Schriftliche Abiturprüfung 2007 im dritten Prüfungsfach

Grundkurs Mathematik (TR)

Dienstag, 22. Mai 2007, 9.00 Uhr

Unterlagen für Lehrerinnen und Lehrer

- Diese Unterlagen sind nicht für die Prüflinge bestimmt -

Diese Unterlagen enthalten:

- Allgemeines
- Die Bewertung der Prüfungsleistung
- Aufgaben mit Lösungsskizzen
- Einen Protokollbogen zur Auswahl der Aufgaben für die Prüfungsakten Ihrer Schule
- Einen Rückmeldebogen für die Fachkommission zur Auswahl der Aufgaben

---

Allgemeines

- Wählen Sie gemeinsam mit Ihrer Korreferentin / Ihrem Korreferenten aus den sechs vorgelegten Aufgaben drei zur Bearbeitung aus. Die Aufgaben kommen aus mindestens zwei verschiedenen Themenbereichen, **mindestens eine der Aufgaben ist aus dem Themenbereich Analysis**. Die Aufgabe zur Analytischen Geometrie liegt Ihnen in zwei Versionen vor, je nachdem, welches Koordinatensystem Sie im Unterricht verwendet haben. Kommt es zu keiner Einigung, bestimmt die Vorsitzende / der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses die Auswahl der Aufgaben (§ 10 Abs. 2 Nr. 1 AP-V). Protokollieren Sie (S. 25), welche Aufgaben Sie gewählt haben (Prüferin / Prüfer und Korreferentin / Korreferent und ggf. auch die oder der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses unterschreiben das Protokoll).
- Füllen Sie bitte den Rückmeldebogen (S. 26) für die Fachkommission zur Auswahl der Aufgaben aus und schicken Sie ihn an die dort genannte Adresse.
- Fragen Sie vor Verteilung der Aufgaben an die Prüflinge die Arbeitsfähigkeit der Prüflinge ab und weisen Sie auf die Regelungen des § 5 AP-V (Täuschung und Behinderung) hin.
- Machen Sie die Prüflinge auf die Arbeitshinweise aufmerksam, die am Anfang der Unterlagen für die Prüfungsteilnehmer stehen. Geben Sie den Prüflingen ggf. die nötigen Angaben zur Schulnummer sowie zur genauen Kursbezeichnung.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: Nicht programmierbarer wissenschaftlicher Taschenrechner, Formelsammlung, Zeichengerät, Rechtschreiblexikon

Die Bewertung der Prüfungsleistung

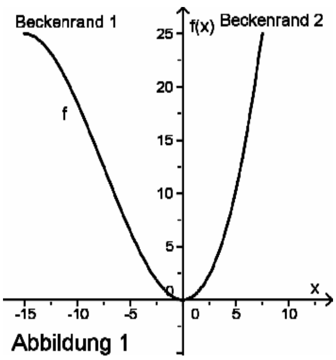
Die Lösungsskizze stellt eine Lösungsvariante dar; andere gleichwertige Lösungen sind entsprechend zu bewerten. Die Bewertungsanteile pro Teilaufgabe sind obligatorisch.

Für die Festlegung der Gesamtleistung werden den erzielten Bewertungseinheiten die entsprechenden Notenstufen gemäß folgender Tabelle zugeordnet.

Bewertungs-einheiten	KMK Punkte
bis 19,5	0
20 bis 26,5	1
27 bis 33,5	2
34 bis 39,5	3
40 bis 44,5	4
45 bis 49	5
49,5 bis 54	6
54,5 bis 59	7
59,5 bis 64	8
64,5 bis 69	9
69,5 bis 74	10
74,5 bis 79	11
79,5 bis 84	12
84,5 bis 89	13
89,5 bis 94	14
94,5 bis 99	15

Beachten Sie bei der Rechtschreibkorrektur den Erlass 10/2006. Danach gilt die Toleranzphase für die Bereiche B. *Getrennt- und Zusammenschreibung,* E. *Zeichensetzung* und F. *Worttrennung am Zeilenende* noch bis zum 31. Juli 2007.

Aufgabe: **Designerwaschbecken** **Analysis 1**



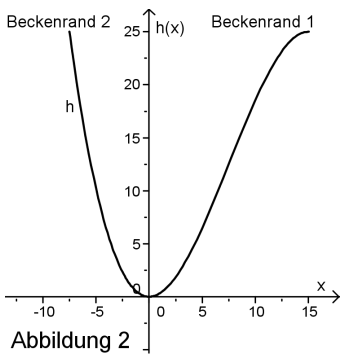
Ein Designer möchte eine neue Form eines Waschbeckens zur maschinellen Produktionsreife bringen. Dazu soll der in Abbildung 1 dargestellte Querschnitt der Waschbeckenform durch eine mathematische Funktion beschrieben werden, die direkt in die Produktionsmaschine eingegeben werden kann. Durch die Wahl des Koordinatensystems ist es möglich, den Waschbecken-querschnitt zwischen den x-Werten -15 und $7{,}5$ durch eine ganzrationale Funktion f dritten Grades zu beschreiben. In $T(0/0)$ befindet sich der relative Tiefpunkt der Funktion, der die Position des Abflusses im Waschbecken darstellt. In $H(-15/25)$ befindet sich der relative Hochpunkt der Funktion, der dem höchsten Punkt des sanft nach links geschwungenen Waschbeckenrandes entspricht. (Alle Angaben in cm.)

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f in Abhängigkeit von x.

In Abbildung 2 blickt man aus der entgegengesetzten Richtung auf den Querschnitt des Waschbeckens. Die Funktion h mit

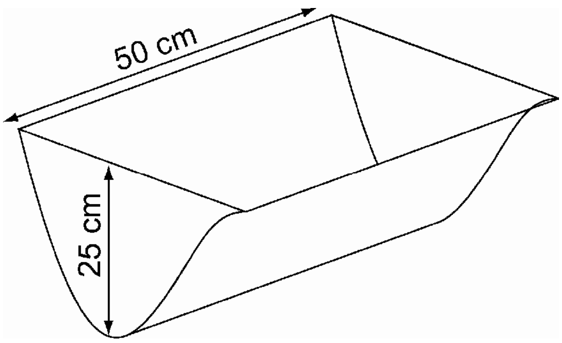
$$h(x) = -\frac{2}{135} \cdot x^3 + \frac{1}{3} \cdot x^2$$

beschreibt den Querschnitt aus dieser Blickrichtung zwischen den x-Werten $-7{,}5$ und 15.



b) Für die maschinelle Produktion spielt die Steigung des Beckenquerschnitts eine Rolle. Skizzieren Sie deshalb, ausgehend vom Graphen von h, den Graphen der Ableitungsfunktion h' in ein neues Koordinatensystem. Begründen Sie den Verlauf des Graphen von h' aus dem Verlauf des Graphen von h.

c) Im Verkaufskatalog steht, dass das Waschbecken $50\ cm$ lang ist und ein Fassungsvermögen von ungefähr 16 Litern ($1\,\text{Liter} = 1000\ cm^3$) hat. Überprüfen Sie die Angabe zum Fassungsvermögen durch folgende Arbeitsschritte:



Ermitteln Sie mit Hilfe einer Stammfunktion den Wert für

$$A = \int_{-7,5}^{15} (25 - h(x))\, dx = \int_{-7,5}^{15} \left(25 - \left(-\frac{2}{135} \cdot x^3 + \frac{1}{3} \cdot x^2\right)\right) dx.$$

Erläutern Sie, auch mit Hilfe einer Skizze, die Bedeutung des Integrals. Berechnen Sie anschließend das Wasservolumen in cm^3.

