0 \le x \le 3\,.$$

Wie oben gibt x die Zeit in Stunden nach Beginn der Messung und $g(x)$ die Fließgeschwindigkeit in $\frac{m^3}{s}$ zum Zeitpunkt x an.

Verwenden Sie die Funktion g in den folgenden Aufgabenteilen.

b) Berechnen Sie die Fließgeschwindigkeit der Weser zwei Stunden nach Beginn dieser Messung.
Ermitteln sie alle Zeitpunkte, an denen die Fließgeschwindigkeit der Weser $8000\frac{m^3}{s}$ beträgt.
Runden Sie Ihre Ergebnisse auf die zweite Nachkommastelle.

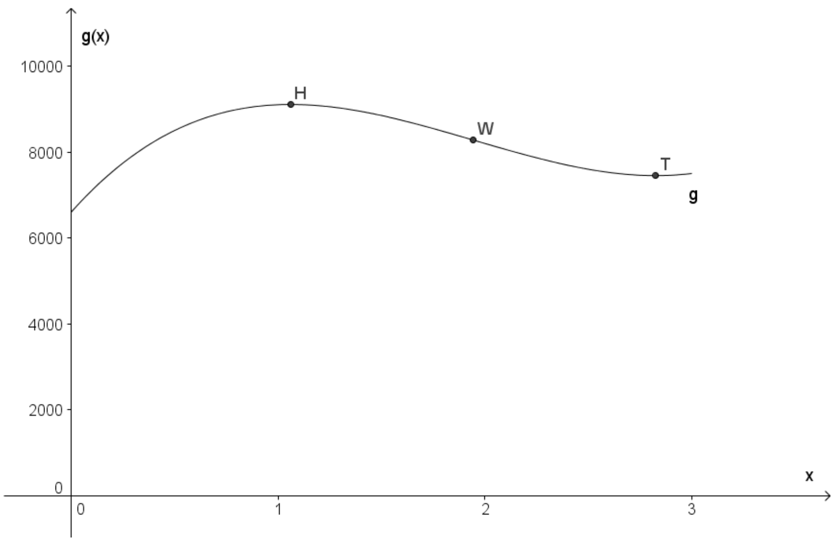
c) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion g in seinem wesentlichen Verlauf, indem Sie den von Ihrem Rechner dargestellten Graphen in ein Koordinatensystem übertragen.
Markieren Sie alle Hoch-, Tief- und Wendepunkte.

d) Weisen Sie nach, dass der Wendepunkt von g zum Zeitpunkt $x_W = \frac{35}{18}$ liegt und berechnen Sie die Fließgeschwindigkeit zu dieser Zeit.
Erläutern Sie die Bedeutung des Wendepunktes für die Fließgeschwindigkeit.

e) Berechnen Sie den Wert $A = 3600 \cdot \int_1^3 g(x)dx$ mit dem TR und erläutern Sie seine Bedeutung im Sachzusammenhang.

$G(x)$ ist Term einer Stammfunktion von $g(x)$. Geben Sie an, welcher andere Zusammenhang zwischen $G(x)$ und $g(x)$ besteht und wie das Integral $\int_1^3 g(x)dx$ mit diesem Term berechnet werden kann.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 2**

<table>
<tr><th rowspan="2" colspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>2a</td><td>$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
Die drei gegebenen Messungen liefern $f(0) = 6600$ und somit $d = 6600$,
$f(1) = 9000 = a + b + c + d$ sowie $f(3) = 6600 = 27a + 9b + 3c + d$.
Die Angabe der größten Fließgeschwindigkeit liefert $f'(1) = 0 = 3a + 2b + c$.
Zu lösen bleibt das LGS
$\begin{bmatrix} 2400 & = & a+b+c \\ 0 & = & 27a+9b+3c \\ 0 & = & 3a+2b+c \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & = & 600 \\ b & = & -3600 \\ c & = & 5400 \end{bmatrix}$
Funktionsgleichung: $f(x) = 600x^3 - 3600x^2 + 5400x + 6600$.
Nachweis der Hochpunkteigenschaft.</td><td>3</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>2b</td><td>$g(2) = 8200$. Zwei Stunden nach Beginn der Messung beträgt die
Fließgeschwindigkeit der Weser $8200 \frac{m^3}{s}$.
Mit dem TR erhält man z.B. mit der solve- Funktion:
$600x^3 - 3500x^2 + 5400x + 6600 = 8000 \Leftrightarrow x = 0{,}32 \vee x = 2{,}15 \vee x = 3{,}36$
Zu den Zeitpunkten $x_1 = 0{,}32$ und $x_2 = 2{,}15$, die im angegebenen Zeitintervall
liegen, beträgt die Fließgeschwindigkeit der Weser $8000 \frac{m^3}{s}$.</td><td>2</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>2c</td><td>Skizze:

</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr>
</table>

Lösungsskizze		Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
2d	$x_W = \frac{35}{18}$ ist Wendestelle, da $g''(\frac{35}{18}) = 3600 \cdot \frac{35}{18} - 7000 = 0$ und jede Funktion dritten Grades genau eine Wendestelle besitzt. Die Fließgeschwindigkeit beträgt ca. $8278 \frac{m^3}{s}$, da $g(\frac{35}{18}) = \frac{2011550}{243} \approx 8277{,}98$. Der Wendepunkt ist der Punkt mit extremaler Fließgeschwindigkeitsänderung. Oder: Wegen $g'''(x_W) = 3600 > 0$ hat g' an der Stelle x_W ein rel. Minimum, die Abnahme der Fließgeschwindigkeit ist folglich an der Stelle x_W am größten.	2	2	
2e	Mit dem TR ergibt sich: $A = 3600 \cdot \int_1^3 g(x)dx = 59280000$. $59280000\ m^3$ ist diejenige Wassermenge, welche innerhalb der Zeit von einer Stunde nach Beginn der Messung bis drei Stunden nach Beginn der Messung an der Messstelle vorbeigeflossen ist. $G'(x) = g(x)$ und $\int_1^3 g(x)dx = G(3) - G(1)$.	1	2	2
Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**10**	**13**	**2**

Aufgabe 3 - zum Themenbereich Wahrscheinlichkeitsrechnung / Statistik

Studienwünsche

Für die Abiturientinnen und Abiturienten des Jahres 1999 lag die Quote derjenigen, die fest geplant hatten ein Studium aufzunehmen, bei 65%. Diesen Prozentsatz nennt man „Brutto-Studierquote".

Nehmen Sie für die Aufgabenteile a) bis d) folgendes an:
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig befragte Person des Abiturjahrgangs 2009 zu denjenigen gehört, die studieren wollen, beträgt wie 10 Jahre zuvor $0,65$.

a) Erläutern Sie, warum man die Befragung von n zufällig ausgewählten Personen des Abiturjahrgangs 2009 nach ihrer Studierabsicht als binomialverteilten Zufallsversuch auffassen kann.

Geben Sie die zugehörige Zufallsgröße an.

b) Es werden 8 Personen des Abiturjahrgangs 2009 zufällig befragt. Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür an, dass von ihnen

- genau 8 studieren wollen.
- weniger als 3 studieren wollen.

Bestimmen Sie $P(3 \le X \le 7)$ und erläutern Sie die Bedeutung dieses Werts im Sachzusammenhang.

c) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass von 3 Personen des Abiturjahrgangs 2009 mindestens eine studieren will.

Ermitteln Sie eine allgemeine Berechnungsformel, die angibt, wie die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt wird, dass von n Personen des Abiturjahrgangs 2009 mindestens eine studieren will.

Bestimmen Sie die kleinste Anzahl an Personen des Abiturjahrgangs 2009, die zufällig ausgewählt und befragt werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% oder mehr mindestens eine studierwillige Person unter ihnen ist.

d) Es werden 100 zufällig ausgewählte Personen des Abiturjahrgangs 2009 befragt.
Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der Personen, die studieren wollen.

Jede dieser 100 befragten Personen, die erklärt, studieren zu wollen, soll im Anschluss an die Befragung ein Informationspaket der Universität erhalten. Bestimmen Sie die Mindestanzahl der Informationspakete, die bereit gehalten werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 90% jede studierwillige Person ein Informationspaket bekommt.

