**Die Senatorin
für Bildung und Wissenschaft**

**Freie
Hansestadt
Bremen**

Schriftliche Abiturprüfung 2008 im dritten Prüfungsfach

Grundkurs Mathematik (TR)

Mai 2008, 9.00 Uhr

Unterlagen für Lehrerinnen und Lehrer

- Diese Unterlagen sind nicht für die Prüflinge bestimmt -

Diese Unterlagen enthalten …

- Allgemeines,
- die Bewertung der Prüfungsleistung,
- Aufgaben mit Lösungsskizzen,
- einen Protokollbogen zur Auswahl der Aufgaben für die Prüfungsakten Ihrer Schule,
- einen Rückmeldebogen für die Zentralabiturkommission zur Auswahl der Aufgaben.

Allgemeines

- Wählen Sie gemeinsam mit Ihrer Korreferentin / Ihrem Korreferenten aus den sechs vorgelegten Aufgaben drei zur Bearbeitung aus. Die Aufgaben kommen aus mindestens zwei verschiedenen Themenbereichen, mindestens eine der Aufgaben ist aus dem Themenbereich Analysis. Kommt es zu keiner Einigung, bestimmt die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses die Auswahl der Aufgaben (§ 10 Abs. 2 Nr. 1 AP-V). Protokollieren Sie auf dem beigefügten Protokollformular, welche Aufgaben Sie gewählt haben (Prüferin/Prüfer und Korreferentin/Korreferent und ggf. auch die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses unterschreiben das Protokoll).
- Füllen Sie bitte für die Zentralabiturkommission Mathematik den beigefügten Rückmeldebogen zur Auswahl der Aufgaben aus und schicken ihn an die dort genannte Adresse.
- Fragen Sie vor Verteilung der Aufgaben nach der Arbeitsfähigkeit der Prüflinge und weisen Sie diese auf die Regelungen des § 5 AP-V (Täuschung und Behinderung) hin.
- Machen Sie die Prüflinge auf die Arbeitshinweise aufmerksam, die am Anfang der Unterlagen für die Prüfungsteilnehmer stehen. Geben Sie ihnen ggf. die nötigen Angaben zur Schulnummer sowie zur genauen Kursbezeichnung.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: Nicht programmierbarer wissenschaftlicher Taschenrechner, Formelsammlung, Zeichengerät, Rechtschreiblexikon

Die Bewertung der Prüfungsleistung

Die Lösungsskizze stellt eine Lösungsvariante dar; andere gleichwertige Lösungen sind entsprechend zu bewerten. Die Bewertungsanteile pro Teilaufgabe sind obligatorisch.

Für die Festlegung der Gesamtleistung werden den erzielten Bewertungseinheiten die entsprechenden Notenstufen gemäß folgender Tabelle zugeordnet.

Bewertungs-einheiten	KMK Punkte
0 bis 14,5	00
15 bis 20	01
20,5 bis 24,5	02
25 bis 29,5	03
30 bis 33,5	04
34 bis 37	05
37,5 bis 41	06
41,5 bis 44,5	07
45 bis 48,5	08
49 bis 52	09
52,5 bis 56	10
56,5 bis 79	11
60 bis 63,5	12
64 bis 67	13
67,5 bis 71	14
71,5 bis 75	15

Aufgabe 1 - zum Themenbereich Analysis

Windenergie

Seit Beginn der 90er Jahre erlebte Deutschland einen Boom im Bereich der Nutzung der Windenergie zur Stromerzeugung. Durch den Bau neuer Anlagen wird jährlich ein Zuwachs der jeweils am Jahresende insgesamt installierten Leistung aller Windenergieanlagen erreicht.[1]

a) Im Jahr 1994 betrug der *Zuwachs* der Leistung der Windenergieanlagen noch 300 Megawatt pro Jahr (MW/Jahr), bis 2002 steigerte er sich jährlich durchschnittlich um ca. 34%.
Angesetzt wird eine Funktionsvorschrift $f(t)$ für den jährlichen Zuwachs der Leistung der Windenergieanlagen im t-ten Jahr nach 1994.
Begründen Sie, dass die Funktion f mit der Gleichung $f(t) = 300 \cdot e^{0,293 \cdot t}$, t in Jahren ($t = 0$ entspricht Ende 1994) und $f(t)$ in MW pro Jahr zu den gegebenen Daten passt.

Verwenden Sie für b) und c) die Modellierung aus a).

b) Berechnen Sie die Zeit, in der sich der Zuwachs verdoppelt.
Erläutern Sie, was in diesem Zusammenhang der Wert von $4 \cdot 300$ angibt und ermitteln Sie diesen Wert sowie den zugehörigen Zeitpunkt t.
Skizzieren Sie mit Hilfe dieser Ergebnisse und des Werts von $f(10)$ den Graphen von f im Bereich $0 \le t \le 10$.

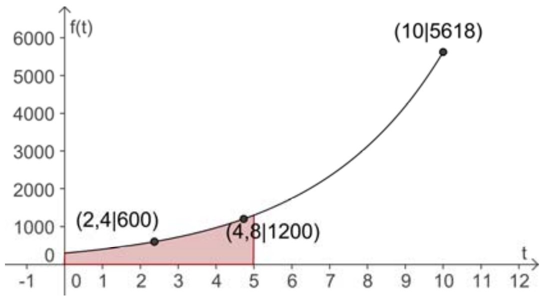
c) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f.
Berechnen Sie $\int_0^5 f(t)dt$.
Stellen Sie diesen Wert in der Skizze aus b) graphisch dar.

d) Mit dem Funktionsterm $G(x) = 650 + \int_0^x f(t)dt$ kann die Gesamtleistung der Windenergieanlagen in MW in Deutschland zum Zeitpunkt x näherungsweise vorhergesagt werden, vorausgesetzt die Bedingungen ändern sich nicht. $x = 0$ soll dabei für Ende 1994 stehen.
Bestimmen Sie $G(5)$.
Geben Sie an, was man aus dem Wert 650 in $G(x)$ ablesen kann.
Ziel der Bundesregierung ist es, den Anteil der erneuerbaren Energien an der Stromversorgung zu erhöhen. Heutiger Stand: Im Jahr 2010 soll der Anteil der Windenergie an der dann benötigten Gesamtenergieleistung 18% betragen, das entspricht ca. $25\,000$ Megawatt.
Berechnen Sie das Jahr, in dem mit der Modellierung durch $G(x)$ das Ziel von $25\,000$ MW erreicht wird.
Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Zielsetzung der Bundesregierung.

e) Da absehbar ist, dass der Boom im Bereich der Windenergie nicht unbegrenzt weitergeht, wurde für Prognosezwecke folgende Funktionsvorschrift $w(t)$ für die gesamte jeweils zum Zeitpunkt t vorhandene Leistung aller Windenergieanlagen an Land aufgestellt:
$w(t) = 30000 - 11500e^{-0,14t}$, t in Jahren ($t = 0$ entspricht Ende 2005), $w(t)$ in MW.
Prognostizieren Sie mit Hilfe dieser Funktion die installierte Leistung Ende 2017.
Bestimmen Sie $\lim\limits_{t \to \infty} w(t)$ und interpretieren Sie den Wert in Bezug auf die Prognosen für die zukünftigen Gesamtleistungen sowie für die Zuwachsraten.