(Hinweis: $A \approx 316{,}4$)

Aufgabe: **Designerwaschbecken** **Analysis 1**

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung/ Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

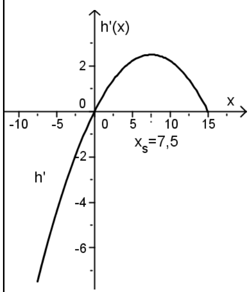
$T(0/0)$ ist rel. Tiefpunkt,
also $f(0) = 0$ und somit $d = 0$ sowie $f'(0) = 0$ und somit $c = 0$

$H(-15/25)$ ist rel. Hochpunkt,
also $f(-15) = 25$ und somit $-3375a + 225b = 25$ sowie $f'(-15) = 0$ und somit

$675a - 30b = 0$ bzw. $b = \frac{45}{2}a$. Durch Einsetzen ergibt sich:

$a = \frac{2}{135}$ und $b = \frac{1}{3}$ und somit $f(x) = \frac{2}{135} \cdot x^3 + \frac{1}{3} \cdot x^2$.

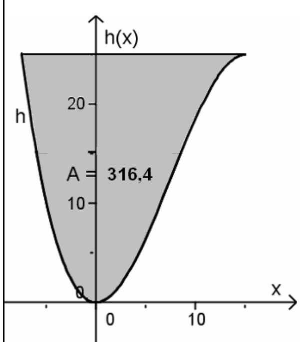
</td><td>8</td><td>7</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>



In der Skizze muss die Ableitungsfunktion als nach unten geöffnete Parabel mit korrekt eingezeichneten Nullstellen erkennbar sein. Der Scheitelpunkt muss an der Stelle $x_S = 7,5$ liegen.
Mögliche Begründungen: Die Nullstellen ergeben sich aus den x-Werten von H und T, die Scheitelstelle x_S ist die Wendestelle von h, sie muss in der Mitte der beiden Nullstellen liegen. Der Graph von h fällt zunächst und steigt dann, also muss die Parabel nach unten geöffnet sein.

</td><td>5</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

$\int_{-7,5}^{15} (25 - (-\frac{2}{135} \cdot x^3 + \frac{1}{3} \cdot x^2))\, dx = \left[25x + \frac{2}{540}x^4 - \frac{1}{9}x^3 \right]_{-7,5}^{15} = 187,5 - (-128,9) = 316,4$



Das Integral berechnet die Größe der Querschnittsfläche A des Waschbeckens, eingeschlossen zwischen den beiden Graphen von h und g im Intervall $[-7,5;15]$ mit $g(x) = 25$,

$A = 316,4\, cm^2$. Das Wasservolumen berechnet sich aus der gefüllten Querschnittsfläche A in cm^2 mal der Waschbeckenlänge von $50\, cm$:

$V = A \cdot 50\, cm = 316,4\, cm^2 \cdot 50\, cm = 15820\, cm^3$, also ca. 16 Liter.

</td><td></td><td>6</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Insgesamt 33 Bewertungseinheiten, verteilt auf die Anforderungsbereiche</td><td>13</td><td>17</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Prozentuale Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>39%</td><td>52%</td><td>9%</td></tr>
</table>

Aufgabe: **Bakterien** **Analysis 2**

Zum Abbau von Altöl setzt man in einem Versuch Bakterien ein. Diese Bakterien ernähren sich von dem Altöl und zersetzen es dabei zu Biomasse und unschädlichen Rückständen. Die Bakterien gedeihen dabei prächtig, sie verdoppeln ihre Masse in kurzen Zeitabständen.
Mit einer Funktionsgleichung

$$f(x) = a \cdot e^{k \cdot x}$$

wird das Massenwachstum der Bakterien modelliert. x steht für die Anzahl der Stunden nach Beginn der Beobachtung, $f(x)$ gibt die Bakterienmasse in Gramm x Stunden nach Beginn der Beobachtungen an.

a) Einem Altölgemisch werden 4 g dieser Bakterien zum Zeitpunkt $x = 0$ zugesetzt. Bestimmen Sie a und k für eine Bakterienart, deren Masse sich alle 3 Stunden verdoppelt.

Die folgenden Aufgabenteile beziehen sich auf eine andere Bakterienart, die sich nach folgender Gesetzmäßigkeit vermehrt:

$$h(x) = 3 \cdot e^{0{,}34657 \cdot x},\ h(x) \text{ in Gramm, } x \text{ in Stunden.}$$

b) Bestimmen Sie für diese Bakterienart die Verdopplungszeit.
Berechnen Sie die prozentuale Zunahme der Bakterienmasse innerhalb einer Stunde.

c) Berechnen Sie, wie viel Gramm Bakterienmasse zum Zeitpunkt $x = 24$ vorhanden ist.

1 g dieser Bakterienart setzt pro Stunde $0{,}35$ g des Altölgemischs um.
Berechnen Sie, wie viel Gramm vom Altöl zu Zeitpunkt $x = 24$ pro Stunde umgesetzt werden.

d) Berechnen Sie $0{,}35 \cdot \int_0^{24} (3 \cdot e^{0{,}34657 \cdot x})\, dx$. Geben Sie dazu eine entsprechende Stammfunktion an.
Interpretieren Sie diesen Ansatz samt Lösung im Sachzusammenhang, berücksichtigen Sie dazu, dass man mit $0{,}35 \cdot h(x)$ die Altölmenge in g berechnen kann, die x Stunden nach Beginn pro Stunde umgesetzt wird.

e) Die Bakterien sollen einen Altölvorrat von 1000 Tonnen (= 10^9 Gramm) abbauen.
Berechnen Sie das t, für das die Gleichung

$$10^9 = 0{,}35 \cdot \int_0^{t} (3 \cdot e^{0{,}34657 \cdot x})\, dx \text{ gilt.}$$

Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe: **Bakterien** **Analysis 2**