Man weiß, dass die Brutto-Studierquote seit 2000 gestiegen ist. Eine sozialwissenschaftliche Forschungsgruppe vermutet, dass auch im Jahr 2009 die Bruttostudierquote über 65% liegen wird. Um diese Vermutung zu belegen, befragen sie 100 zufällig ausgewählte Personen des Abiturjahrgangs 2009.

e) Beschreiben Sie den Aufbau eines Hypothesentests für diese Situation. Geben Sie dafür die Hypothesen und die Zufallsvariable an und bestimmen Sie eine Entscheidungsregel für die Stichprobe vom Umfang 100 und einem Signifikanzniveau von 5%.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 3**

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>3a</td><td>Mögliche Erläuterung:
Stufen des Versuchs: $1.$Person, $2.$ Person, ..., $n-$ te Person
Es gibt zwei mögliche Ausfälle auf jeder Stufe: Es wird eine Abiturientin / ein Abiturient betrachtet, die / der studieren will oder die / der nicht studieren will.
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person gefragt wird, die studieren möchte, ist bei jeder Person gemäß Annahme gleich, sofern der Stichprobenumfang klein ist gegenüber der Grundgesamtheit, wovon man hier ausgehen kann.
X : Anzahl der Studierwilligen unter n befragten Personen.</td><td>1</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>3b</td><td>X siehe oben; $p=0,65$; $n=8$.
Mindestens einmal muss in der Aufgabenbearbeitung für $b_{n,p}$ – verteilte Zufallsgrößen X die (vom TR abhängige) Syntax protokolliert werden, die Formeln können so allgemein wie hier oder aber für die Spezialfälle angegeben werden:
$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ =binompdf (n,p,k)
$P(X\le k)=\sum_{i=0}^{k}(\binom{n}{i}p^i\cdot(1-p)^{n-i})$ =binomcdf (n,p,k)
$P(k_u\le X\le k_o)=\sum_{i=k_u}^{k_o}(\binom{n}{i}p^i\cdot(1-p)^{n-i})$ =binomcdf (n,p,k_u,k_o) oder
$=P(X\le k_o)-P(X\le k_u-1)$ =binomcdf (n,p,k_o) -binomcdf (n,p,k_{u-1})
$P(X=8)\approx 0,032$
$P(X<3)\approx 0,025$
$P(3\le X\le 7)\approx 0,943$
Der Wert von $P(3\le X\le 7)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass von 8 befragten Abiturientinnen und Abiturienten des Jahrgangs 2009 zwischen 3 und 7 (jeweils einschließlich) studieren wollen.</td><td>5</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>3c</td><td>X, p siehe oben, $n=3$
$P(X\ge 1)\approx 0,957$
allgemein: $P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-(1-p)^n$
Bestimmung der Mindestanzahl der Personen, die zufälig ausgewählt und befragt werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% oder mehr mindestens eine studierwillige Person unter ihnen ist:
$1-0,35^n\ge 0,99\Rightarrow\ n\ge 5$
Also müssen mindestens 5 Personen befragt werden.</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>3d</td><td>Für X wie oben und $n=100$ gilt: $\mu=n\cdot p=65$.
Gesucht ist das kleinste k , so dass gilt $P(X\le k)\ge 0{,}9$ (evtl. Skizze).
Laut Tabelle gilt: $P(X\le 70)=0{,}8764$, aber $P(X\le 71)=0{,}9152$.
Es müssen also mindestens 71 Informationspakete bereit gehalten werden.</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3e</td><td>Vermutung (H_1) : Die Brutto- Studierquote 2009 liegt über 65% ; $p>0{,}65$
H_0 : Die Brutto-Studierquote 2009 liegt (höchstens) bei 65% , $p_0=0{,}65$
Testgrößen:
X : Anzahl derjenigen unter den im Jahr 2009 befragten Abiturienten / Abiturientinnen, die angeben studieren zu wollen.
$p_0=0{,}65;\ n=100$
Signifikanzniveau $\alpha=5\%$
Bestimmung der Entscheidungsregel:
Gesucht ist das kleinste k so dass gilt: $P(X\ge k)=1-P(X\le k-1)\le 5\%$ oder $P(X\le k-1)\ge 95\%$.
Mit den entsprechenden Tabellenwerten
$P(X\le 72)=0{,}9442;\ P(X\le 73)=0{,}9649;\ \Rightarrow k=74$
Entscheidungsregel:
Wenn 74 oder mehr der 100 Befragten des Abiturjahrgangs 2009 erklären studieren zu wollen, nehmen wir an, dass sich die Brutto-Studierquote gegenüber 1999 erhöht hat.</td><td>1</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>10</td><td>13</td><td>2</td></tr>
</table>