[1] Die folgenden Prognosewerte beziehen sich nur auf Windenergieanlagen an Land, also ohne Windkraftanlagen auf See einzubeziehen.

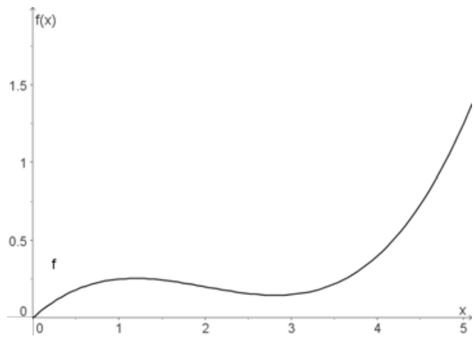
Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 1**

Lösungsskizze		**Bewertung**		
		I	**II**	**III**
1a	Unter der Annahme exponentiellen Wachstums ergibt sich mit dem gegebenen $f(0)=300$ und dem Wachstumsfaktor von $1,34$ $f(t)=300\cdot 1,34^t = 300\cdot e^{\ln 1,34\cdot t} \approx 300\cdot e^{0,293\cdot t}$.	2	1	
1b	 Verdopplungszeit: $2=e^{0,293t_d} \Rightarrow t_d \approx 2,4$. $4\cdot 300=1200$ gibt den Wert in MW/Jahr nach der „Vervierfachungszeit“ bzw. nach zwei Verdopplungszeiten an, also bei $t\approx 2\cdot 2,4=4,8$. $f(10)\approx 5618\ [MW/Jahr]$	5	3	
1c	$\int_0^5 f(t)dt = \left[300\cdot\frac{1}{0,293}\cdot e^{0,293\cdot t}\right]_0^5 \approx 3407$ *Markierung von $L(5)$ siehe Skizze in b)*	2	1	
1d	$G(5)=650+3407=4057$ Der Wert 650 gibt an, welche Gesamtleistung der Windenergieanlagen Ende 1994 vorhanden war ($G(0)$). $G(x)=650+\int_0^x f(t)dt = 1024e^{0,293\cdot x}-374$ $25000=1024e^{0,293\cdot x}-374 \Rightarrow x\approx 10,96$ Nach der Modellierung mit $G(x)$ würde schon nach ca. 11 Jahren, d.h. ca. 2005, der von der Bundesregierung erst für 2010 angestrebte Wert für die Leistung der Windenergieanlagen an Land erreicht gewesen sein.	1	6	1
1e	$w(12)\approx 27856,70\approx 27860$ $\lim_{t\to\infty} w(t)=30000$ Der Grenzwert gibt an, dass bei dieser Modellierung sich die Gesamtleistung der Windkraftanlagen einer Grenze von 30000 MW nähern wird, das bedeutet, dass die Zuwachsrate gegen Null geht.		2	1
Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**10**	**13**	**2**

Aufgabe 2 - zum Themenbereich Analysis

Spielfigur

Ein Metall verarbeitender Betrieb will eine Spielfigur in Serienproduktion herstellen. Diese Spielfigur wird in einer Fräsmaschine gefertigt, indem ein zylinderförmiges Stück Metall unter einem messerartigen Fräswerkzeug rotiert. Das Werkzeug bewegt sich dabei von links nach rechts mal höher, mal tiefer entlang einer in die Maschine eingegebenen mathematischen Funktion. Diese Funktion gibt also für jeden Querschnitt der Spielfigur Ihren Radius an. Die entstehende waagerecht liegende Spielfigur wird später so aufgestellt, dass sich das linke Ende als Kopf der Figur oben und das rechte Ende als Fuß unten befindet.

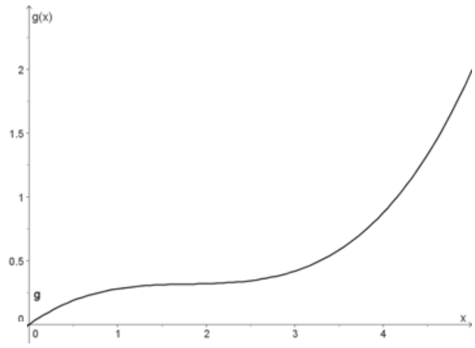


a) Am Kopf der $5cm$ hohen Spielfigur ist der Radius mit $0cm$ am kleinsten, während er am Fußende mit $1,25cm$ am größten ist. Am Übergang vom Kopf zum Hals der Spielfigur bei $x = 2cm$ beträgt der Radius $0,2cm$. Die Funktion f, deren Graph das Messer in der Maschine durchläuft, soll eine ganz-rationale Funktion dritten Grades sein. Um eine bestimmte Form des Kopfes zu erhalten, wird das Krümmungsverhalten am Übergang vom Kopf zum Hals durch $f''(2) = 0$ festgelegt.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f in Abhängigkeit von x.

Die Maschine kann auch eine $5cm$ große Spielfiguren mit der Randfunktion g mit der Gleichung

$$g(x) = 0,05x^3 - 0,27x^2 + 0,5x$$

herstellen.



b) Berechnen Sie den Radius der Spielfigur (mit der Randfunktion g) sowohl an ihrem Fußpunkt als auch an der Stelle $x = 2$.

c) Zeigen Sie, dass der Übergang vom Kopf zum Hals, d.h. der Wendepunkt, bei $x_W = 1,8$ liegt und berechnen Sie den Radius an dieser Stelle.

d) Der Betrieb möchte den Abfall bei der Herstellung der Spielfiguren abschätzen.
Ermitteln Sie mit Hilfe einer Stammfunktion von g das Volumen der Spielfigur.

Die Spielfiguren werden aus einem Metallzylinder mit einem Radius von $2cm$ und einer Länge von $5cm$ hergestellt. Bestimmen Sie den Abfall.
Vergleichen Sie die beiden Volumina miteinander.