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen

	Lösungsskizze	Bewertung/ Zuordnung I	II	III
a)	Mit dem Anfangswert $a=4$ g und der Verdopplungszeit von 3 Stunden ergibt sich z.B. mit Hilfe von $f(x)=4\cdot 2^{\frac{x}{3}}\approx 4\cdot 1,25992^x \approx 4\cdot e^{0,23105\cdot x}$, x in Stunden, $f(x)$ in g, also $k=0,23105$	1	3	
b)	Die Verdopplungszeit v ergibt sich z. B. aus: $2\cdot h(x)=h(x+v)$ $2=e^{0.34657v}$ $e^{\ln 2}=e^{0.34657v},\ \ln 2=0,34657v,\ v\approx 2$. Zum prozentualen stündlichen Zuwachs z.B.: $h(1)=3\cdot e^{0,34657\cdot 1}\approx 4,2426$ $4,2426:3\approx 1,414$ Damit beträgt der prozentuale stündliche Zuwachs $41,4\%$.	4	4	
c)	$h(24)=3\cdot e^{0,34657\cdot 24}=3\cdot 4095,65=12286,94$, nach 24 Stunden beträgt die Bakterienmasse ca. 12287 g. Diese vernichtet zu diesem Zeitpunkt $0,35\cdot h(24)\approx 0,35\cdot 12287=4300,45$ g des Altöls pro Stunde.	3	3	
d)	$0,35\cdot\int_0^{24}(3\cdot e^{0,34657\cdot x})\,dx=0,35\cdot\left[\frac{3}{0,34657}\cdot e^{0,34657\cdot x}\right]_0^{24}\approx 12406$ Das bestimmte Integral von 0 bis 24 errechnet die gesamte Altölmasse von 12406 g, die in den ersten 24 Stunden, d.h. am ersten Tag, insgesamt umgesetzt wird.	3	4	2
e)	$10^9=0,35\int_0^t 3\cdot e^{0,34657x}dx;\ 10^9=0,35\left[\frac{3}{0,34657}e^{0,34657x}\right]_0^t$ $10^9=0,35\cdot\frac{3}{0,34657}(e^{0,34657t}-1);\ 330066667,7=e^{0,34657t};\ t\approx 56,6$ Nach ca. 57 Stunden ist die Altölmasse vollständig abgebaut.	2	3	1
	Insgesamt 33 Bewertungseinheiten, verteilt auf die Anforderungsbereiche	**13**	**17**	**3**
	Prozentuale Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	39%	52%	9%

Aufgabe: **Funktionsuntersuchung** **Analysis 3**

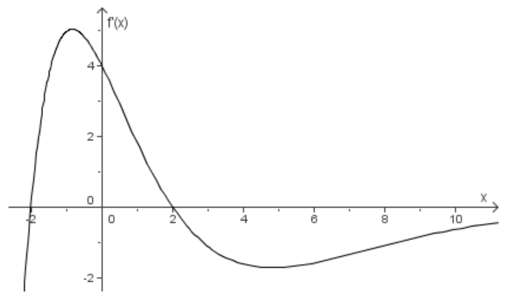
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4x \cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot x^2}$ und

deren Ableitungsfunktion f' mit $f'(x) = (4 - x^2) \cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot x^2}$.

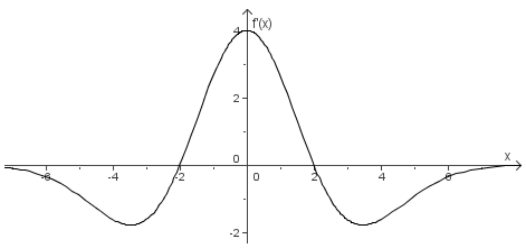
a) Berechnen Sie Nullstellen und Extrempunkte der Funktion f (Dezimalzahlen auf zwei Nachkommastellen runden).

b) Zeichnen Sie den Graph von f .
Begründen Sie, dass der Graph von f höchstens drei Wendepunkte besitzt.

c) Einer der beiden folgenden Graphen stellt die Ableitungsfunktion f' mit $f'(x) = (4 - x^2) \cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot x^2}$ dar.
Entscheiden und begründen Sie, welcher das ist.



Graph 1



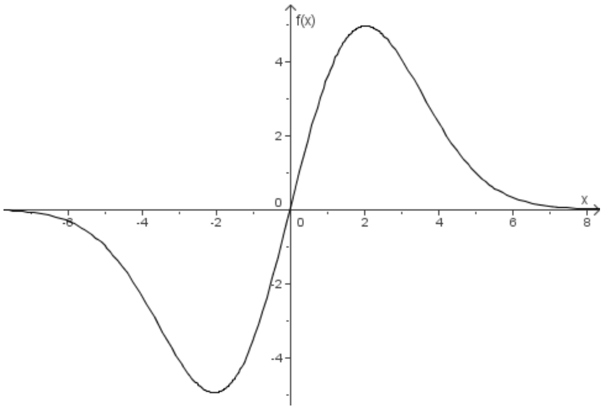
Graph 2

d) Zeigen Sie, dass F mit $F(x) = -16 \cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot x^2}$ eine Stammfunktion von f ist. Der Graph von f und die x-Achse schließen in den Grenzen von 0 bis 5 eine Fläche ein.
Berechnen Sie die Maßzahl A dieser Fläche.

e) Begründen Sie, dass eine Fläche rechts von der y-Achse zwischen dem Graphen von f und der x-Achse nicht größer werden kann als 16 Flächeneinheiten.

Aufgabe: **Funktionsuntersuchung** **Analysis 3**

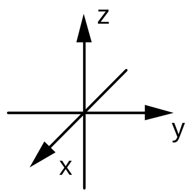
Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen

	Lösungsskizze	Bewertung/ Zuordnung I	II	III
a)	Nullstellen: $f(x_N)=0 \Leftrightarrow x_N=0$; f besitzt nur die Nullstelle $x_N=0$ $f''(x)=(\frac{1}{4}x^3-3x)\cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot x^2}$ Extrempunkte: $f'(x_E)=0$ und $f''(x_E)\neq 0$ ist eine hinreichende Bedingung für relative Extremstellen: $f'(x_E)=0 \Leftrightarrow 4-x_E^2=0 \Leftrightarrow x_E=-2$ oder $x_E=2$ $f''(-2)=2{,}426$; $f''(2)=-2{,}426$ $f'(-2)=0$ und $f''(-2)>0 \Rightarrow -2$ ist Minimalstelle, zusammen mit $f(-2)=-4{,}85225$ folgt $T(-2/-4{,}85)$ ist Tiefpunkt. $f'(2)=0$ und $f''(2)<0 \Rightarrow -2$ ist Maximalstelle, zusammen mit $f(2)=4{,}85225$ folgt $H(2/4{,}85)$ ist Hochpunkt.	5	6	
b)	 Z. B.: f'' besitzt 3 Nullstellen, folglich können höchstens 3 Wendepunkte existieren. oder eine Wendestelle liegt zwischen Tief- und Hochpunkt, aufgrund des asymptotischen Verhaltens liegt noch je eine rechts vom Hoch- bzw. links vom Tiefpunkt.	5	2	2
c)	Z. B.: f' ist eine gerade Funktion, Graph 1 ist nicht achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse. Nur Graph 2 kann f' darstellen.	1	2	

d)	Zu zeigen ist: $F'(x) = f(x)$ $\int_0^5 f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_0^5 = F(5) - F(0) = -0{,}702991 - (-16) = 15{,}297$	2	3	
e)	Z. B. $\lim_{t\to\infty}\int_0^t f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[F(t) - F(0)\right] = \lim_{t\to\infty}(-16\cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot t^2} - (-16)) = 16$, die Annäherung geschieht von unten, oder $\int_0^t f(x)\,dx = F(t) - F(0) = -16\cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot t^2} - (-16) = 16 - 16\cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot t^2} < 16$ für alle t.		4	1
	Insgesamt 33 Bewertungseinheiten, verteilt auf die Anforderungsbereiche	**13**	**17**	**3**
	Prozentuale Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	39%	52%	9%

Aufgabe: **Lagerhalle** **Analytische Geometrie (x)**

Material: Kariertes Papier mit vorgedrucktem Koordinatensystem



Eine große Lagerhalle kann durch die Eckpunkte $A(50/15/0)$, $B(90/95/0)$, $C(50/115/0)$, $D(10/35/0)$, $F(50/15/40)$, $G(90/95/40)$, $H(50/115/40)$ und $K(10/35/40)$ beschrieben werden.
(Alle Koordinatenangaben entsprechen Meterangaben.)

a) Zeichnen Sie die Punkte F,G,H,K zu den Punkten A,B,C,D in das Koordinatensystem ein und verbinden Sie die Punkte so, dass ein Quader entsteht.

b) Geben Sie den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AD}$ an.
In der Lagerhalle verläuft ein Fließband vom Punkt $P(30/25/0)$ zum Punkt $Q(50/95/20)$.
Die Gerade g wird durch diese beiden Punkte festgelegt.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g in Parameterform.
Zeichnen Sie das Fließband als Strecke in das Koordinatensystem ein.
Bestimmen Sie die Länge des Fließbands.

c) Ein weiteres Fließband beginnt im Punkt $N(70/90/0)$ und folgt dem Vektor $\begin{pmatrix} -15 \\ -15 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Zeichnen Sie die Gerade h in das Koordinatensystem ein, die den Lauf dieses Fließbands beschreibt.
Geben Sie eine Geradengleichung für h in Parameterform an.