Aufgabe 4 - zum Themenbereich Lineare Algebra

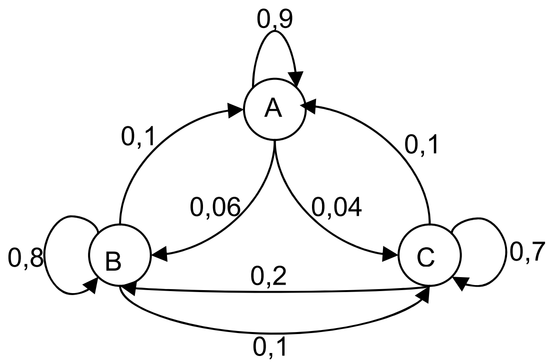
Abibienen

Ein aus den fleißigen Bienen mutierter Insektenstamm, die nachtaktiven „Abibienen", wurde im Jahr 2009 auf der Insel „Bremensia" über einen längeren Zeitraum von Abibienenforschern beobachtet:

Die 1200 Abibienen verteilten sich jeden Morgen gegen acht Uhr auf einen ihrer drei Erholungsplätze, genannt A, B, C.

Um das tägliche Wanderverhalten der Abibienen zwischen den drei Erholungsplätzen zu erforschen, fingen die Forscher alle 1200 Abibienen ein und versahen je ein Drittel von ihnen mit einer eindeutigen Markierung für jeweils einen der drei Plätze A, B oder C.

Am Morgen des $0.$ Tages ihrer Untersuchung setzten die Forscher je 400 Abibienen an den drei Erholungsplätzen entsprechend ihrer Markierungen aus. Nun zählten die Forscher am folgenden Morgen ($1.$ Tag), wie viele Abibienen zu ihrem Erholungsplatz zurückgekehrt und wie viele einen anderen Erholungsplatz aufgesucht hatten. Ihre Ergebnisse fassten sie im nebenstehenden Übergangsdiagramm zusammen.



Erstaunlicherweise fanden die Abibienenforscher auch an den weiteren Tagen das Übergangsdiagramm bestätigt. Gehen Sie daher im Folgenden davon aus, dass sich die Abibienen täglich entsprechend dem Übergangsdiagramm auf die drei Erholungsplätze verteilen.

a) Berechnen Sie anhand des Übergangsdiagramms, wie viele Abibienen am $1.$ Tag am Platz C gezählt wurden.

Vervollständigen Sie die Matrix $U = \begin{pmatrix} 0,70 & 0,04 & 0,10 \\ 0,10 & ... & ... \\ 0,20 & ... & ... \end{pmatrix}$ zu einer zum Übergangsdiagramm gehörigen Übergangsmatrix.
Erläutern Sie die Bedeutung der Werte in der ersten Zeile von U für das Wanderverhalten der Abibienen.

Verwenden Sie im folgenden die Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,10 \\ 0,06 & 0,80 & 0,20 \\ 0,04 & 0,10 & 0,70 \end{pmatrix}$, die ebenfalls das Wanderverhalten beschreibt.

b) Berechnen Sie die Vektoren $\vec{v}_1 = M * \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = M * \vec{v}_1$.

Geben Sie eine Möglichkeit an, $\vec{v}_2$ zu berechnen, ohne $\vec{v}_1$ zu verwenden.

Interpretieren Sie die Komponenten von $\vec{v}_1$ auf das Problem bezogen.

c) Bestimmen Sie die stationäre Abibienenverteilung der Matrix M .

Bei ihren Untersuchungen in 2009 zählten die Forscher, bevor sie ihren oben beschriebenen Eingriff starteten, an jedem Morgen stets
600 der Tiere an Platz A, 390 an Platz B und die restlichen 210 an Platz C.