(Hinweis: $(0,05x^3 - 0,27x^2 + 0,5x)^2 = \frac{x^6}{400} - \frac{27x^5}{1000} + \frac{1229x^4}{10000} - \frac{27x^3}{100} + \frac{x^2}{4}$)

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 2**

	Lösungsskizze	Bewertung		
		I	**II**	**III**
2a	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad ; \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad ; \quad f''(x) = 6ax + 2b$ Drei vorgegebene Punkte liefern $f(0) = 0$ und somit $d = 0$, $f(5) = 1,25 = 125a + 25b + 5c$ sowie $f(2) = 0,2 = 8a + 4b + 2c$ Das Krümmungsverhalten ergibt $f''(2) = 0 = 12a + 2b$. Zu lösen bleibt das LGS $$\left[\begin{array}{ccc} 1,25 & = & 125a + 25b + 5c \\ 0,2 & = & 8a + 4b + 2c \\ 0 & = & 12a + 2b \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1,25 & = & -25a + 5c \\ 0,2 & = & -16a + 2c \\ b & = & -6a \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc} a & = & \frac{1}{20} \\ b & = & -\frac{3}{10} \\ c & = & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$ Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{1}{20}x^3 - \frac{3}{10}x^2 + \frac{1}{2}x$.	5	7	
2b	$g(5) = 2$ und $g(2) = \frac{8}{25} = 0,32$, also beträgt der Radius am Fußpunkt $2\,cm$ und an der Stelle $x = 2$, also am Übergang vom Kopf zum Hals, $0,32\,cm$.	3		
2c	Für die Wendestelle muss gelten: $g''(x_W) = \frac{3}{10}x_W - 0,54 = 0$, woraus $x_W = 1,8$ folgt. Über die dritte Ableitung $g'''(x_W) = \frac{3}{10} \neq 0$ lässt sich nachweisen, dass an dieser Stelle ein Wendepunkt existiert. Der Radius berechnet sich zu $g(1,8) \approx 0,32$.	2	2	
2d	$V_S = \pi \cdot \int_0^5 (0,05x^3 - 0,27x^2 + 0,5x)^2 \, dx$ $= \pi \cdot \left[\frac{x^7}{2800} - \frac{9x^6}{2000} + \frac{1229x^5}{50000} - \frac{27x^4}{400} + \frac{x^3}{12} \right]_0^5 \approx 8,27$ Das Volumen der Spielfigur ist $8,27\,cm^3$ groß. $V_Z - V_S = [\pi \cdot 4 \cdot 5] - 8,27 = 62,83 - 8,27 = 54,56$, das Volumen des Abfalls ist mit $54,56\,cm^3$ also mehr als sechsmal so groß wie das der Spielfigur.		4	2
	Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	**10**	**13**	**2**

Aufgabe 3 - zum Themenbereich Analysis

Funktionsuntersuchung

Gegeben sind:

- die Funktion f mit $f(x) = \left(-0{,}5x^2 + 2\right) \cdot e^{-x}$,
- die erste Ableitungsfunktion mit $f'(x) = \left(0{,}5x^2 - x - 2\right) \cdot e^{-x}$,
- die Stammfunktion F mit der Funktionsgleichung $F(x) = \left(0{,}5x^2 + x - 1\right) \cdot e^{-x}$,
- die Graphen der beiden Ableitungsfunktionen:

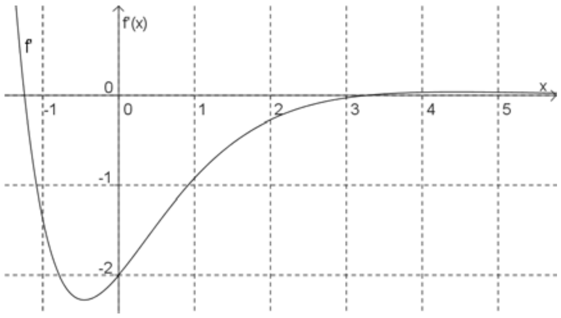


Abbildung 1: f'

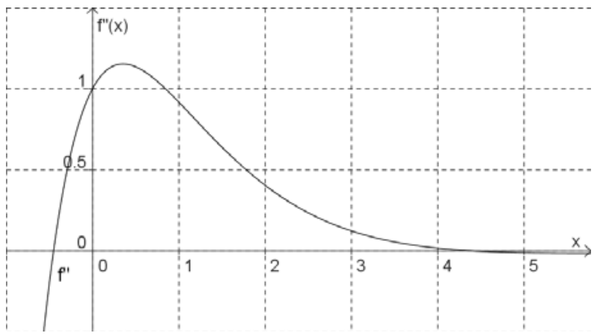


Abbildung 2: f''

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen der Funktion f mit den beiden Achsen des Koordinatensystems.

b) Bilden Sie die zweite Ableitung zur Funktion f.

c) Bestimmen Sie, alle Hoch- und Tiefpunkte des Graphen der Funktion f.

d) Skizzieren Sie mit den ermittelten Werten den Graphen zur Funktion f im Intervall $[-2{,}1;\ 5]$ in ein geeignetes Koordinatensystem. Kennzeichnen Sie die charakteristischen Punkte des Graphen in der Zeichnung.

e) Begründen Sie mit Hilfe der Abbildung 1, warum es sich in Abbildung 2 um den Graphen der zweiten Ableitung handelt. Ein Argument ist ausreichend.

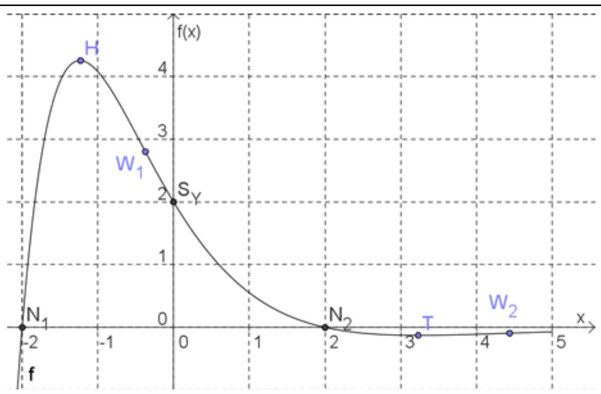
Erklären Sie mit Hilfe der beiden Abbildungen, dass der Graph von f an den beiden Stellen $x_{W1} = 2 - \sqrt{6} \approx -0{,}45$ und $x_{W2} = 2 + \sqrt{6} \approx 4{,}45$ Wendestellen besitzt.

f) An den Graphen der Funktion f soll an der Stelle $x = 0$ eine Tangente g gelegt werden. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Tangente g und zeichnen Sie die Tangente in Ihr Koordinatensystem.