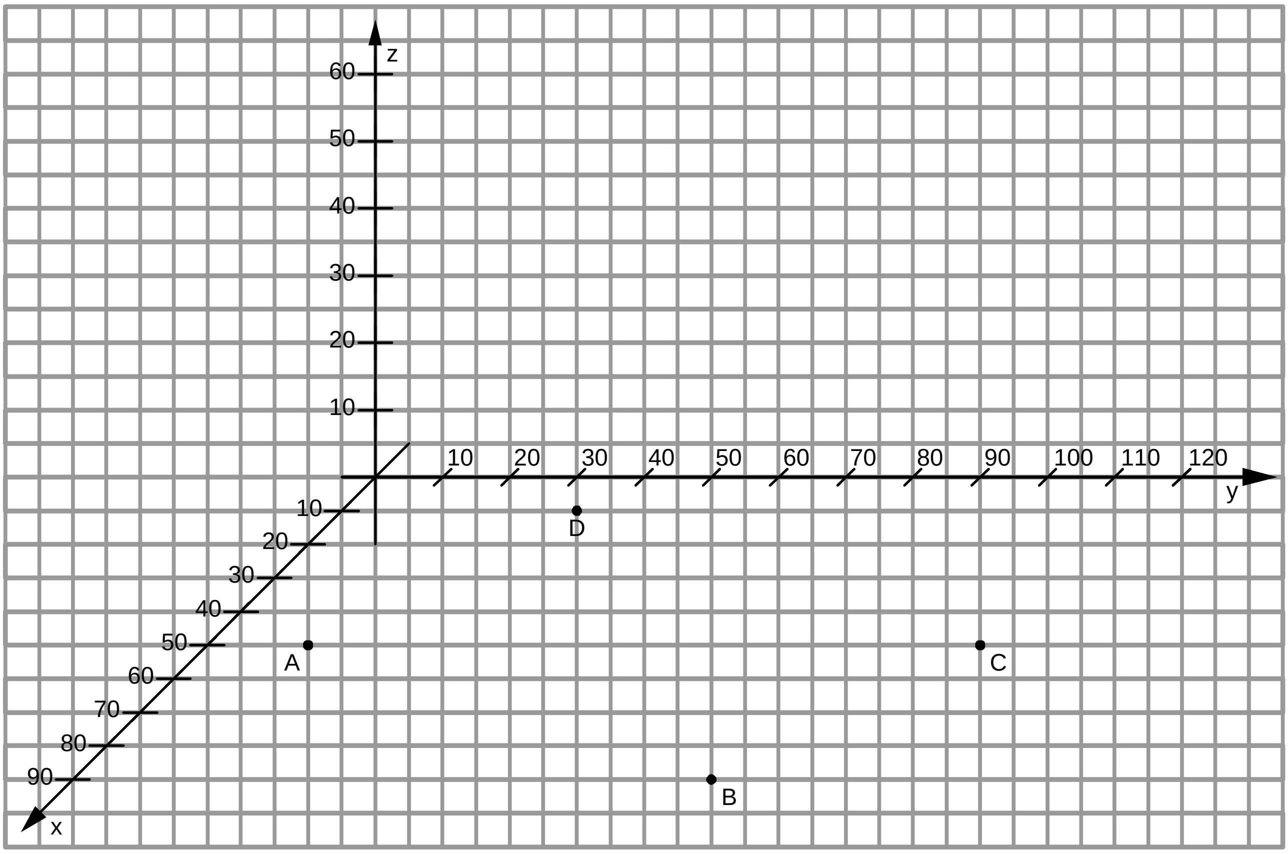
Zeigen Sie, dass sich die beiden Fließbänder (aus b) und c)) treffen und berechnen Sie den Schnittpunkt. (Falls Sie die Gerade g in b) nicht berechnet haben, arbeiten Sie mit dem Hinweis.)

Bestimmen Sie den Schnittwinkel der beiden Fließbänder.

d) Die Vorderwand der Lagerhalle durch die Punkte B,C,H,G liegt in der Ebene E.
Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Ebene in Normalenform.

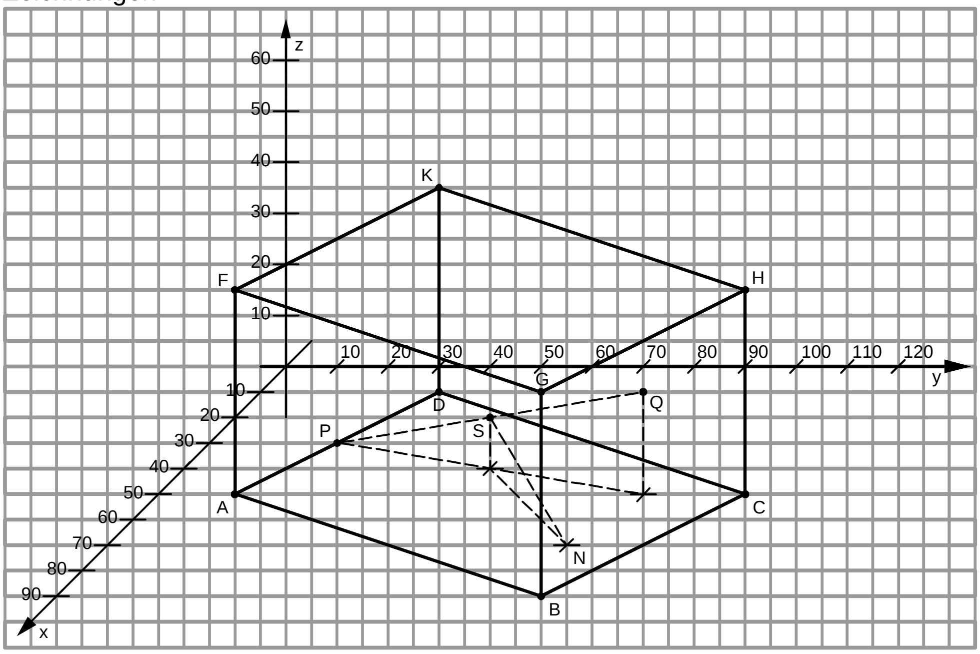
Hinweis: Eine mögliche Gleichung für die Gerade g aus b) ist: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -45 \\ -20 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 10 \\ 35 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Material zur Aufgabe: **Lagerhalle** **Analytische Geometrie (x)**