Vergleichen Sie diese Verteilung mit der stationären und interpretieren Sie das Ergebnis des Vergleichs.

d) Ermitteln Sie die Übergangsmatrizen für einen Zeitraum von 31 und von 62 Tagen auf drei Nachkommastellen genau.
Berechnen Sie die zugehörigen Abibienenverteilungen $\vec{v}_{31}$ und $\vec{v}_{62}$ (auf ganzzahlige Werte gerundet).

Vergleichen Sie $G = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{13}{40} & \frac{13}{40} & \frac{13}{40} \\ \frac{7}{40} & \frac{7}{40} & \frac{7}{40} \end{pmatrix}$ mit den in diesem Aufgabenteil berechneten Matrizen.

Berechnen Sie

sowohl $G * \vec{x}$ für jede beliebige Abibienenverteilung $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit $x + y + z = 1200$.

als auch $M * G$.

Erläutern Sie die Bedeutung der Matrix G für den Übergangsprozess.

e) Erläutern Sie den Begriff „inverse Matrix" und erklären Sie, wozu die inverse Matrix von M in diesem Sachzusammenhang verwendet werden kann.

Ein paar Tage nach einem heftigen Sturm im April 2009 finden die Abibienenforscher die folgende Verteilung vor:
80 Abibienen am Platz A, 637 am Platz B und die restlichen 483 am Platz C.

Nach einer Berechnung von $M^{-1} * \begin{pmatrix} 80 \\ 637 \\ 483 \end{pmatrix}$ behaupten sie, dass der Sturm das Wanderverhalten der Abibienen verändert hat.

Begründen Sie, wie die Forscher zu ihrer Behauptung gekommen sind.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 4**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
4a	Aus dem Diagramm ergibt sich gemäß der Prozente, die an den bei C ankommenden Pfeilen stehen, die Anzahl für C: $0,7 \cdot 400 + 0,04 \cdot 400 + 0,1 \cdot 400 = 336$ $U = \begin{pmatrix} 0,70 & 0,04 & 0,10 \\ 0,10 & 0,90 & 0,10 \\ 0,20 & 0,06 & 0,80 \end{pmatrix}$. Mögliche Erläuterungen: In der ersten Zeile stehen die Wahrscheinlichkeiten, mit der sich eine Abibiene für C entscheidet, wenn sie den vorigen Tag am Platz C, A bzw. B (Reihenfolge der Spalten) verbracht hat. In der ersten Spalte stehen die Wahrscheinlichkeiten, mit der eine Abibiene sich für C, A bzw. B (Reihenfolge der Zeilen) entscheidet, wenn sie den vorigen Tag am Platz C verbracht hat.	4	2	
4b	$\vec{v}_1 = M * \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 440 \\ 424 \\ 336 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = M * \begin{pmatrix} 440 \\ 424 \\ 336 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 472 \\ 433 \\ 295 \end{pmatrix}$ Andere Berechnungsmöglichkeit: $\vec{v}_2 = M^2 * \vec{v}_0$. Am $1.$ Tag finden sich 440 Abibienen am Platz A, 424 am Platz B und 336 am Platz C ein (Reihenfolge durch die Matrix festgelegt).	2	2	
4c	Für eine stationäre Verteilung $\vec{v}_s = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ von M gilt: $M * \vec{v}_s = \vec{v}_s$ (oder $(M - E_3) * \vec{v}_s = \vec{0}$) Für die Abibienen gilt außerdem: $x + y + z = 1200$. Der Ansatz führt auf die erweiterte Matrix $\left(\begin{array}{ccc\|c} -0,1 & 0,1 & 0,1 & 0 \\ 0,06 & -0,2 & 0,2 & 0 \\ 0,04 & 0,1 & -0,3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1200 \end{array}\right)$ (oder ein zu ihr äquivalentes LGS) mit der Zeilennormalform (rref-Funktion des TR): $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 0 & 600 \\ 0 & 1 & 0 & 390 \\ 0 & 0 & 1 & 210 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ und der eindeutigen Lösung $\vec{v}_s = \begin{pmatrix} 600 \\ 390 \\ 210 \end{pmatrix}$. Die Abibienen hatten sich also vor der Untersuchung auf ihre stationäre Verteilung eingependelt, was darauf hindeutet, dass die stationäre Verteilung auch Grenzverteilung ist.		3	1

