Die Senatorin
für Bildung und Wissenschaft

Freie
Hansestadt
Bremen

Schriftliche Abiturprüfung 2010 im dritten Prüfungsfach

Grundkurs Mathematik (TR)

Mai 2010, 9.00 Uhr

Unterlagen für Lehrerinnen und Lehrer

- Diese Unterlagen sind nicht für die Schülerinnen und Schüler bestimmt -

---

Diese Unterlagen enthalten …

- Allgemeines,
- die Bewertung der Prüfungsleistung,
- Aufgaben mit Lösungsskizzen,
- einen Protokollbogen zur Auswahl der Aufgaben für die Prüfungsakten Ihrer Schule,
- einen Rückmeldebogen für die Zentralabiturkommission zur Auswahl der Aufgaben.

Allgemeines

- Wählen Sie gemeinsam mit Ihrer Korreferentin / Ihrem Korreferenten aus den sechs vorgelegten Aufgaben drei zur Bearbeitung aus. Die Aufgaben kommen aus mindestens zwei verschiedenen Themenbereichen, mindestens eine der Aufgaben ist aus dem Themenbereich Analysis. Kommt es zu keiner Einigung, bestimmt die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses die Auswahl der Aufgaben (§ 10 Abs. 2 Nr. 1 AP-V). Protokollieren Sie auf dem beigefügten Protokollformular, welche Aufgaben Sie gewählt haben (Prüferin/Prüfer und Korreferentin/Korreferent und ggf. auch die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses unterschreiben das Protokoll).
- Füllen Sie bitte für die Zentralabiturkommission Mathematik den beigefügten Rückmeldebogen zur Auswahl der Aufgaben aus und schicken ihn an die dort genannte Adresse.
- Fragen Sie vor Verteilung der Aufgaben nach der Arbeitsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler und weisen Sie diese auf die Regelungen des § 5 AP-V (Täuschung und Behinderung) hin.
- Machen Sie die Schülerinnen und Schüler auf die Arbeitshinweise aufmerksam, die am Anfang der Unterlagen für die Prüfungsteilnehmer stehen. Geben Sie ihnen ggf. die nötigen Angaben zur Schulnummer sowie zur genauen Kursbezeichnung.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: Nicht programmierbarer wissenschaftlicher Taschenrechner, Formelsammlung, Zeichengerät, Rechtschreiblexikon

Die Bewertung der Prüfungsleistung

Die Lösungsskizze stellt eine Lösungsvariante dar; andere gleichwertige Lösungen sind entsprechend zu bewerten. Die Bewertungsanteile pro Teilaufgabe sind obligatorisch.

Für die Festlegung der Gesamtleistung werden den erzielten Bewertungseinheiten die entsprechenden Notenstufen gemäß folgender Tabelle zugeordnet.

Bewertungs-einheiten	**KMK Punkte**
0 bis 14,5	00
15 bis 20	01
20,5 bis 24,5	02
25 bis 29,5	03
30 bis 33,5	04
34 bis 37	05
37,5 bis 41	06
41,5 bis 44,5	07
45 bis 48,5	08
49 bis 52	09
52,5 bis 56	10
56,5 bis 59,5	11
60 bis 63,5	12
64 bis 67	13
67,5 bis 71	14
71,5 bis 75	15

Aufgabe 1 - zum Themenbereich Analysis

Bevölkerungsentwicklung in Deutschland

Am Anfang des Jahres 2000 hatte Deutschland etwa 82 Millionen Einwohner.
Für die Bevölkerungsentwicklung in Deutschland ging eine UN-Studie aus dem Jahre 2000 davon aus, dass die Bevölkerung pro Jahr etwa um $0,6\%$ abnimmt. Diese Entwicklung der Bevölkerung soll durch eine Funktion f mit einer Gleichung des Typs $f(x) = a \cdot e^{kx}$, $x \geq 0$ modelliert werden,
x ist die Zeit in Jahren nach dem $1.1.2000$, $f(x)$ die Bevölkerung in Millionen zum Zeitpunkt x.
Dabei bleiben Zu- und Abwanderungen unberücksichtigt.
Gehen Sie in den Aufgaben a) bis e) von unveränderten Bedingungen in den Folgejahren aus.

a) Begründen Sie rechnerisch, dass die Gleichung für $a = 82$ und $k \approx -0,006$ die Situation modelliert.