Aufgabe: **Lagerhalle** **Analytische Geometrie (x)**

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen

	Lösungsskizze (x-Achse nach vorne gerichtet)	Bewertung/ Zuordnung		
		I	II	III
a)	Die Graphik enthält auch die in den anderen Aufgabenteilen geforderten Zeichnungen.  Die in den anderen Aufgabenteilen geforderten Zeichnungen gehen hier in die Punktebewertung mit ein. Die Skizze enthält zu den geforderten Linien noch Hilfslinien, die nur der Veranschaulichung dienen. Statt der Geraden h wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit nur die Verbindungsstrecke von N zu S gezeichnet.	4	2	
b)	Mittelpunkt: $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}50\\15\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10\\35\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}30\\25\\0\end{pmatrix}\Rightarrow M(30/25/0)$; Geradengleichung: $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}30\\25\\0\end{pmatrix}+r\cdot\left[\begin{pmatrix}50\\95\\20\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}30\\25\\0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}30\\25\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}20\\70\\20\end{pmatrix}$; Länge des Fließbands: $\left\|\begin{pmatrix}20\\70\\20\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{20^2+70^2+20^2}=10\sqrt{57}\approx 75{,}50$	4	5	

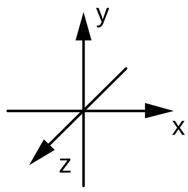
Aufgabe: **Lagerhalle** **Analytische Geometrie (x)**

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen

c)	Die Gleichsetzung von $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 70 \\ 90 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ -15 \\ 5 \end{pmatrix}$ und g liefert: $\begin{matrix} 20r + 15s = 40 \\ 70r + 15s = 65 \\ 20r - 5s = 0 \end{matrix}$ Hieraus ergibt sich $r = \frac{1}{2}$ und $s = 2$ und der Schnittpunkt $S(40/60/10)$ Schnittwinkel: $\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} -15 \\ -15 \\ 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 20 \\ 70 \\ 20 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -15 \\ -15 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 20 \\ 70 \\ 20 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{-1250}{\sqrt{475} \cdot \sqrt{5700}} \approx -0,7597 \Rightarrow \alpha \approx 139°$.	4	6	2
d)	$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -40 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix}$. Möglicher Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es gilt $\overrightarrow{OB} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 95 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 280$. Mögliche Normalenform: $E: \vec{x} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 280 = 0$.	2	3	1
	Insgesamt 33 Bewertungseinheiten, verteilt auf die Anforderungsbereiche	**14**	**16**	**3**
	Prozentuale Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	42%	48%	9%

Aufgabe: **Lagerhalle** **Analytische Geometrie (z)**

Material: Kariertes Papier mit vorgedrucktem Koordinatensystem



Eine große Lagerhalle kann durch die Eckpunkte $A(15/0/50)$, $B(95/0/90)$, $C(115/0/50)$, $D(35/0/10)$, $F(15/40/50)$, $G(95/40/90)$, $H(115/40/50)$ und $K(35/40/10)$ beschrieben werden.
(Alle Koordinatenangaben entsprechen Meterangaben.)

a) Zeichnen Sie die Punkte F,G,H,K zu den Punkten A,B,C,D in das Koordinatensystem ein und verbinden Sie die Punkte so, dass ein Quader entsteht.

b) Geben Sie den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AD}$ an.
In der Lagerhalle verläuft ein Fließband vom Punkt $P(25/0/30)$ zum Punkt $Q(95/20/50)$.
Die Gerade g wird durch diese beiden Punkte festgelegt.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g in Parameterform.
Zeichnen Sie das Fließband als Strecke in das Koordinatensystem ein.
Bestimmen Sie die Länge des Fließbands.

c) Ein weiteres Fließband beginnt im Punkt $N(90/0/70)$ und folgt dem Vektor $\begin{pmatrix}-15\\5\\-15\end{pmatrix}$.

Zeichnen Sie die Gerade h in das Koordinatensystem ein, die den Lauf dieses Fließbands beschreibt.
Geben Sie eine Geradengleichung für h in Parameterform an.

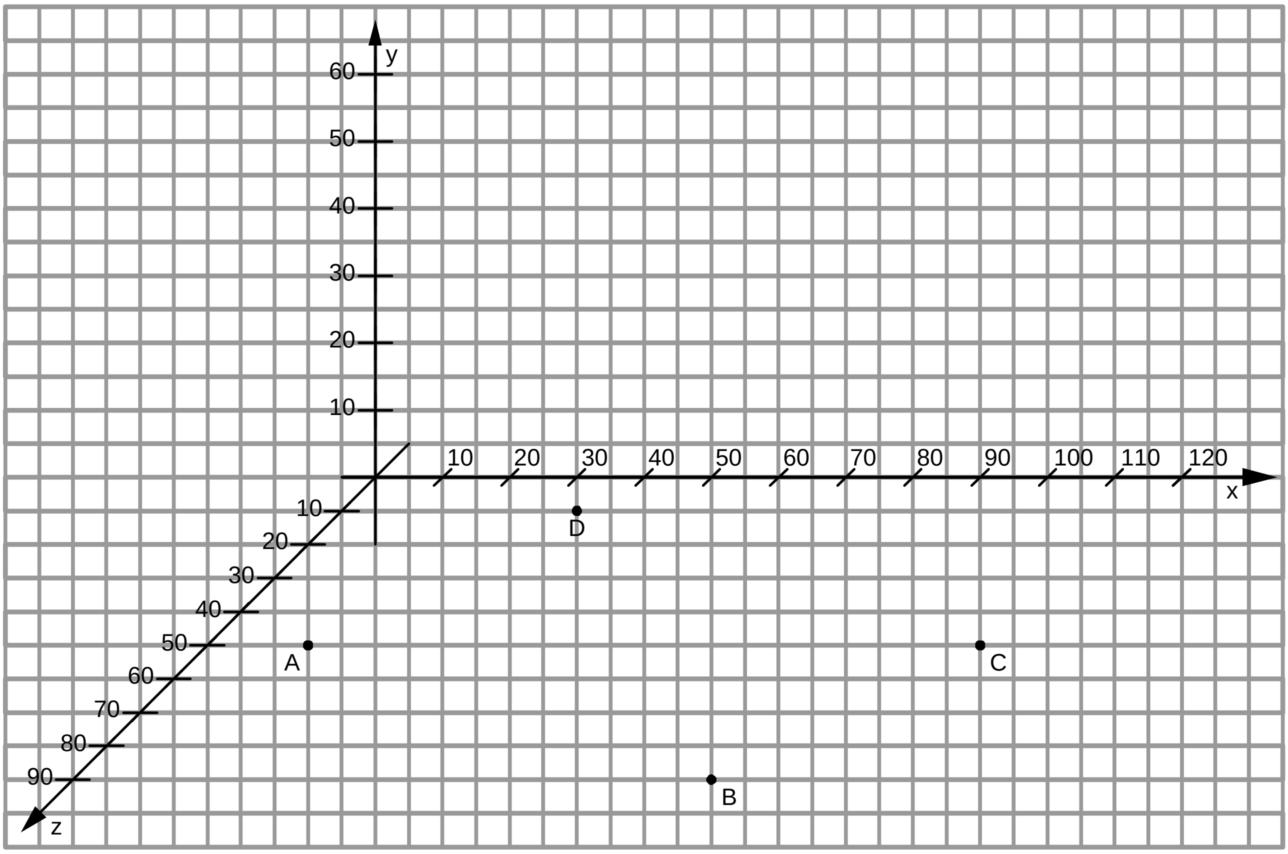
Zeigen Sie, dass sich die beiden Fließbänder (aus b) und c)) treffen und berechnen Sie den Schnittpunkt. (Falls Sie die Gerade g in b) nicht berechnet haben, arbeiten Sie mit dem Hinweis.)