	Lösungsskizze	Bewertung I	II	III
4d	$M^{31} \approx \begin{pmatrix} 0,500 & 0,500 & 0,500 \\ 0,325 & 0,325 & 0,325 \\ 0,175 & 0,175 & 0,175 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_{31} = M^{31} * \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 600 \\ 390 \\ 210 \end{pmatrix}$, $M^{62} \approx \begin{pmatrix} 0,500 & 0,500 & 0,500 \\ 0,325 & 0,325 & 0,325 \\ 0,175 & 0,175 & 0,175 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_{62} = M^{62} * \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 600 \\ 390 \\ 210 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{v}_{62} = M^{31} * \vec{v}_{31} \approx \vec{v}_{31}$ oder $M^{62} = (M^{31})^2 \approx \begin{pmatrix} 0,500 & 0,500 & 0,500 \\ 0,325 & 0,325 & 0,325 \\ 0,175 & 0,175 & 0,175 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_{62} = (M^{31})^2 * \vec{v}_0 \approx \begin{pmatrix} 600 \\ 390 \\ 210 \end{pmatrix}$ $G = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{13}{40} & \frac{13}{40} & \frac{13}{40} \\ \frac{7}{40} & \frac{7}{40} & \frac{7}{40} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,500 & 0,500 & 0,500 \\ 0,325 & 0,325 & 0,325 \\ 0,175 & 0,175 & 0,175 \end{pmatrix}$ entspricht M^{31} und M^{62}. $G * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \quad \cdot (x+y+z) \\ 0,325 \cdot (x+y+z) \\ 0,175 \cdot (x+y+z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \quad \cdot 1200 \\ 0,325 \cdot 1200 \\ 0,175 \cdot 1200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 390 \\ 210 \end{pmatrix} = \vec{v}_s$ Man kommt mit G von einer beliebigen Verteilung gleich auf die nach längerer Zeit vorgefundene (stationäre, siehe c)) Verteilung. Daher kann G den langfristigen Übergangsprozess beschreiben. $M * G = \begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,10 \\ 0,06 & 0,80 & 0,20 \\ 0,04 & 0,10 & 0,70 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0,500 & 0,500 & 0,500 \\ 0,325 & 0,325 & 0,325 \\ 0,175 & 0,175 & 0,175 \end{pmatrix} = G$ G muss Grenzmatrix sein, da ein erneuter Übergang mit M den Prozess nicht mehr verändert und damit die Verteilung so bleibt wie durch G festgelegt. Die stationäre Verteilung ist zugleich Grenzverteilung.	4	2	1
4e	Z. B. Eine quadratische Matrix M hat eine inverse Matrix M^{-1}, wenn gilt: $M * M^{-1} = M^{-1} * M = E$. Mit der inversen Matrix kann zu einer Verteilung $\vec{v}$ eines bestimmten Tages die Verteilung des Vortages bestimmt werden. $\vec{v}_{Vortag} = M^{-1} * \vec{v}$: $\vec{v}_{Vortag} = M^{-1} * \begin{pmatrix} 80 \\ 637 \\ 483 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -50 \\ 650 \\ 600 \end{pmatrix}$. Da die Anzahl der Abibienen am Vortag positiv sein muss, kann die Verteilung nicht durch M entstanden sein, der Sturm muss das Wanderverhalten verändert haben.		4	
Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**10**	**13**	**2**

Aufgabe 5 - zum Themenbereich Analytische Geometrie

Camping-Zelt

Eine kleine Gruppe junger Leute unternimmt eine Campingreise und schlägt gegen Abend ihr Zelt auf. Der Untergrund ist eben, aber leicht abschüssig am Hang eines Hügels gelegen. Denkt man sich ein Koordinatensystem ungefähr durch die Mitte des Zeltes gelegt, so kann man die Ecken der Grundfläche mit den Punkten $A(0\,|\,-3\,|\,0)$, $B(2\,|\,1\,|\,0)$, $C(0\,|\,2\,|\,0{,}25)$ und $D(-2\,|\,-2\,|\,0{,}25)$ angeben (vgl. die Zeichnung unten). Eine Längeneinheit entspricht dabei einem Meter.

a) Zeigen Sie, dass die Grundfläche $ABCD$ des Zeltes ein Rechteck bildet.
Berechnen Sie die Länge und Breite des Zeltbodens.

