Die Senatorin
für Bildung und Wissenschaft

Freie
Hansestadt
Bremen

Schriftliche Abiturprüfung 2009 im dritten Prüfungsfach

Grundkurs Mathematik (TR)

Unterlagen für Lehrerinnen und Lehrer

- Diese Unterlagen sind nicht für die Prüflinge bestimmt -

Die Bewertung der Prüfungsleistung

Die Lösungsskizze stellt eine Lösungsvariante dar; andere gleichwertige Lösungen sind entsprechend zu bewerten. Die Bewertungsanteile pro Teilaufgabe sind obligatorisch.

Für die Festlegung der Gesamtleistung werden den erzielten Bewertungseinheiten die entsprechenden Notenstufen gemäß folgender Tabelle zugeordnet.

Bewertungs-einheiten	**KMK Punkte**
0 bis 14,5	00
15 bis 20	01
20,5 bis 24,5	02
25 bis 29,5	03
30 bis 33,5	04
34 bis 37	05
37,5 bis 41	06
41,5 bis 44,5	07
45 bis 48,5	09
49 bis 52	09
52,5 bis 56	10
56,5 bis 79	11
60 bis 63,5	12
64 bis 67	13
67,5 bis 71	14
71,5 bis 75	15

Aufgabe 1 - zum Themenbereich Analysis

Eine kleine Gruppe von SchülerInnen hat sich entschlossen, für den Wettbewerb „Jugend forscht" den Verkehrsfluss an einer Straße ihres Wohnortes zu untersuchen. Zu diesem Zweck zählen sie an einer bestimmten Stelle dieser Straße zu verschiedenen Zeitpunkten x, wie viele Autos in der jeweils folgenden Minute vorbeifahren. Für ihre Untersuchungen wollen sie zunächst eine ganzrationale Funktion f dritten Grades aufstellen, die vom Mittag bis zum Abend zu jedem Zeitpunkt x (in Stunden seit Zählungsbeginn gemessen) näherungsweise die Verkehrsdichte in Anzahl der Autos pro Minute beschreibt.

a) Am ersten Tag zählen die Schüler mittags, zu Beginn der Beobachtung, 11 Autos in der Minute. Nach einer Stunde stellen sie ein Minimum in der Verkehrsdichte fest. Vier Stunden nach Beginn ihrer Zählungen, erreicht die Verkehrsdichte ihren höchsten Wert. Fünf Stunden nach Zählungsbeginn zählen sie 16 Autos pro Minute und beenden ihre Aufzeichnungen.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f in Abhängigkeit von der Zeit x in Stunden seit Zählungsbeginn.

An einem anderen Tag zählt die Gruppe der SchülerInnen den Verkehrsfluss an der gleichen Stelle, dieses Mal über sieben Stunden. Die Verkehrsdichte der Autos lässt sich näherungsweise durch die Funktion g mit der Gleichung

$$g(x) = -2x^3 + 18x^2 - 30x + 14 \,,\, 0 \leq x \leq 7$$

beschreiben, x in Stunden seit Zählungsbeginn, $g(x)$ in Anzahl der Autos pro Minute zum Zeitpunkt x.

Verwenden Sie für die weiteren Aufgabenteile diese Funktion g .

b) Berechnen Sie die Verkehrsdichte vier Stunden nach Beginn der Zählung und am Ende der Beobachtung.
Begründen Sie, dass die Funktion g für einen über 7 Stunden hinausgehenden Zeitabschnitt keine sinnvolle Beschreibung der Verkehrsdichte liefern kann.

c) Zeigen Sie rechnerisch, dass die größte Verkehrsdichte zum Zeitpunkt $x_{E1} = 5$ eingetreten ist und bestimmen Sie diese größte Verkehrsdichte in Anzahl der Autos pro Minute.
Zeigen Sie rechnerisch, dass die geringste Verkehrsdichte mit 0 Autos pro Minute eine Stunde nach Beobachtungsbeginn eintritt.

d) Berechnen Sie den Wert $N = 60\int_0^5 g(x)\,dx$ und erläutern Sie seine Bedeutung im Sachkontext.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 1**