Bestimmen Sie den Schnittwinkel der beiden Fließbänder.

d) Die Vorderwand der Lagerhalle durch die Punkte B,C,H,G liegt in der Ebene E .
Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Ebene in Normalenform.

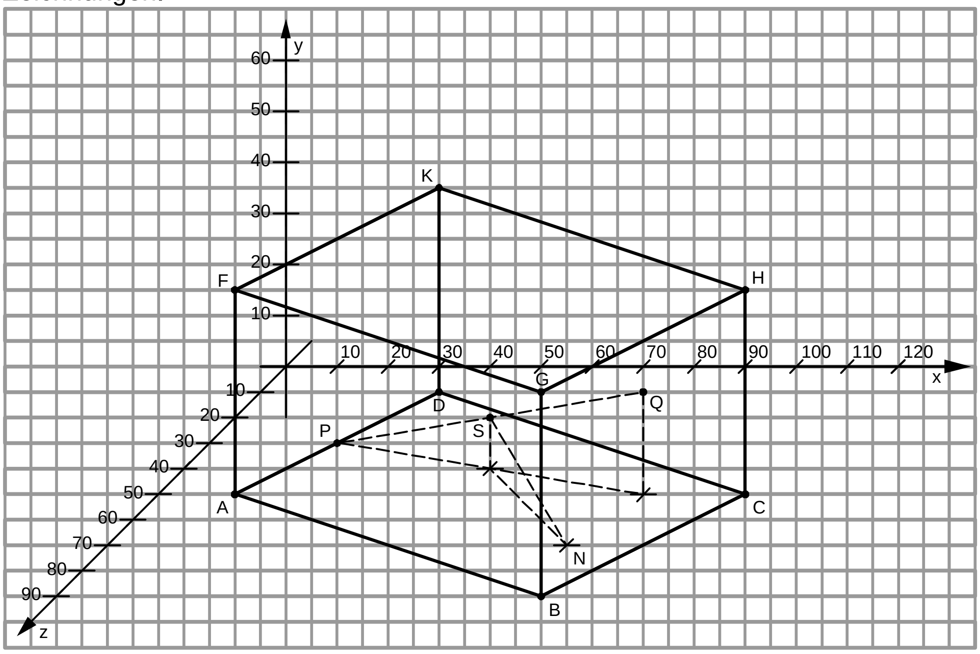
Hinweis: Eine mögliche Gleichung für die Gerade g aus b) ist: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-45\\-20\\10\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}35\\10\\10\end{pmatrix}$.

Material zur Aufgabe: **Lagerhalle** **Analytische Geometrie (z)**



Aufgabe: **Lagerhalle** **Analytische Geometrie (z)**

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze (z-Achse nach vorne gerichtet)</th><th colspan="3">Bewertung/ Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Die Graphik enthält auch die in den anderen Aufgabenteilen geforderten Zeichnungen.

Die in den anderen Aufgabenteilen geforderten Zeichnungen gehen hier in die Punktebewertung mit ein.
Die Skizze enthält zu den geforderten Linien noch Hilfslinien, die nur der Veranschaulichung dienen. Statt der Geraden h wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit nur die Verbindungstrecke von N zu S gezeichnet.</td><td>4</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Mittelpunkt: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}15\\0\\50\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}35\\0\\10\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}25\\0\\30\end{pmatrix} \Rightarrow M(25/0/30)$;

Geradengleichung: $g: \vec{x}=\begin{pmatrix}25\\0\\30\end{pmatrix}+r\cdot\left[\begin{pmatrix}95\\20\\50\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}25\\0\\30\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}25\\0\\30\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}70\\20\\20\end{pmatrix}$;

Länge des Fließbands: $\left|\begin{pmatrix}70\\20\\20\end{pmatrix}\right| = \sqrt{70^2+20^2+20^2} = 10\sqrt{57} \approx 75,50$</td><td>4</td><td>5</td><td></td></tr>
</table>

Aufgabe: **Lagerhalle** **Analytische Geometrie (z)**

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen

c)	Die Gleichsetzung von $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 90 \\ 0 \\ 70 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix}$ und g liefert: $\begin{matrix} 70r + 15s = 65 \\ 20r - 5s = 0 \\ 20r + 15s = 40 \end{matrix}$ Hieraus ergibt sich $r = \frac{1}{2}$ und $s = 2$ und der Schnittpunkt $S(60/10/40)$ Schnittwinkel: $\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} -15 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 70 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}}{\left\lvert \begin{pmatrix} -15 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix} \right\rvert \cdot \left\lvert \begin{pmatrix} 70 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} \right\rvert} = \frac{-1250}{\sqrt{475} \cdot \sqrt{5700}} \approx -0{,}7597 \Rightarrow \alpha \approx 139°$.	4	6	2
d)	$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ -40 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix}$. Möglicher Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es gilt $\overrightarrow{OB} * \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 95 \\ 0 \\ 90 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 280$. Mögliche Normalenform: $E: \vec{x} * \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 280 = 0$.	2	3	1
Insgesamt 33 Bewertungseinheiten, verteilt auf die Anforderungsbereiche		**14**	**16**	**3**
Prozentuale Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		42%	48%	9%

Aufgabe: **Rauchverhalten von Jugendlichen** **Lineare Algebra**

Um die langfristigen Auswirkungen von Antirauchkampagnen bei Jugendlichen zu testen, wurde im Jahr 2005 eine Gruppe von 14- bis 15-jährigen Schülerinnen und Schülern erfasst. 16% von ihnen gaben an, regelmäßig zu rauchen. Ein Jahr später wurde festgestellt, dass sich der Anteil der regelmäßig rauchenden Jugendlichen in dieser Gruppe auf 5% erniedrigt hatte. Der Befragung konnte man nicht entnehmen, wie das Wechselverhalten der Jugendlichen im Einzelnen aussah, d.h. wer von ihnen zum Nichtraucher / zur Nichtraucherin wurde bzw. neu anfing zu rauchen. Rein rechnerisch könnte man den Übergang im betreffenden Jahr mit der Matrix $M = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}022 \\ 0{,}8 & 0{,}978 \end{pmatrix}$ beschreiben. In M bedeutet der Wert $0{,}2$, dass 20% der Rauchergruppe Raucher blieben, und der Wert $0{,}8$, dass 80% dieser Gruppe den Ausstieg schafften und nun zu den Nichtrauchern/Nichtraucherinnen gehörten.

a) Interpretieren Sie die Werte $0{,}022$ und $0{,}978$ der zweiten Spalte in diesem Zusammenhang.

b) Erstellen Sie zu M ein Übergangsdiagramm.

c) Zeigen Sie für die Vektoren $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}160 \\ 0{,}840 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}050 \\ 0{,}950 \end{pmatrix}$, dass gilt $\vec{v}_1 = M * \vec{v}_0$, auf drei Nachkommastellen gerundet. Der Rechenweg muss dabei deutlich werden.
Erläutern Sie die Bedeutung der Komponenten von $\vec{v}_0$ und $\vec{v}_1 = M * \vec{v}_0$.