(2 Punkte)

b) Berechnen Sie, welche Bevölkerungszahl am Anfang des Jahres 2010 zu erwarten ist.

(1 Punkt)

c) Berechnen Sie den Zeitraum, in dem sich die Bevölkerungszahl jeweils um 10% verringert.
Skizzieren Sie den Graphen von f mit Hilfe von drei auf das Jahr 2000 folgenden Zeiträumen, in denen sich die Bevölkerungszahl jeweils um 10% verringert, in das beigefügte Koordinatensystem.
Runden Sie sowohl die Anzahl der Jahre als auch die Funktionswerte auf eine Nachkommastelle.

(6 Punkte)

d) Bestimmen Sie unter Angabe des Rechenweges die Ableitungsfunktion f'. Berechnen und interpretieren Sie den Wert $f'(0)$.
Gehen Sie davon aus, dass ab 2000 jährlich eine Zuwanderung* von Menschen im Umfang des Wertes von $|f'(0)|$ in Mio. erfolgt und erläutern Sie, warum damit die Bevölkerungszahl in Deutschland in etwa konstant bleibt.

(4 Punkte)

e) Berechnen Sie unter Angabe des Rechenweges $\frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} f(x)dx$.
Erläutern Sie, warum dieser Wert ein jährlicher Durchschnittswert für die Bevölkerungszahl (in Millionen Menschen) zwischen Anfang 2000 und Anfang 2010 ist.

(4 Punkte)

---

* Hier wird der Begriff „Zuwanderung“ immer im Sinne von „Netto-Zuwanderung“ verwendet, diese entspricht der Differenz von Zuwanderung und Abwanderung.

Im Folgenden wird von einer jährlichen Zuwanderung ab 2000 von $44\,000$** Menschen ausgegangen. Es wird angenommen, dass sich die zugewanderte Bevölkerung auch jährlich um $0{,}6\%$ verringert.
Als Modellfunktion für die Bevölkerungsentwicklung in Deutschland unter diesen Bedingungen dient die Funktion g mit folgender Gleichung

$g(x) = a \cdot e^{-0{,}006 \cdot x} + 7{,}3$, x Zeit in Jahren nach dem $1.1.2000$, $g(x)$ in Millionen Menschen,

in der $0{,}6\%$ von $7{,}3$ Mio. den $44\,000$ Zuwanderern entsprechen.

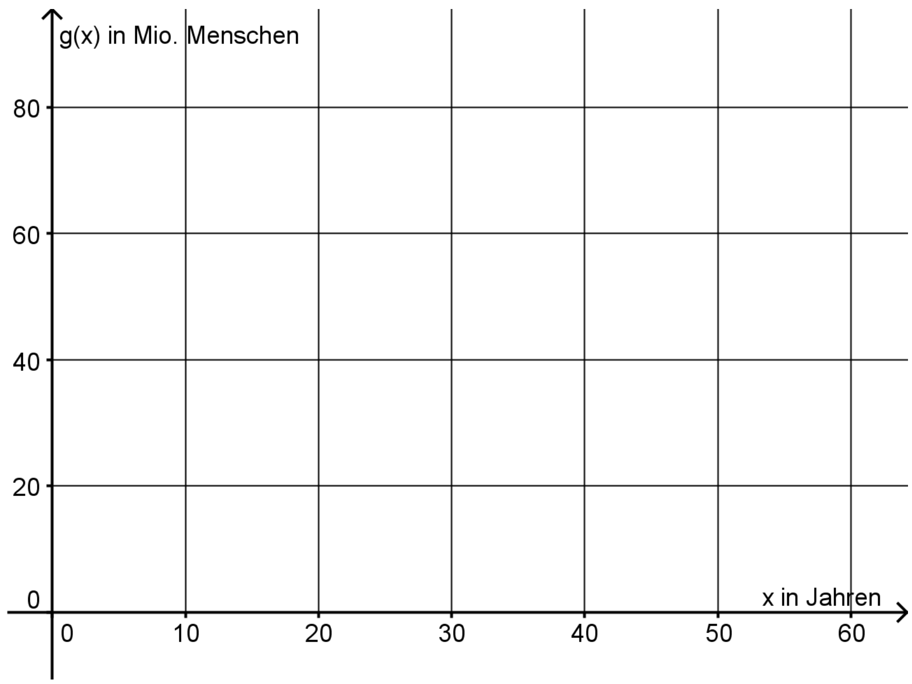
f) Ermitteln Sie a mit Hilfe von $g(0) = 82$. (Lösung: $a = 74{,}7$)
Berechnen Sie die Werte für das Jahr 2050 mit den Gleichungen von f und g und vergleichen Sie diese mit dem Wert aus dem Jahr 2000 auf die Bevölkerungsentwicklung bezogen.
Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to \infty} g(x)$ und schätzen Sie dessen Bedeutung für die Realität ein, wenn man davon ausgehen kann, dass seriöse Prognosen zu Bevölkerungsentwicklungen über höchstens 50 Jahre gemacht werden.