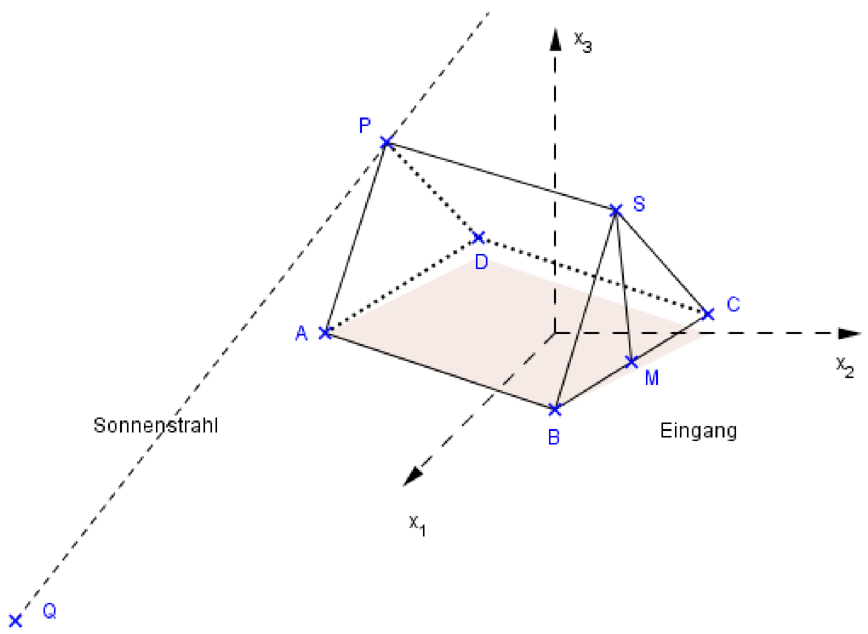
b) Die Ebene E, die die Punkte A, B und C enthält, stellt den Hang des Hügels dar.
Bestimmen Sie für die Ebene E je eine Ebenengleichung in Parameterform und in Koordinatenform.
Begründen Sie, dass auch Punkt D in dieser Ebene liegt.

Verwenden Sie in den folgenden Aufgabenteilen für die Ebene E die Gleichung $E: 2x_1 - x_2 + 20x_3 = 3$.

c) Ermitteln Sie den Winkel zwischen der Ebene E und der horizontalen Ebene, um eine Vorstellung von der Neigung des Hanges zu erhalten.

d) Der Eingang des Zeltes befindet sich in der Mitte M der Grundseite $\overline{BC}$. Die Spitze des Zeltes wird von einer Zeltstange gehalten, die rechtwinklig auf dem geneigten Erdboden steht.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes M.
Geben Sie einen Vektor an, der die Richtung der Zeltstange beschreibt.

e) Die dem Eingang gegenüberliegende Seite des Zeltes ist ein Dreieck ADP mit der Spitze $P(-0{,}8\,|\,-2{,}6\,|\,2{,}1)$. Die Strahlen der tief stehenden Sonne haben die Richtung $\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und werfen einen Schatten des Zeltes auf den schrägen Hang. Der Schatten der Spitze P fällt dabei auf den Punkt Q der Hangebene E.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q (Runden Sie auf 1 Nachkommastelle).



Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 5**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
5a	Zu zeigen ist z.B. die Parallelogramm-Eigenschaft. Es gilt: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, da $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}0\\2\\0,25\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\-2\\0,25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$ Es bleibt nachzuweisen, dass einer der Innenwinkel orthogonal ist. $\overrightarrow{AB}*\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}-2\\1\\0,25\end{pmatrix}=0$. Wegen $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{20}\approx 4,47$ und $\left\|\overrightarrow{AD}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}-2\\1\\0,25\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{5\frac{1}{16}}=2,25$ ist das Zelt ca. $4,47m$ lang und $2,25m$ breit.	3	3	
5b	Mit A als Stützpunkt und $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ als Spannvektoren ergibt sich die Ebenengleichung $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}0\\5\\0,25\end{pmatrix};p,q\in\mathbb{R}$ Durch Aufstellen der Komponentengleichungen, Auflösen zweier Gleichungen nach p und q und Einsetzen in die dritte Gleichung erhält man die Koordinatengleichung $E:2x_1-x_2+20x_3=3$ Da $ABCD$ ein Rechteck ist, liegt D in der Ebene E .	2	5	
5c	Schnittwinkelberechnung mittels Normalenvektoren der Ebenen: $\cos(\alpha)=\frac{\left\|\begin{pmatrix}2\\-1\\20\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix}2\\-1\\20\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|}=\frac{20}{\sqrt{405}}\approx 0{,}9938$, $\alpha\approx 6,4°$.	2	2	
5d	Aus $\vec{m}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}=\begin{pmatrix}1\\1{,}5\\0{,}125\end{pmatrix}$ ergibt sich der Mittelpunkt $M(1\|1,5\|0{,}125)$. Der Normalenvektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-1\\20\end{pmatrix}$ der Ebene E steht rechtwinklig auf dem Erdboden und beschreibt somit die Richtung der Zeltstange.	1		1