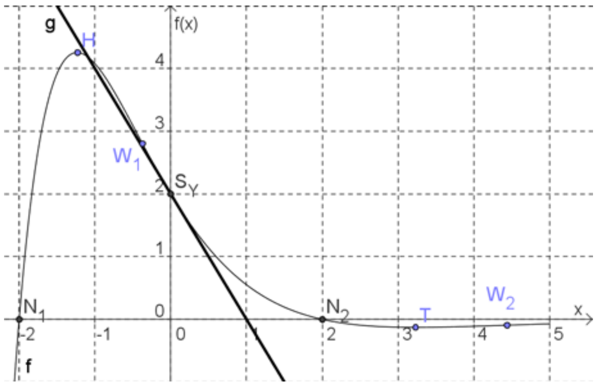
g) Die x-Achse und der Graph der Funktion f schließen im Intervall $\left[-2; 2\right]$ eine Fläche ein. Kennzeichnen Sie diese Fläche in Ihrer Zeichnung und berechnen Sie ihre Maßzahl A.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 3**

Lösungsskizze		Bewertung		
		I	II	III
3a	• Schnittpunkte mit x-Achse durch $f(x_N)=0$: $0=(-0{,}5x_N{}^2+2)\cdot e^{-x_N} \Leftrightarrow (-0{,}5x_N{}^2+2)=0$ ergibt $N_1(-2\,\|\,0)$ und $N_2=(2\,\|\,0)$ • Schnittpunkt mit y-Achse als Achsenabschnitt an der Stelle $x=0$ $f(0)=(-0{,}5\cdot 0^2-1)\cdot e^{-0}=2$ ergibt $S_Y(0\,\|\,2)$.	3		
3b	• Ausgehend von der gegebenen ersten Ableitung $f\,'(x)=\left(0{,}5x^2-x-2\right)\cdot e^{-x}$ folgt durch Anwendung von Produkt- und Kettenregel $f\,''(x)=\left(-0{,}5x^2+2x+1\right)\cdot e^{-x}$	1	2	
3c	• Notwendige Bedingung: Hoch- und Tiefpunkte liegt höchstens dann vor , wenn $f\,'(x_E)=0$ $0=\left(0{,}5x_E^2-x-2\right)\cdot e^{-x} \Leftrightarrow x_E=1+\sqrt{5}\approx 3{,}24 \vee x_E=1-\sqrt{5}\approx -1{,}24$ • Hinreichende Bedingungen überprüfen mit: $f\,''(1+\sqrt{5})\approx f\,''\left(3{,}24\right)\approx 0{,}09>0$ $f\,''\left(1-\sqrt{5}\right)\approx f\,''(-1{,}24)\approx -7{,}77<0$ • Funktionswerte an den Stellen für Hoch- und Tiefpunkt $f\left(1+\sqrt{5}\right)\approx f(3{,}24)\approx -0{,}13$ und $f\left(1-\sqrt{5}\right)\approx f\left(-1{,}24\right)\approx 4{,}25$ • Hochpunkt: $H\left(-1{,}24;\,4{,}25\right)$; Tiefpunkt: $T\left(3{,}24;-0{,}13\right)$	2	3	

3d	• Qualität der Zeichnung
	• Maßstab und Achsenbeschriftungen
	• Charakteristische Punkte
	  • Zwei Nullstellen
	  • HP, TP
	  • Zwei WP
	
		4		

Lösungsskizze		**Bewertung**		
		I	**II**	**III**
3e	• Begründung für den Graphen der zweiten Ableitung, z.B. über die positive Steigung von Abb. 1 zu Beginn und den positiven Werten des Graphen von Abb. 2 oder über die gleichen Werte der Extremstellen in Abb. 1 und Nullstellen in Abb. 2. • Begründung für die Wendestellen, zum Beispiel: in Abb. 1 hat der Graph von $f\,'$ an den gegebenen Stellen Extrema oder in Abb. 2 hat der Graph von $f\,''$ an den gegebenen Stellen Nullstellen mit Vorzeichenwechsel.		2	2

3f	• Ansatz $g(x)=mx+b$
	• x=0 einsetzen in
	  • $f(x)$ ergibt $b=2$
	  • $f\,'(x)$ ergibt $m=-2$
	• Lösung: $g(x)=-2x+2$
	• Zeichnung ergänzen
	
			4	

3g	• Bestimmtes Integral berechnen: $\int_{-2}^{2}\left(-0{,}5x^2+2\right)\cdot e^{-x}dx=\left[\left(0{,}5x^2+x-1\right)\cdot e^{-x}\right]_{-2}^{2}=3e^{-2}+e^{2}$ • Die Flächenmaßzahl ist der Betrag des Integrals, d.h. $A=7{,}8$ • Kennzeichnung der Fläche im Diagramm.		2	
Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**10**	**13**	**2**

Aufgabe 4 - zum Themenbereich Wahrscheinlichkeitsrechnung / Statistik

HIV-Tests

Man geht davon aus, dass in der BRD von den ca. 40 Millionen sexuell aktiven Personen im Alter von 18 bis 60 Jahren etwa 50 000 mit HIV infiziert sind. Zum Nachweis der Krankheit dienen Untersuchungen von Blutproben. Ist das Ergebnis des Bluttests „HIV-infiziert“, so spricht man von einem positiven Testergebnis.

In den letzten Jahren wurde ein Test entwickelt, der zwar nicht absolut sicher ist, für den aber immerhin folgendes gilt:

Wird eine Person getestet, die tatsächlich infiziert ist, so ist die Wahrscheinlichkeit $99{,}8\%$, dass der Test dann auch positiv reagiert.
Wird hingegen eine nicht infizierte Person getestet, so ist die Wahrscheinlichkeit 99%, dass der Test dann auch negativ reagiert.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine beliebig herausgegriffene Person nicht infiziert ist und positiv getestet wird.

b) Bestätigen Sie durch Rechnung das erstaunliche Ergebnis, dass eine als positiv getestete Person nur mit ca. 11% Wahrscheinlichkeit tatsächlich infiziert ist.

   In so genannten Risikogruppen ist der Anteil der HIV-Infizierten deutlich höher als im Bundesdurchschnitt. Bestimmen Sie für eine Risikogruppe, bei der ein Anteil von 1% HIV-Infizierten vorliegt, die Wahrscheinlichkeit, dass eine als positiv getestete Person tatsächlich infiziert ist.
   Erläutern Sie, inwiefern die Tatsache, dass ein Patient zu einer Risikogruppe gehört, für die Deutung eines positiven Ergebnisses eine Rolle spielt.