(6 Punkte)

g) Stellen Sie analog zur Funktion g eine Funktionsgleichung für eine Funktion h auf, die statt einer Zuwanderung von $44\,000$ Menschen pro Jahr eine Zuwanderung von $100\,000$ Menschen pro Jahr berücksichtigt. Gehen Sie dabei davon aus, dass $0{,}6\%$ des Grenzwertes der Funktion h gerade der Zuwanderung von $100\,000$ entsprechen.

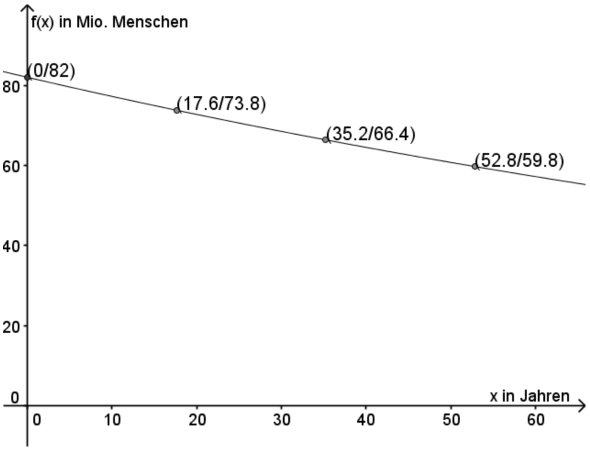
(2 Punkte)

zu c)



** Zu einer ähnlichen Zuwanderung kam es 1998 und 2007.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 1**

	Lösungsskizze	Bewertung		
		I	II	III
1a	Eine Abnahme von $0,6\%$ pro Jahr bedeutet in jedem Jahr einen Rückgang des Bestands auf $99,4\%$ vom Vorjahr. Mit $a = 82 = f(0)$ als Anfangswert ergibt sich $f(x) = 82\cdot 0,994^x = 82\cdot e^{\ln 0,994\cdot x} \approx 82\cdot e^{-0,006\cdot x}$.	2		
1b	$f(10) = 82\cdot e^{-0,006\cdot 10} \approx 77,2$ Mio. Menschen wären zu Beginn von 2010 zu erwarten.	1		
1c	Der Zeitraum mit Verringerung um 10 % beträgt $17,6$ Jahre, da $f(x) = 0,9\cdot 82$ gelöst wird durch $x \approx 17,6$. Je nachdem, welche Werte gerundet werden, kann es zu leicht abweichenden Ergebnissen kommen. 	3	3	
1d	$f'(x) = -0,006\cdot 82\cdot e^{-0,006\cdot x} = -0,492\cdot e^{-0,006\cdot x}$ $f'(0) = -0,492\cdot e^{-0,006\cdot 0} = -0,492$ Anfang 2000 beträgt die momentane Bevölkerungsabnahme etwa $492\,000$ Einwohner pro Jahr. Betrüge die jährliche Zuwanderung etwa $492\,000$ Menschen, bliebe die Bevölkerungszahl in etwa konstant.	2	2	
1e	$\frac{1}{10}\int_0^{10} f(x)dx = \frac{1}{10}\int_0^{10}(82\cdot e^{-0,006\cdot x})dx =$ $\frac{1}{10}\left[82\cdot(-\frac{1}{0,006})\cdot e^{-0,006\cdot x}\right]_0^{10} \approx$ $\frac{1}{10}(-13666,7\cdot(e^{-0,006\cdot 10} - e^{-0,006\cdot 0})) \approx 79,6$ Durch das Integral wird annähernd die Summe der jährlichen Bevölkerungszahlen zwischen Anfang 2000 und Anfang 2010 gebildet. Teilt man diese durch 10 , erhält man einen Jahresdurchschnittswert von $79,6$ Mio. Menschen.		3	1