<table>
<tr><th rowspan="2" colspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung/ Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad ; \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
Vier beschriebene Eigenschaften liefern $f(0) = 11$ und somit $d = 11$,
$f'(1) = 0 = 3a + 2b + c$ sowie $f'(4) = 0 = 48a + 8b + c$ und
$f(5) = 16 = 125a + 25b + 5c + 11$
Zu lösen bleibt das LGS
$\left[\begin{array}{ccc} 0 & = & 3a+2b+c \\ 0 & = & 48a+8b+c \\ 5 & = & 125a+25b+5c \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc} -\frac{5}{2}a & = & 5 \\ b & = & -\frac{15}{2}a \\ c & = & -3a-2b \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc} a & = & -2 \\ b & = & 15 \\ c & = & -24 \end{array}\right]$
Funktionsgleichung: $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x + 11$.</td><td>5</td><td>7</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$g(4) = 54$, also beträgt die Verkehrsdichte 4 Stunden nach Beginn der Zählung 54 Autos pro Minute.
Aus $g(7) = 0$ folgt am Ende der Beobachtung eine Verkehrsdichte von 0 Autos pro Minute.
Nach einem Zeitraum von 7 Stunden ergeben sich negative Verkehrsdichten. Eine Modellierung mit *g* ist somit nicht mehr sinnvoll.</td><td>2</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Für die Extremstelle muss gelten: $g'(x_{E1}) = -6{x_{E1}}^2 + 36x_{E1} - 30 = 0$, dies wird durch Einsetzen bestätigt $g'(5) = -6 \cdot 5^2 + 36 \cdot 5 - 30 = 0$. Über die zweite Ableitung $g''(5) = -12 \cdot 5 + 36 < 0$ lässt sich nachweisen, dass an dieser Stelle ein Hochpunkt existiert. Die Verkehrsdichte berechnet sich mit $g(5) = 64$.
Für die Stelle $x_{E2} = 1$ bestätigt $g'(1) = -6 \cdot 1^2 + 36 \cdot 1 - 30 = 0$ und $g''(1) = -12 \cdot 1 + 36 > 0$ den Tiefpunkt mit $g(1) = 0$.</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>$N = 60\int_0^5 g(x)\,dx = 60 \cdot \left[-\frac{1}{2}x^4 + 6x^3 - 15x^2 + 14x\right]_0^5 = 7950$
Von Beginn der Beobachtung bis fünf Stunden nach Beginn der Beobachtung passierten insgesamt 7950 Autos die Beobachtungsstelle der Straße.</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Insgesamt 25 Bewertungseinheiten, verteilt auf die Anforderungsbereiche</td><td>**10**</td><td>**13**</td><td>**2**</td></tr>
<tr><td colspan="2">Prozentuale Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>40%</td><td>52%</td><td>8%</td></tr>
</table>

Aufgabe 2 - zum Themenbereich Analysis

Der Victoriasee liegt in Zentralafrika und ist etwa $68000\,\text{km}^2$ ($6{,}8\cdot 10^{10}\,\text{m}^2$) groß. Er bietet der Wasserhyazinthe ideale Lebensbedingungen. Man misst bei der Pflanze das Wachstum anhand der Fläche, die sie bedeckt. Folgende Tabelle gibt Messwerte wieder, die man vor Ort ermitteln konnte.

Anzahl der Wochen	0	10	20
Von Hyazinthen bedeckte Fläche in m^2	1 (bei Neuanpflanzung)	30	830

a) Zur Modellierung dieses Wachstumsprozesses wurde eine Funktion aufgestellt. Zeigen Sie, dass die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = e^{0{,}336\cdot x}$, $x \geq 0$, die Werte der Tabelle annähernd erfasst.
Beschreiben Sie die Art des Wachstums mit ihren zu Grunde liegenden Annahmen. Geben Sie dazu auch den Wachstumsfaktor und den prozentualen Zuwachs pro Woche an.
Erläutern Sie kurz mögliche Grenzen der Modellierung.