Es gibt seit einiger Zeit ein Medikament auf dem Markt, das bei 40% der Aids-Erkrankten nach spätestens einem Monat positiv wirkt.

c) Erläutern Sie, inwiefern man unter mathematischen Gesichtspunkten die Beobachtung von Patienten, die das Mittel einnehmen, als binomialverteilten Zufallsversuch auffassen kann und geben Sie die Zufallsvariable der Verteilung an.

Ein Pharma-Konzern hat ein neues Medikament entwickelt, von dem er behauptet, dass der Krankheitsverlauf bei mehr Personen nachweisbar positiv beeinflusst wird als bei dem bisher auf dem Markt befindlichen Medikament. In einer klinischen Studie an 100 an Aids erkrankten Personen, die das Medikament einnehmen, soll eine Wirksamkeit über 40% mit einem Signifikanztest nachgewiesen werden.

d) Bei der Auswertung der Studie möchte man prüfen, ob die Hypothese H_0: „Das neue Medikament ist nicht besser als das alte.“ verworfen werden kann.
   Folgende Entscheidungsregel wird benutzt: „Falls unter den 100 Patienten bei 52 oder mehr eine positive Wirkung eintritt, nehmen wir an, dass das neue Medikament besser ist.“
   Wenn man sich nach dieser Entscheidungsregel dafür entscheidet, dass das Medikament besser ist, kann man einen Fehler machen (Fehler 1. Art, α-Fehler). Erläutern Sie diesen Fehler auf das Beispiel bezogen und berechnen Sie seine Wahrscheinlichkeit.

e) Ermitteln Sie eine Entscheidungsregel, wann die Hypothese H_0: „Das neue Medikament ist nicht besser als das alte.“ auf dem $5\%-$Signifikanzniveau verworfen werden kann.

f) Auf dem Medikamentenmarkt ist es üblich, auf dem Signifikanzniveau von 1% zu testen. Nennen Sie einen Grund, der für ein Signifikanzniveau von 5% sprechen kann.

Material zur Aufgabe HIV-Tests

Kumulierte Binomialverteilung, n = 100

k	p= 0,4	p= 0,43
0-10	0,000	0,000
11	0,000	0,000
12	0,000	0,000
13	0,000	0,000
14	0,000	0,000
15	0,000	0,000
16	0,000	0,000
17	0,000	0,000
18	0,000	0,000
19	0,000	0,000
20	0,000	0,000
21	0,000	0,000
22	0,000	0,000
23	0,000	0,000
24	0,001	0,000
25	0,001	0,000
26	0,002	0,000
27	0,005	0,001
28	0,008	0,001
29	0,015	0,003
30	0,025	0,005
31	0,040	0,009
32	0,062	0,016
33	0,091	0,026
34	0,130	0,042
35	0,179	0,064
36	0,239	0,094
37	0,307	0,133
38	0,382	0,182
39	0,462	0,241
40	0,543	0,308
41	0,623	0,383
42	0,697	0,462
43	0,763	0,542
44	0,821	0,621
45	0,869	0,694
46	0,907	0,761
47	0,936	0,819
48	0,958	0,867
49	0,973	0,905
50	0,983	0,935
51	0,990	0,956
52	0,994	0,972
53	0,997	0,983
54	0,998	0,990
55	0,999	0,994
56	1,000	0,997
57	1,000	0,998
58	1,000	0,999
59	1,000	1,000
60	1,000	1,000

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 4**

Lösungsskizze		Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
4a	$p(\text{ infiziert }) = 0{,}00125$; $p(\text{ nicht infiziert }) = 0{,}99875$ $p(\text{ nicht infizierte Person wird positiv getestet }) = 0{,}99875 \cdot 0{,}01 \approx 1\%$	2		
4b	Mit Baumdiagramm oder Vierfeldertafel und Bestimmung der entsprechenden Pfad bzw. Feldwahrscheinlichkeiten (oder Bayes-Formel) und den Angaben zu Testspezifität und Testsensitivität ergibt sich $P(I \mid +) \approx 11{,}1\%$ („ I “ steht für „infiziert“, „+“ für „positiv getestet“) Mit $p(\text{ infiziert }) = 0{,}01$ erhält man $P(I \mid +) \approx 0{,}502 = 50{,}2\%$. Mögliche Erläuterung: Da der Anteil der Infizierten größer ist, ist auch der Anteil der richtig positiv Getesteten an den insgesamt positiv Getesteten größer bzw. der Anteil der falsch positiv Getesteten an den insgesamt positiv Getesteten kleiner. Damit ist der diagnostische Wert eines positiven Ergebnisses höher, die Wahrscheinlichkeit einer Erkrankung (traurigerweise) größer.	5	4	1
4c	Mögliche Erläuterung: Stufen des Versuchs: 1.Patient, 2.Patient, ... Es gibt zwei mögliche Ausfälle auf jeder Stufe: Es wird ein Patient betrachtet, bei dem das Mittel wirkt bzw. nicht wirkt. Die Tatsache, dass auf einer Stufe ein Patient betrachtet wird, bei dem das Mittel wirkt / nicht wirkt, beeinflusst die Ausfälle auf den anderen Stufen nicht, oder die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person betrachtet wird, bei der das Mittel wirkt / nicht wirkt, ist bei jedem Patienten gleich. X: Anzahl der unter Beobachtung stehenden Patienten, bei denen das Mittel wirkt.	2	1	
4d	Fehlermöglichkeit (Fehler 1.Art): Man entscheidet sich dafür, dass das Medikament besser ist, obwohl es höchstens so gut wie das alte wirkt. X: Anzahl der Personen, bei denen das Mittel wirkt X ist binomialverteilt mit $n = 100$ und $p_0 = 0{,}4$, siehe c). $P(X > 51) = 1 - P(X \le 51) \approx 1 - 0{,}990 = 1\%$ Die Wahrscheinlichkeit für diesen Fehler beträgt bei der genannten Entscheidungsregel höchstens 1% .	1	3	

Lösungsskizze		**Bewertung**		
		I	**II**	**III**
4e	Rechtsseitiger Test, also ist das kleinste k gesucht, für das $P(X \geq k) \leq 5\%$ gilt. Mit Tabelle oder Taschenrechner folgt $k = 49$, da $P(X \geq 49) = 1 - P(X \leq 48) < 5\%$, aber $P(X \geq 48) = 1 - P(X \leq 47) > 5\%$ Entscheidungsregel: Wenn bei 49 oder mehr Patienten das Mittel Wirkung zeigt, nehmen wir an, dass H_0 „Das neue Medikament ist nicht besser als das alte“ widerlegt ist.		4	
4f	Für 5% spricht z.B.: Im Interesse der Kranken sollte man die Gefahr, dass ein etwas besseres Mittel nicht erkannt wird, verringern. Interessen hinter den Argumentationen sollten deutlich werden.			2
Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**10**	**12**	**3**

Aufgabe 5 - zum Themenbereich Lineare Algebra

Verteilung von Einkaufswagen

Ein Supermarkt verteilt seine insgesamt 400 Einkaufswagen auf drei Plätze: im Eingangsbereich E, auf dem Parkplatz P und bei den Glascontainern G. An diesen Plätzen können sie mitgenommen bzw. abgestellt werden. Ein Schüler soll dafür sorgen, dass an allen drei Plätzen ausreichend Einkaufswagen zur Verfügung stehen. Statt die Wagen hin und her zu schieben, will der mathematisch interessierte Schüler eine Übergangsmatrix aufstellen. Er markiert morgens die Wagen an den drei Plätzen so, dass er abends erkennen kann, von welchem Platz jeder einzelne Wagen stammt.