Lösungsskizze		Bewertung		
		I	II	III
5e	Q errechnet sich als Schnittpunkt der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -0{,}8 \\ -2{,}6 \\ 2{,}1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad s \in \mathbb{R}$ mit der Ebene $E: \; 2(-0{,}8+5s)-(-2{,}6-s)+20(2{,}1-2s)=3$. Es ergibt sich $s=\frac{40}{29}$ und $\vec{q} = \begin{pmatrix} -0{,}8 \\ -2{,}6 \\ 2{,}1 \end{pmatrix} + \frac{40}{29} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 6{,}1 \\ -4{,}0 \\ -0{,}7 \end{pmatrix}$, also $Q(6{,}1 \mid -4{,}0 \mid -0{,}7)$.	2	3	1
Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**10**	**13**	**2**

Protokollbogen zur Auswahl der Aufgaben für die Prüfungsakten der Schule

Auswahl der Aufgaben:

- Fach: **Mathematik** (GTR)
- Schule: ____
- Schulinterne Kursbezeichnung: ______________________________
- **Fachlehrerin / Fachlehrer** (Name, Vorname):

  ____

  Ich wähle für die Bearbeitung durch die Prüflinge die 3 Aufgaben Nr. __________ aus.

  Bremen / Bremerhaven, den 21.4.2009

  ____
  (Unterschrift Fachlehrerin / Fachlehrer)

- **Korreferentin / Korreferent** (Name, Vorname):

  ____

  Ich schließe mich der Auswahl an / nicht an (bitte Unzutreffendes streichen). Im Falle der Nichtzustimmung füge ich eine kurze schriftliche Begründung auf der Rückseite des Protokolls bei.

  Bremen / Bremerhaven, den 21.4.2009

  ____
  (Unterschrift Korreferentin / Korreferent)

- **Auswahl durch die Vorsitzende / den Vorsitzenden des Fachprüfungsausschusses** (im Falle der Nichtübereinstimmung zwischen Fachprüferin/Fachprüfer und Korreferentin / Korreferenten)

  Ich wähle die 3 Aufgaben Nr. __________ zur Bearbeitung durch die Prüflinge aus und füge eine kurze schriftliche Begründung auf der Rückseite des Protokolls bei.

  Bremen / Bremerhaven, den 21.4.2009

  ____
  (Unterschrift Vorsitzende(r) Fachprüfungsausschuss)

Rückmeldebogen für die Zentralabiturkommission Mathematik zur Auswahl der Aufgaben

Auswahl der Aufgaben:

- Fach: **Mathematik GK** (GTR)
- Schule: ______________________________
- Schulinterne Kursbezeichnung: ______________________________
- Anzahl der Schülerinnen und Schüler: ______________________________
- Der Fachprüfungsausschuss hat für die Bearbeitung durch die Prüflinge die drei Aufgaben

  Nr. ________ , ________ und ________ ausgewählt.

Bremen / Bremerhaven, den 21.4.2009

____
(Unterschrift)

Schicken Sie diesen Bogen bitte möglichst umgehend per FAX an folgende Adresse:

Landesinstitut für Schule, Herrn Löwer

FAX 0421-361-6451

Die Rückmeldebögen werden im LIS gesammelt und den Zentralabiturkommissionen zur Verfügung gestellt. Sie sind eine Grundlage für die Auswertungsgespräche mit den Schulen und die Erstellung neuer Aufgaben.