Verwenden Sie für b) bis d) die Modellierung aus a).

b) Berechnen Sie, nach wie vielen Wochen der See von der Pflanze vollständig bedeckt sein würde, würde sie neu angepflanzt werden.

c) Beurteilen Sie, ob die Modellierung zu folgender Information über die Wasserhyazinthe passt:
„Etwa alle 10-15 Tage verdoppelt die Pflanze ihre Ausmaße."

d) Bestimmen Sie $f'(x)$ und erläutern Sie die Bedeutung von $f'(x)$ im Zusammenhang mit dem Pflanzenwachstum.
Ein Schüler behauptet. „Eine Verdreifachung der Wachstumszeit führt zu einer Verdreifachung der Ableitungswerte." Weisen Sie durch ein Gegenbeispiel nach, dass diese Aussage falsch ist.

e) Berechnen Sie $\int_{50}^{70} 0{,}336\cdot f(x)\,dx$. Geben Sie dazu den Rechenweg an.
Erläutern Sie die Bedeutung des Wertes auf das Beispiel bezogen. Berücksichtigen Sie dazu, dass $0{,}336\cdot f(x)$ in m^2 pro Woche angegeben wird.

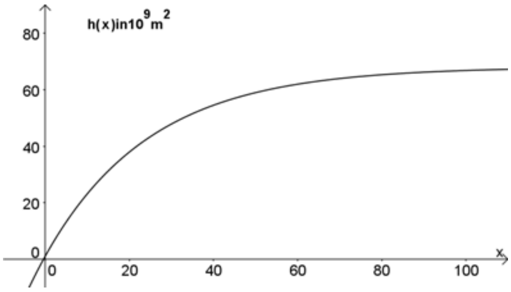
f) Eine Schülerin mit Biologie als Leistungskurs schlägt eine andere Modellierung für den Wachstumsprozess vor. Folgende Gleichung hat sie entwickelt:

$$h(x) = 6{,}8\cdot 10^{10} - (6{,}8\cdot 10^{10} - 1)\cdot e^{-0{,}04\cdot x},\ x \geq 0\,.$$

Untersuchen Sie wesentliche Eigenschaften dieser Modellierung, indem Sie zunächst eine Skizze des Graphen von h mit Hilfe einiger Wertepaare anfertigen.
Beschreiben Sie ein Pflanzenwachstum gemäß der Funktion h zu Beginn und langfristig. Untersuchen Sie dazu auch $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)$.
Geben Sie je einen Grund an, der für bzw. gegen diese Modellierung spricht.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen Aufgabe 2

Lösungsskizze		Bewertung/ Zuordnung		
		I	II	III
a)	Durch Einsetzen der x -Werte (Anzahl der Wochen) in die Funktionsgleichung ergeben sich die Tabellen-Werte (von Hyazinthen bedeckte Fläche in m²), auf 10 m² gerundet. Die Pflanze wächst ungehemmt exponentiell. Jede Woche wächst sie mit dem Faktor $e^{0,336} \approx 1,399$, bzw. um ca. 40%. Als Grenzen der Modellierung könnten die Seegröße als obere Grenze des Wachstums, möglicher wachstumshemmender Nährstoffmangel für die Pflanzen, Anwesenheit möglicher wachstumshemmender „Fressfeinde" genannt werden.	3	3	
b)	Aus $6,8 \cdot 10^{10} = e^{0,336 \cdot x} \Rightarrow x \approx 74,23$ ergibt sich, dass der See in der 75-ten Woche vollständig bedeckt sein würde.	2	1	
c)	Aus z.B. der Berechnung der Verdopplungszeit x_d mit Hilfe von $2 = e^{0,336 \cdot x_d} \Rightarrow x_d \approx 2,06$, was einer Zeit von ca. 14 Tagen entspricht, kann die Angabe im Wasserpflanzen-Almanach ($10-15$ Tage) als passend bewertet werden.	2	1	
d)	$f'(x) = 0,336 \cdot e^{0,336 \cdot x}$ gibt die (momentane) Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze zum Zeitpunkt x (Anzahl der Wochen) in m²/Woche an. Z.B. gilt $f'(3x) \neq 3 \cdot f'(x)$ für $x = 2$, da $f'(2) = 0,336 \cdot e^{0,336 \cdot 2} \approx 0,6579$, $f'(6) = 0,336 \cdot e^{0,336 \cdot 6} \approx 2,5228 \neq 3 \cdot f'(2) \approx 1,9738$.	1	2	
e)	$\int_{50}^{70} 0,336 \cdot e^{0,336 \cdot x} dx = \left[e^{0,336 \cdot x} \right]_{50}^{70} = e^{0,336 \cdot 70} - e^{0,336 \cdot 50} \approx 1,64 \cdot 10^{10}$. Damit berechnet man die Größe der Fläche in m², um die die Pflanze zwischen der 50. und der 70. Woche nach Beobachtungsbeginn wächst.	1	2	1