Nach einigen Tagen stellte er folgende Tabelle für die Übergangsanteile am Ende eines Tages auf:

von / nach	Eingangsbereich (E)	Parkplatz (P)	Glascontainer (G)
Eingangsbereich (E)	$0,3$	$0,2$	$0,3$
Parkplatz (P)	$0,6$	$0,6$	$0,7$
Glascontainer (G)	$0,1$	$0,2$	$0,0$

a) Erstellen Sie zu der sich aus der Tabelle ergebenden Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,6 & 0,6 & 0,7 \\ 0,1 & 0,2 & 0,0 \end{pmatrix}$ das zugehörige Übergangsdiagramm.
Interpretieren Sie die Werte $0,3$, $0,7$ und $0,0$ aus der dritten Spalte in diesem Zusammenhang.

b) Wie viele Einkaufswagen wird der Schüler am ersten Abend an den einzelnen Plätzen gezählt haben, wenn sich zu Beginn seiner Untersuchung 200 Einkaufswagen im Eingangsbereich E und je 100 an den anderen beiden Plätzen P und G befanden? Berechnen Sie dazu ausgehend von $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$ die Verteilung $\vec{v}_1$.
Als weitere Verteilungen erhält man auf ganze Zahlen gerundet:
$\vec{v}_3 \approx \begin{pmatrix} 96 \\ 246 \\ 58 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_4 \approx \begin{pmatrix} 95 \\ 246 \\ 59 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_5 \approx \begin{pmatrix} 95 \\ 246 \\ 59 \end{pmatrix}$.

Die Ergebnisse legen eine Vermutung über die langfristige Verteilung der Einkaufswagen nahe. Beschreiben Sie Ihre Vermutung.

c) Stellen Sie zur Bestimmung der stationären Verteilung $\vec{v}_s$ von 400 Einkaufswagen ein lineares Gleichungssystem auf, ohne es zu lösen.

Bestätigen Sie, ohne ein lineares Gleichungssystem zu lösen, dass $\vec{v}_s \approx \begin{pmatrix} 95 \\ 246 \\ 59 \end{pmatrix}$, ganzzahlig gerundet, die gesuchte stationäre Verteilung von M ist.

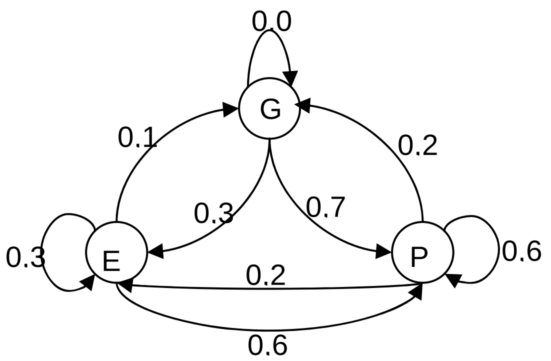
Erläutern Sie den Zusammenhang mit Aufgabenteil b).

d) Es gilt $M^7 = \begin{pmatrix} 0,2385 & 0,2385 & 0,2385 \\ 0,6147 & 0,6147 & 0,6147 \\ 0,1468 & 0,1468 & 0,1468 \end{pmatrix}$, auf 4 Nachkommastellen gerundet. Interpretieren Sie die in der Matrix vorkommenden Werte $0,2385$, $0,6147$ und $0,1468$ im Sachzusammenhang und erläutern Sie die spezielle Form der Matrix.

Nach Beseitigung der Glascontainer wurde der Platz G eingespart. Am ersten Morgen danach wurden je 200 Einkaufswagen an die beiden Plätze E und P gestellt. Aufgrund seiner Erfahrung griff der Schüler in die Verteilung der Einkaufswagen nicht mehr ein. Nach längerer Zeit befanden sich jeden Abend 50 Einkaufswagen bei E und die restlichen 350 bei P. Mit etwas mathematischem Geschick ermittelt der Schüler zwei Matrizen $U = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 \\ 0,7 & 0,9 \end{pmatrix}$ und $S = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,125 \\ 0,875 & 0,875 \end{pmatrix}$, die beide die Verteilung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 50 \\ 350 \end{pmatrix}$ als stationäre Verteilung besitzen, d.h. es gilt: $U * \begin{pmatrix} 50 \\ 350 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 350 \end{pmatrix}$ und $S * \begin{pmatrix} 50 \\ 350 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 350 \end{pmatrix}$.

e) Der Schüler will herausfinden, welche bzw. ob eine der beiden Matrizen den Prozess beschreibt. Erklären Sie ihm, auch mit einem Beispiel, wie er vorgehen kann.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 5**

Lösungsskizze		Bewertung		
		I	II	III
5a	Übergangsdiagramm:  Von den bei den Glascontainern mitgenommenen Einkaufswagen stehen an jedem Abend 30% im Eingangsbereich, 70% beim Parkplatz und 0% wieder bei den Glascontainern.	4	2	
5b	$\vec{v}_1 = M * \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60+20+30 \\ 120+60+70 \\ 20+20+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 250 \\ 40 \end{pmatrix}$, Es sieht so aus, als würde es eine Grenzverteilung geben, da sich $\vec{v}_3$ und $\vec{v}_4$ nur noch wenig unterscheiden und $\vec{v}_4$ mit $\vec{v}_5$ bereits ganzzahlig übereinstimmt.	2	2	
5c	Die Gleichung $M * \vec{v}_s = \vec{v}_s$ für 400 Einkaufswagen führt auf das lineare Gleichungssystem $\left[\begin{array}{llll} -0{,}7x & +0{,}2y & +0{,}3z & =0 \\ 0{,}6x & -0{,}4y & +0{,}7z & =0 \\ 0{,}1x & +0{,}2y & -1\,z & =0 \\ x & +\;y & +\;z & =400 \end{array}\right]$. $M * \vec{v}_s = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 95 \\ 246 \\ 59 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28{,}5+49{,}2+17{,}7 \\ 57+147{,}6+41{,}3 \\ 9{,}5+49{,}2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 95{,}4 \\ 245{,}9 \\ 58{,}7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 95 \\ 246 \\ 59 \end{pmatrix} = \vec{v}_s$ Da die Summe der Komponenten von $\vec{v}_s$ 400 ergibt, erfüllt $\vec{v}_s$ das LGS. Aufgrund von b) scheint die stationäre Verteilung zugleich Grenzverteilung zu sein.	3	5	