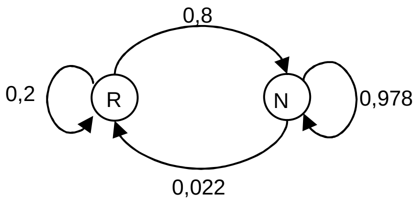
d) Gehen Sie davon aus, dass das Übergangsverhalten sich in den nächsten Jahren nicht ändern wird. Berechnen Sie Prognosewerte für die zwei folgenden Jahre.

e) Berechnen Sie die stationäre Verteilung $\vec{v}$ mit Hilfe der Gleichung $M * \vec{v} = \vec{v}$. Bestätigen Sie $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0{,}027 \\ 0{,}973 \end{pmatrix}$, auf drei Nachkommastellen gerundet.
Gehen Sie davon aus, dass der Übergangsprozess die stationäre Verteilung $\vec{v}$ als Grenzwert besitzt. Erläutern Sie die Bedeutung der Komponenten von $\vec{v}$.

f) Auch für die Übergangsmatrix $N = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}003 \\ 0{,}7 & 0{,}997 \end{pmatrix}$ gilt $N * \vec{v}_0 \approx \vec{v}_1$, auf drei Nachkommastellen gerundet, $\vec{v}_0, \vec{v}_1$ aus Teil c).
Entscheiden Sie, bei welcher der beiden Übergangsmatrizen, M oder N, der Raucheranteil langfristig größer bleibt. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aufgabe: **Rauchverhalten von Jugendlichen** **Lineare Algebra**

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen

	Lösungsskizze	Bewertung/ Zuordnung I	II	III
a)	$2{,}2\%$ der Nichtrauchergruppe wurden nach einem Jahr zu Rauchern. $97{,}8\%$ blieben Nichtraucher.	2		
b)	Übergangsdiagramm: R für Raucher N für Nichtraucher  	2		
c)	$\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}022 \\ 0{,}8 & 0{,}978 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0{,}160 \\ 0{,}840 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}050 \\ 0{,}950 \end{pmatrix}$ ergibt sich aus $0{,}2 \cdot 0{,}160 + 0{,}022 \cdot 0{,}840 \approx 0{,}0504...$ und $0{,}8 \cdot 0{,}160 + 0{,}978 \cdot 0{,}840 \approx 0{,}9495...$, womit rechnerisch nachgewiesen ist, dass die Matrix M den Übergang von $\vec{v}_0$ nach $\vec{v}_1$ bewirkt. $\vec{v}_0$ stellt die Verteilung am Anfang dar, mit 16% Rauchern und 84% Nichtrauchern. $\vec{v}_1$ stellt die Verteilung nach dem ersten Jahr dar, nach dem Übergang gemäß dem Diagramm aus b) waren es nur noch 5% Raucher. Entsprechend werden aus den 84% nun 95%, die Nichtraucher sind.	2	7	
d)	$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}022 \\ 0{,}8 & 0{,}978 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0{,}050 \\ 0{,}950 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}031 \\ 0{,}969 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = M * \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}028 \\ 0{,}972 \end{pmatrix}$	4		
e)	Gesucht ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $M * \vec{v} = \vec{v}$. Dies ist ein Gleichungssystem mit den Variablen x und y: $0{,}2 \cdot x + 0{,}022 \cdot y = x$ und $0{,}8 \cdot x + 0{,}978 \cdot y = y$, das durch weiteres Umformen aus zwei identischen Gleichungen besteht. Zusätzlich zu $-0{,}8 \cdot x + 0{,}022 \cdot y = 0$ gilt $x + y = 1$. Hiermit ergibt sich dann die Lösung mit $x = 0{,}027$ und $y = 0{,}973$, auf drei Nachkommastellen gerundet. Langfristig werden, wenn sich der Übergangsprozess immer wieder einstellt, etwa $2{,}7\%$ der hier betrachteten Schüler und Schülerinnen Raucher bzw. Raucherinnen sein, während etwa $97{,}3\%$ der Nichtrauchergruppe angehören werden.	3	7	

f)	Hier ist es möglich, mit Hilfe der Berechnung der stationären Verteilung $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0,004 \\ 0,996 \end{pmatrix}$ mit $N * \vec{w} = \vec{w}$ wie in e) zur Antwort zu kommen, dass langfristig der Anteil der Raucher beim Übergang mit N geringer ausfällt als beim Übergang mit M. Man kann auch argumentieren, dass im zweiten Fall vom größeren Anteil der Schülergruppe der Nichtraucher(84%) geringere Anteile (nur $0,3\%$ statt $2,2\%$) Raucher werden.		3	3
	Insgesamt 33 Bewertungseinheiten, verteilt auf die Anforderungsbereiche	**13**	**17**	**3**
	Prozentuale Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	39%	52%	9%

Aufgabe: **Risikobereitschaft** **Stochastik**

Für eine Marktanalyse werden 2000 zufällig ausgewählte Bankkundinnen und Bankkunden danach befragt, ob sie beim Kauf von Aktien eher risikofreudig oder eher vorsichtig handeln. Die Befragten sind wie folgt drei Altersgruppen zuzuordnen: 690 zählen zu den jungen Anlegern, 780 zur Gruppe mittleren Alters und 530 zu den Senioren.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass es sich bei der zufälligen Auswahl einer der 2000 befragten Personen um einen Senior handelt.
Beschreiben Sie das Gegenereignis und berechnen Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeit.

Man wählt drei Befragte so aus, dass eine befragte Person nicht zweimal gewählt werden kann.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein junger Anleger und zwei Senioren in beliebiger Reihenfolge ausgewählt werden.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass nicht alle drei Befragten junge Anleger sind.

Man weiß, dass 800 der ausgewählten Kunden eher vorsichtige Anleger sind. 25% der befragten vorsichtigen Anleger sind Senioren.

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte befragte Person kein Senior und ein risikofreudiger Anleger ist.
Erstellen Sie das Baumdiagramm.

Ein halbes Jahr später wird in einer Fachzeitschrift behauptet, dass die Risikofreude zugenommen habe und nun mehr als die in der Marktanalyse ermittelten 60% der Kunden zur "Risikofreude" neigen. Ein Institut testet diese Behauptung mit Hilfe der Entscheidungsregel:
Wenn unter 80 Befragten mehr als 53 sich als risikofreudig bezeichnen, soll die Hypothese H_0: „Der Anteil der risikofreudigen Anleger beträgt höchstens 60%" verworfen werden.

e) Wenn man H_0 verwirft, kann man einen Fehler machen (Fehler 1. Art / α-Fehler). Erläutern Sie diesen Fehler auf das Beispiel bezogen.
Berechnen und beurteilen Sie die Wahrscheinlichkeit für diesen Fehler.
Geben Sie die Entscheidungsregel an, so dass das Signifikanzniveau 5% beträgt.