<table>
<tr><td>f)</td><td>

Im Wesentlichen müssten folgende Aspekte zum Ausdruck kommen:
Die Gleichung gehört zu einer Funktion h des beschränkten Wachstums mit $h(0)=1$ und hohem Anfangswachstum, das sich auf die Dauer abschwächt.
Die von der Pflanze bedeckte Fläche überschreitet bei dieser Modellierung nie den Wert der Seegröße, da $\lim\limits_{x\to\infty}(6{,}8\cdot 10^{10}-(6{,}8\cdot 10^{10}-1)\cdot e^{-0{,}04\cdot x})=6{,}8\cdot 10^{10}$, da $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-0{,}04\cdot x}=0$ und somit auch $\lim\limits_{x\to\infty}((6{,}8\cdot 10^{10}-1)e^{-0{,}04\cdot x})=0$.
Für diese Modellierung spricht, dass sich das Wachstum langfristig abschwächt. Je mehr die Pflanze sich ausgebreitet hat, desto ungünstiger werden die Wachstumsbedingungen. Gegen diese Modellierung spricht, dass zu Beginn das Wachstum erheblich stärker ist als durch die Tabelle vorgegeben.</td><td>1</td><td>4</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Insgesamt 25 Bewertungseinheiten, verteilt auf die Anforderungsbereiche</td><td>10</td><td>13</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Prozentuale Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>40%</td><td>52%</td><td>8%</td></tr>
</table>

Aufgabe 3 - zum Themenbereich Analytische Geometrie

Die Abbildung (siehe nächste Seite) zeigt den Entwurf des Opernhauses in Oslo, welches am 12. April 2008 feierlich eingeweiht wurde. Das Opernhaus zeichnet sich in seiner Bauweise besonders durch die vielen Ebenen aus und soll an Gletscher, Schnee und ineinandergeschobene Eisschollen erinnern. Begehbare Fassaden aus weißem Marmor und eine große Glasfassade sollen den Eindruck von Eismassen verstärken. Die Punkte $A(0|-5{,}5|0)$, $B(20{,}5|-5{,}5|0)$, $C(20{,}5|5{,}5|0)$ und $D(0|5{,}5|0)$ geben die vier Eckpunkte der Grundfläche des Opernhauses an.
Eine Längeneinheit entspricht dabei 10 Metern.

a) Zeigen Sie, dass die Grundfläche $ABCD$ der Oper ein Rechteck bildet.
Berechnen Sie die Grundfläche der Oper in m^2.

b) Die Ebene E_1, die die Punkte $E(3|5{,}5|3{,}5)$, $F(5{,}5|3{,}5|3)$ und C enthält, beschreibt die aus Marmor gefertigte und begehbare Opernterrasse.
Bestimmen Sie eine Ebenengleichung der Ebene E_1 in Parameterform und in Koordinatenform.
Begründen Sie rechnerisch, dass auch der Punkt $H(11{,}75|2{,}25|1{,}75)$ in dieser Ebene E_1 liegt.