Lösungsskizze		**Bewertung**		
		I	**II**	**III**
5d	Da $\vec{v}_7 = M^7 * \vec{v}_0$, gibt der Wert $0{,}2385$ an, dass sich $23{,}85\%$ der 200 Einkaufswagen von E, aber auch der je 100 von P und G, nach einer Woche in E befinden, also $23{,}85\%$ der insgesamt 400 Einkaufswagen, das sind gerade die 95 Stück (ganzzahlig gerundet) aus der stationären Verteilung. Entsprechend geben $0{,}6147 = 61{,}47\%$ und $0{,}1468 = 14{,}68\%$ die Anteile von 400 Einkaufswagen an, die sich nach einer Woche an dem zugehörigen Platz befinden. Die Form (drei gleiche Spalten) der Matrix zeigt, dass sich die Verteilungen bereits nach einer Woche auf die stationäre Grenzverteilung eingependelt haben.	1	3	
5e	Mögliches Argument: Der Schüler könnte die Einkaufswagen auf E und P wieder neu verteilen, z. B. mit je 200 (nur die Verteilung 50 bei E und 350 bei P würde ihm nichts nützen). Am Abend muss er die Einkaufswagen an den beiden Plätzen zählen. Stimmt das Ergebnis mit einem der beiden Vektoren $\vec{u}_1$ bzw. $\vec{s}_1$ mit $\vec{u}_1 = U * \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 320 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{s}_1 = S * \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 350 \end{pmatrix}$ überein, so kann die zugehörige Matrix den Prozess beschreiben.			3
Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**10**	**12**	**3**

Aufgabe 6 - zum Themenbereich Analytische Geometrie

Kunstraub

Die Abbildung (siehe nächste Seite) zeigt den Entwurf einer Kulisse für einen Spielfilm. Es ist eine Ausstellungshalle mit einem Kunstobjekt dargestellt. Im Spielfilm soll das Kunstobjekt $K(1|7{,}5|0)$ von einem Dieb entwendet werden. Der Kunstgegenstand ist durch eine Barriere von Laserstrahlen geschützt. Der Dieb startet vom Ausgang $A(21|3|0)$. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.

Die Geradengleichungen

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} \text{ und } g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$$

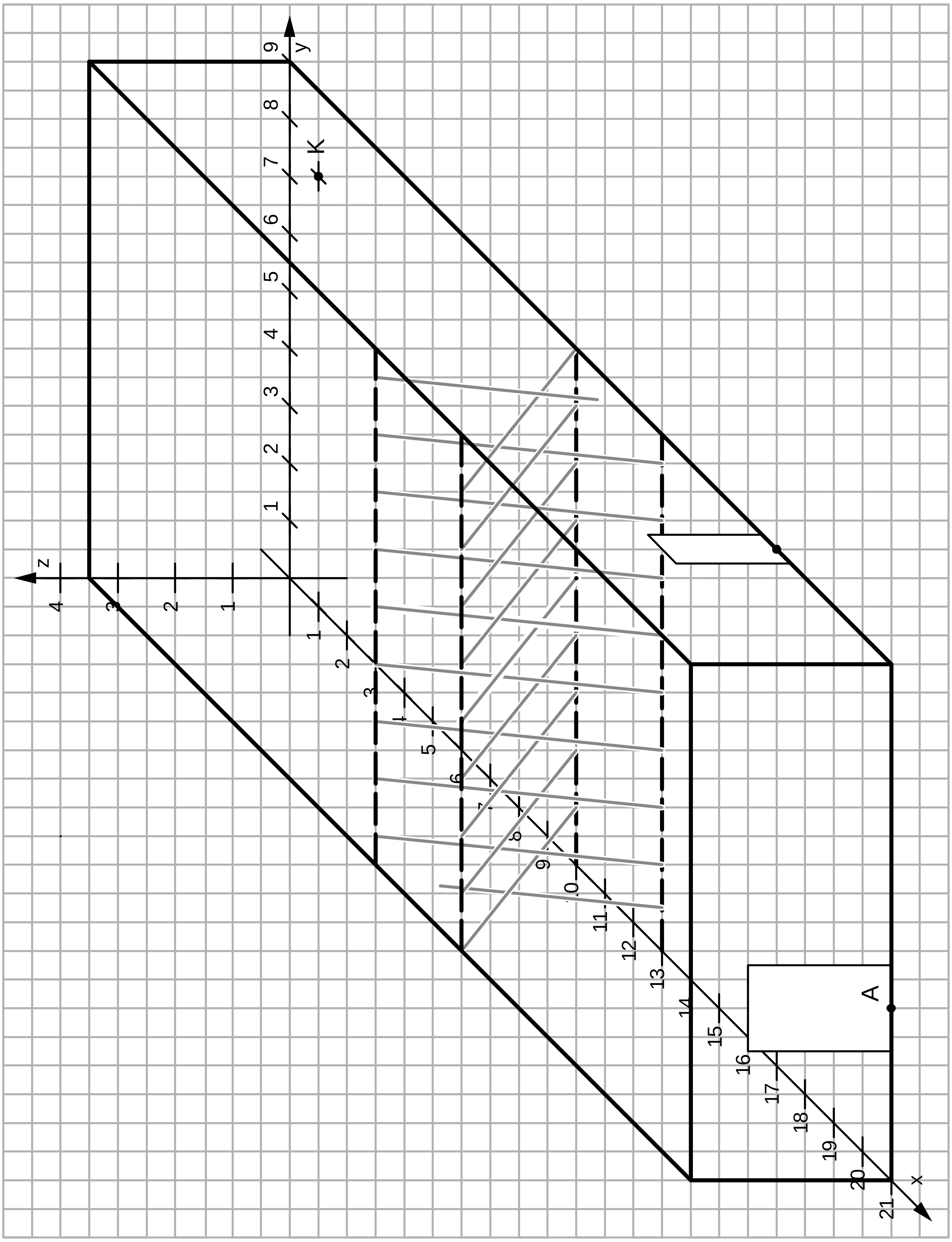
beschreiben den Verlauf zweier sich kreuzender Laserstrahlen.