Material zur Aufgabe: **Risikobereitschaft** **Stochastik**

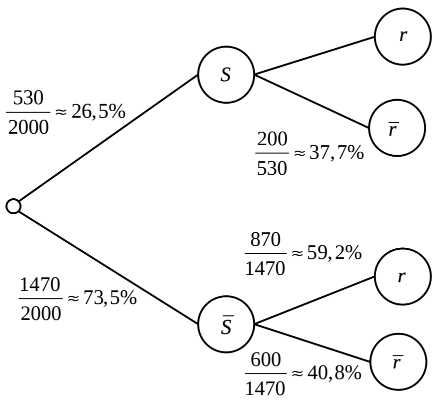
Tabellen zur kumulierten Binomialverteilung für n = 80

k	p = 0,6
27	0,00000
28	0,00001
29	0,00002
30	0,00004
31	0,00010
32	0,00024
33	0,00054
34	0,00116
35	0,00240
36	0,00471
37	0,00883
38	0,01582
39	0,02712
40	0,04450
41	0,06992
42	0,10533
43	0,15228
44	0,21149
45	0,28254
46	0,36364

k	p = 0,6
47	0,45163
48	0,54238
49	0,63127
50	0,71394
51	0,78689
52	0,84791
53	0,89627
54	0,93254
55	0,95825
56	0,97547
57	0,98635
58	0,99282
59	0,99644
60	0,99834
61	0,99927
62	0,99970
63	0,99989
64	0,99996
65	0,99999
66	1,00000

Aufgabe: **Risikobereitschaft** **Stochastik**

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen

	Lösungsskizze	Bewertung/ Zuordnung		
		I	II	III
a)	$P(Senior) = \frac{530}{2000} = 0,265 = 26,5\%$. Als Gegenereignis bezeichnet man die Negation des gewünschten Ereignisses, also hier zum Beispiel: „nicht Senior“. $P(\overline{Senior}) = 1 - \frac{530}{2000} = 1 - 0,265 = 73,5\%$	3	2	
b)	$P(\text{1 junger und zwei Senioren}) = \frac{690}{2000} \cdot \left(\frac{530}{1999}\right) \cdot \left(\frac{529}{1998}\right) \cdot 3 = 0,07265 \approx 7,27\%$	2	3	1
c)	$P(\text{nicht alle drei junge Anleger}) = 1 - P(\text{3 junge Anleger})$ $= 1 - \left(\frac{690}{2000}\right) \cdot \left(\frac{689}{1999}\right) \cdot \left(\frac{688}{1998}\right)$ $= 0,95905 \approx 95,9\%$	2	3	
d)	 $P(\overline{S} \text{ und } r) = \frac{870}{2000} \approx 43,5\%$	5	4	

e)	Der Anteil der risikofreudigen Anleger ist nicht größer geworden, aber in der Stichprobe sind zufälligerweise mehr risikofreudige Anleger, so dass die Hypothese H_0: „Der Anteil der risikofreudigen Anleger beträgt höchstens 60%“ fälschlicherweise verworfen wird. H_0: Die Risikofreude hat nicht zugenommen, $p < p_0 = 0,6$. Für den Fehler 1.Art muss die Wahrscheinlichkeit für den Verwerfungsbereich $53 < X \le 80$ unter der Annahme $p_0 = 0,6$ berechnet werden: $P(X > 53) = 1 - P(X \le 53) = 1 - 0,89627 = 0,10373 \approx 10,37\%$ In $10,37\%$ der Befragungen wird zu Unrecht angenommen, dass sich der Anteil der risikofreudigen Anleger erhöht hat, da die tatsächlichen Ergebnisse zufällig im Verwerfungsbereich liegen. Dieses ist häufiger der Fall und die Entscheidungsregel nicht angepasst. $P(X > k) = 1 - P(X \le k) \le 0,05$ und $P(X > k-1) = 1 - P(X \le k-1) > 0,05$ $\Rightarrow k = 55$ Die Entscheidungsregel muss lauten: Wenn mehr als 55 der befragten Kundinnen und Kunden zu den risikofreudigen Anlegern gehören, nehmen wir an, dass die Risikobereitschaft zugenommen hat und verwerfen die Hypothese H_0.	2	4	2
	Insgesamt 33 Bewertungseinheiten, verteilt auf die Anforderungsbereiche	**14**	**16**	**3**
	Prozentuale Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	42%	49%	9%

Protokollbogen zur Auswahl der Aufgaben für die Prüfungsakten der Schule

Auswahl der Aufgaben:

- Fach: **Mathematik** (TR)
- Schule: ______________________________
- Schulinterne Kursbezeichnung: ______________
- **Fachlehrerin / Fachlehrer** (Name, Vorname):

  ____

  Ich wähle für die Bearbeitung durch die Prüflinge die drei rechts angekreuzten Aufgaben aus.

  Bremen / Bremerhaven, den 22.5.2007

  ____
  (Unterschrift Fachlehrerin / Fachlehrer)

Aufgabe	**Wahl**
Analysis 1	
Analysis 2	
Analysis 3	
Analytische Geometrie (x)*	
Analytische Geometrie (z)*	
Lineare Algebra	
Wahrscheinlichkeitsrechnung	
* alternativ wählbar je nach im Unterricht benutzten Koordinatensystem	

- **Korreferentin / Korreferent** (Name, Vorname):

  ____

  Ich schließe mich der Auswahl der drei Aufgaben durch die Fachlehrerin / den Fachlehrer an / nicht an (bitte Unzutreffendes streichen). Im Falle der Nichtzustimmung füge ich eine kurze schriftliche Begründung und eine alternative Wahl bei.

  Bremen / Bremerhaven, den 22.5.2007

  ____
  (Unterschrift Korreferentin / Korreferent)

- **Auswahl durch die Vorsitzende / den Vorsitzenden des Fachprüfungsausschusses** (im Falle der Nichtübereinstimmung zwischen Fachprüferin/Fachprüfer und Korreferentin / Korreferenten)

  Ich wähle die drei Aufgaben: ______________________________
  zur Bearbeitung durch die Prüflinge aus und füge eine kurze schriftliche Begründung bei.

  Bremen / Bremerhaven, den 22.5.2007

  ____
  (Unterschrift Vorsitzende(r) Fachprüfungsausschuss)

Rückmeldebogen für die Fachkommission Mathematik zur Auswahl der Aufgaben

Auswahl der Aufgaben:

- Fach: **Mathematik** (TR)
- Schule: ______________________________
- Schulinterne Kursbezeichnung: ______________
- Anzahl der Schülerinnen und Schüler: __________
- Der Fachprüfungsausschuss hat für die Bearbeitung durch die Prüflinge die drei rechts angekreuzten Aufgaben ausgewählt.

Aufgabe	**Wahl**
Analysis 1	
Analysis 2	
Analysis 3	
Analytische Geometrie (x)*	
Analytische Geometrie (z)*	
Lineare Algebra	
Wahrscheinlichkeitsrechnung	
* alternativ wählbar je nach im Unterricht benutzten Koordinatensystem	

Bremen / Bremerhaven, den 22.5.2007

____
(Unterschrift)

Schicken Sie diesen Bogen bitte möglichst umgehend per FAX an folgende Adresse:

Landesinstitut für Schule, Herrn Löwer

FAX 0421-361-6451

Die Rückmeldebögen werden im LIS gesammelt und dann den Fachkommissionen zur Verfügung gestellt. Sie sind eine Grundlage für Auswertungsgespräche der Fachkommissionen mit den Schulen und der Erstellung neuer Aufgaben.