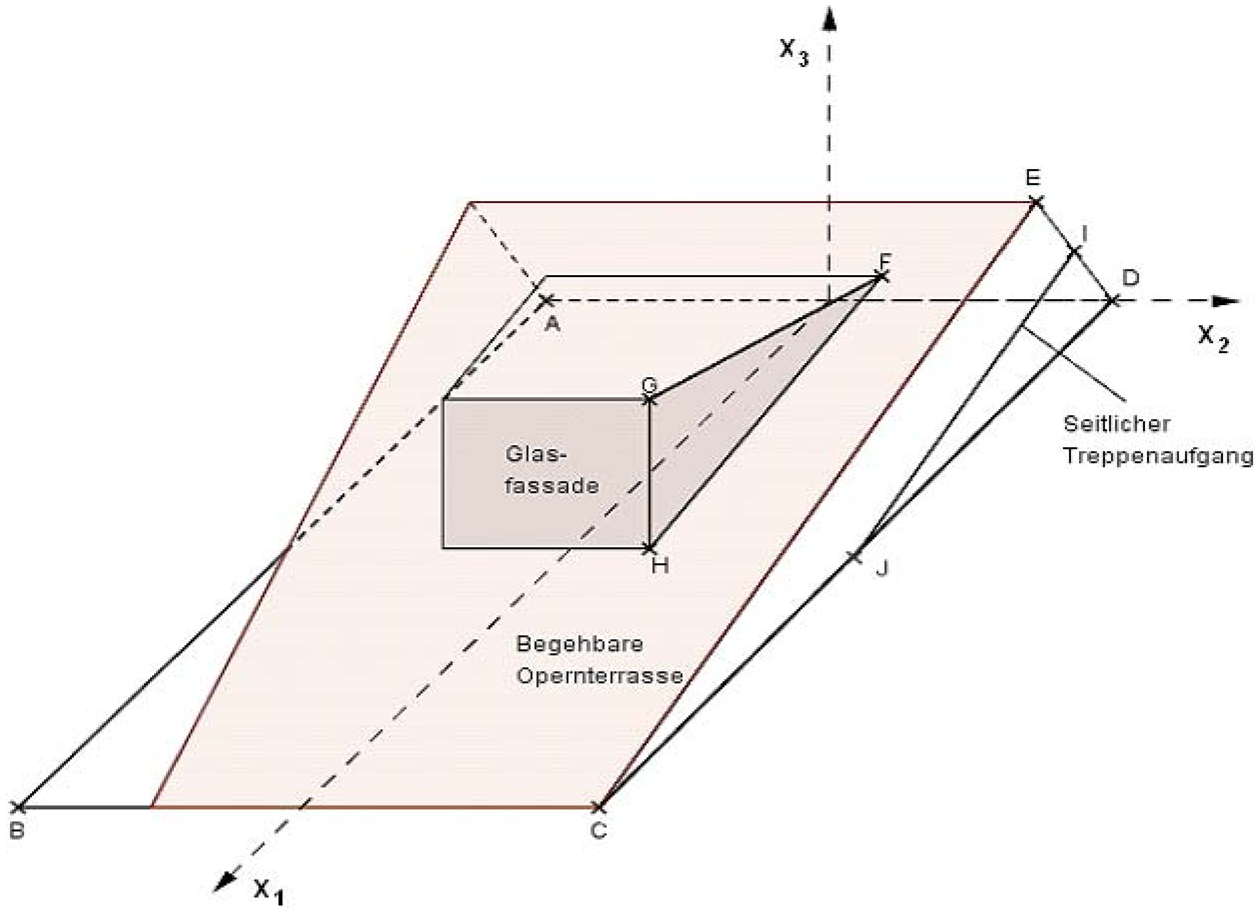
Falls Sie für E_1 keine Gleichung angeben können, dürfen Sie $E_1: 2x_1 + 10x_3 = 41$ verwenden.

c) Ermitteln Sie den Winkel zwischen der Ebene E_1 und der horizontalen Ebene, um eine Vorstellung von der Neigung der begehbaren Opernfassade zu bekommen.

d) Ein seitlicher Treppenaufgang der Oper verläuft parallel zur rechten schrägen Kante der Opernterrasse, d.h. zu der Geraden, die die Punkte E und C enthält. Der Treppenaufgang beginnt im Punkt $J(10{,}25|5{,}5|0)$ und soll durch eine Gerade g dargestellt werden.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g.
Der Treppenaufgang endet in einem Punkt I am hinteren Ende des Gebäudes.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes I auf der Kante $\overline{DE}$.

e) Auf der rechten Seite des Glasaufbaues sollen drei Flaggenmasten in den Punkten $F(5{,}5|3{,}5|3)$, $G(12{,}5|2{,}75|4{,}25)$ und K aufgestellt werden, wobei K genau in der Mitte zwischen F und G liegt.
Als besondere künstlerische Note sollen die Masten nicht vertikal in den Himmel ragen, sondern genau senkrecht zur geneigten, begehbaren Marmorfassade aus Teil b) stehen.
Bestimmen Sie die Koordinaten von K.
Geben Sie einen Vektor an, der die Richtung der Masten beschreibt.