a) Markieren Sie die beiden Laserstrahlen in der Zeichnung, deren Verlauf durch die Geraden g_1 und g_2 beschrieben wird.
Zeigen Sie, dass diese beiden Laserstrahlen entlang windschiefer Geraden verlaufen.

b) In dem Spielfilm prüft der Dieb, ob er sich zwischen den Strahlen hindurchzwängen kann.
Bestimmen Sie hierzu zwei parallele Ebenen E_1 und E_2 in Hessescher Normalenform, wobei die Ebene E_1 die Gerade g_1 und die Ebene E_2 die Gerade g_2 enthalten soll.
Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden.
Ermitteln Sie den Schnittwinkel der Ebenen E_1 und E_2 mit der xy-Ebene.

c) In dem Spielfilm wird der Kunstdieb die Laserbarriere überwinden und bei der Berührung des Kunstgegenstandes K zum Zeitpunkt $t = 0$ die akustische Alarmanlage auslösen (Zeit t in Sekunden).
Nach dem ersten Schreck befindet sich der Dieb zum Zeitpunkt $t = 2$ im Punkt K und bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit ohne Beachtung der Laserstrahlen auf den Ausgang A zu. Er erreicht den Ausgang zum Zeitpunkt $t = 4{,}5$. Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit der Dieb läuft, d.h. welchen Weg er pro Sekunde zurücklegt.

Material zur Aufgabe Kunstraub



Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 6**

Lösungsskizze		Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
6a	Einzeichnen der Laserstrahlen. Nachweis der linearen Unabhängigkeit der Richtungsvektoren. Daher sind die Geraden nicht parallel. Der Ansatz $\begin{pmatrix}10\\5\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\3{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\5{,}5\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-3\\-1\\3{,}5\end{pmatrix}$ führt mit den ersten beiden Zeilen zu $r=\frac{1}{4}$ und $s=\frac{3}{4}$, was zum Widerspruch mit der dritten Zeile führt. Es gibt also keinen Schnittpunkt und die Geraden sind windschief.	4	4	
6b	Ein Normalenvektor $\vec{n}$ der parallelen Ebenen steht senkrecht auf den Richtungsvektoren der beiden Geraden. Dies liefert: $3n_x-n_y+3{,}5n_z=0$ und $-3n_x-n_y+3{,}5n_z=0$. Ein möglicher Normalenvektor ist $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\7\\2\end{pmatrix}$. Einsetzen der Koordinaten der Stützvektoren der Geraden in den Ansatz $7y+2z=d$ liefert die Ebenen $E_1:7y+2z=35$ und $E_2:7y+2z=\frac{77}{2}$ bzw. in Normalenform wie z.B. $E_1:\frac{1}{\sqrt{53}}\begin{pmatrix}0\\7\\2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\frac{35}{\sqrt{53}}=0$ bzw. $E_2:\frac{1}{\sqrt{53}}\begin{pmatrix}0\\7\\2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\frac{77}{2\sqrt{53}}=0$. Der Abstand berechnet sich z.B. mit E_2 und Punkt $P_1(10\|5\|0)$: $Abst(E_2;P_1)=\left\|\frac{1}{\sqrt{53}}\begin{pmatrix}0\\7\\2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}10\\5\\0\end{pmatrix}-\frac{77}{2\sqrt{53}}\right\|=\frac{7}{2\sqrt{53}}\approx 0{,}48$, also ca. 48 cm. Schnittwinkelberechnung mittels Normalenvektoren der Ebenen: $\cos\alpha=\frac{\left\|\begin{pmatrix}0\\7\\2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix}0\\7\\2\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|}=\frac{2}{\sqrt{53}}$, $\alpha\approx 74°$.	5	6	2
6c	Der Dieb legt die Strecke $\overline{KA}$ mit einer Länge von $\left\|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OK}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}20\\-4{,}5\\0\end{pmatrix}\right\|=20{,}5$ Metern in $2{,}5$ Sekunden zurück und läuft damit mit einer Geschwindigkeit von $8{,}2$ Metern pro Sekunde.	1	3	
Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**10**	**13**	**2**

Protokollbogen zur Auswahl der Aufgaben für die Prüfungsakten der Schule

Auswahl der Aufgaben:

- Fach: **Mathematik** (TR)
- Schule: ____
- Schulinterne Kursbezeichnung: ______________________________
- **Fachlehrerin / Fachlehrer** (Name, Vorname):

  ____

  Ich wähle für die Bearbeitung durch die Prüflinge die 3 Aufgaben Nr. __________ aus.

  Bremen / Bremerhaven, den ___.5.2008

  ____
  (Unterschrift Fachlehrerin / Fachlehrer)

- **Korreferentin / Korreferent** (Name, Vorname):

  ____

  Ich schließe mich der Auswahl an / nicht an (bitte Unzutreffendes streichen). Im Falle der Nichtzustimmung füge ich eine kurze schriftliche Begründung auf der Rückseite des Protokolls bei.

  Bremen / Bremerhaven, den ___.5.2008

  ____
  (Unterschrift Korreferentin / Korreferent)

- **Auswahl durch die Vorsitzende / den Vorsitzenden des Fachprüfungsausschusses** (im Falle der Nichtübereinstimmung zwischen Fachprüferin/Fachprüfer und Korreferentin / Korreferenten)

  Ich wähle die 3 Aufgaben Nr. __________ zur Bearbeitung durch die Prüflinge aus und füge eine kurze schriftliche Begründung auf der Rückseite des Protokolls bei.

  Bremen / Bremerhaven, den ___.5.2008

  ____
  (Unterschrift Vorsitzende(r) Fachprüfungsausschuss)

Rückmeldebogen für die Zentralabiturkommission Mathematik zur Auswahl der Aufgaben

Auswahl der Aufgaben:

- Fach: **Mathematik** (TR)
- Schule: ____
- Schulinterne Kursbezeichnung: ________________________________
- Anzahl der Schülerinnen und Schüler: ____________________________
- Der Fachprüfungsausschuss hat für die Bearbeitung durch die Prüflinge die drei Aufgaben

  Nr. ________ , ________ und ________ ausgewählt.

Bremen / Bremerhaven, den ___.5.2008

____
(Unterschrift)

Schicken Sie diesen Bogen bitte möglichst umgehend per FAX an folgende Adresse:

Landesinstitut für Schule, Herrn Löwer

FAX 0421-361-6451

Die Rückmeldebögen werden im LIS gesammelt und den Zentralabiturkommissionen zur Verfügung gestellt. Sie sind eine Grundlage für die Auswertungsgespräche mit den Schulen und die Erstellung neuer Aufgaben.