Material zur Aufgabe Opernhaus Oslo



Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 3**

	Lösungsskizze	Bewertung/ Zuordnung I	II	III
a)	Zu zeigen ist z.B. die Parallelogramm-Eigenschaft. Es gilt: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, da $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}20,5\\-5,5\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\-5,5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20,5\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}20,5\\5,5\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\5,5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20,5\\0\\0\end{pmatrix}$ ist. Es bleibt nachzuweisen, dass einer der Innenwinkel orthogonal ist: $\overrightarrow{AB}*\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}20,5\\0\\0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0\\11\\0\end{pmatrix}=0$. Wegen $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}20,5\\0\\0\end{pmatrix}\right\|=20,5$ und $\left\|\overrightarrow{AD}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}0\\11\\0\end{pmatrix}\right\|=11$ ist die Oper $205m$ lang und $110m$ breit. Daraus ergibt sich eine Grundfläche von $205m\cdot 110m=22550m^2$.	3	3	
b)	Mit E als Stützpunkt und $\overrightarrow{EF}$ und $\overrightarrow{EC}$ als Spannvektoren ergibt sich die Ebenengleichung $E_1:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\5,5\\3,5\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}2,5\\-2\\-0,5\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}17,5\\0\\-3,5\end{pmatrix};p,q\in\mathbb{R}$ Durch Aufstellen der Komponentengleichungen, Auflösen zweier Gleichungen nach p und q und Einsetzen in die dritte Gleichung erhält man die Koordinatengleichung $E_1: x_1+5x_3=20,5$ Wegen $1\cdot 11,75+5\cdot 1,75=20,5$ liegt H in der Ebene E_1 .	2	5	
c)	Schnittwinkelberechnung mittels Normalenvektoren der Ebenen: $\cos(\alpha)=\dfrac{\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|}\approx\dfrac{5}{5,099}\approx 0,9806$, $\alpha\approx 11,3°$.	2	2	

d)	Die Gleichung der Geraden ergibt sich z.B. zu: $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}10,25\\5,5\\0\end{pmatrix}+s\cdot\left(\begin{pmatrix}3\\5,5\\3,5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}20,5\\5,5\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}10,25\\5,5\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-17,5\\0\\3,5\end{pmatrix},\ s\in\mathbb{R}$. I ist der Schnittpunkt der Geraden h mit der Geraden g_{DE} $g_{DE}:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\5,5\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\0\\3,5\end{pmatrix},\ t\in\mathbb{R}$. Aus dem Gleichungssystem $\begin{bmatrix}10,25-17,5s & = & 3t\\ 5,5 & = & 5,5\\ 3,5s & = & 3,5t\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}10,25 & = & 20,5s\\ s & = & t\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}s=0,5\\ t=0,5\end{bmatrix}$ ergibt sich $I(1,5\,\|\,5,5\,\|\,1,75)$. Alternative Lösungswege, z.B. über den Strahlensatz sind möglich.	2	3	1
e)	Aus $\vec{k}=\frac{1}{2}\left(\vec{f}+\vec{g}\right)=\begin{pmatrix}9\\3,125\\3,625\end{pmatrix}$ ergibt sich $K(9\,\|\,3,125\,\|\,3,625)$. Der Normalenvektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}$ der Ebene E steht senkrecht auf der Marmorfassade und beschreibt somit die Richtung der Flaggenmasten.	1		1
	Insgesamt 25 Bewertungseinheiten, verteilt auf die Anforderungsbereiche	**10**	**13**	**2**
	Prozentuale Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	40%	52%	8%