Lösungsskizze		Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
1f	Da $g(0) = 82 = a \cdot e^{-0,006 \cdot 0} + 7,3$, ergibt sich $a = 82 - 7,3 = 74,7$. $f(50) \approx 60,7;\ g(50) \approx 62,6$ in Mio. Menschen Z.B. könnte der die Werte vergleichende Kommentar lauten: Ohne Zuwanderung würde sich die Bevölkerung um etwa 21,3 Mio., also um etwa 26% verringern. Bei einer jährlichen Zuwanderung von $44\,000$ käme es zu einer Verringerung der Bevölkerung um ca. 20 Mio., also um knapp $24\,\%$. $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty}(74,7 \cdot e^{-0,006 \cdot x} + 7,3) = 7,3$, da $\lim\limits_{x\to\infty}(74,7 \cdot e^{-0,006 \cdot x}) = 0$. Da nach 50 Jahren noch über 60 Mio. Einwohner zu erwarten sind, ist der Grenzwert der Funktion g mit $7,3$ Mio. Menschen für die Realität nicht mehr verwendbar.	2	4	
1g	Aus $0,006 \cdot \lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 100\,000$ ergibt sich $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \frac{100\,000}{0,006} = 16\frac{2}{3}$ Millionen, entsprechend dem Aufbau der Funktionsgleichung von g erhält man $h(x) = (82 - 16\frac{2}{3}) \cdot e^{-0,006x} + 16\frac{2}{3} = 65\frac{1}{3} \cdot e^{-0,006x} + 16\frac{2}{3}$.		1	1
Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**10**	**13**	**2**

Aufgabe 2 - zum Themenbereich Analysis

Milchpreise

Ein Landwirt will in seinen Betrieb investieren und denkt deshalb über eine Erhöhung seiner Milchproduktion nach.

Ihm entstehen unterschiedliche Gesamtkosten in Abhängigkeit von der produzierten Milchmenge. Je größer die Menge der produzierten Milch ist, desto höher fallen die Gesamtkosten aus, wobei der Gesamtkostenzuwachs mit jedem zusätzlich produzierten Liter unterschiedlich ist. Bei größeren Produktionsmengen können die Gesamtkosten besonders stark steigen, z.B. durch Stallerweiterungen, zusätzliche Melkmaschinen und weiteres Personal.

Alle Mengen und Preise beziehen sich stets auf einen Tag.

a) Dem Landwirt entstehen zur Zeit bei der Produktion von sechs Hektolitern Milch Gesamtkosten von 110 €. Die lokale (momentane) Änderungsrate der Gesamtkosten beträgt bei der Produktion von sechs Hektolitern $17,50$ € pro Hektoliter. Bei einer Produktionsmenge von null Hektolitern bleiben immer noch 50 € Gesamtkosten und eine Änderungsrate der Gesamtkosten von 25 € pro Hektoliter.
Bestimmen Sie aus den Angaben eine ganzrationale Funktion f mit möglichst kleinem Grad, wobei x die Produktionsmenge und $f(x)$ die Gesamtkosten in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x beschreiben (x in Hektolitern, $K(x)$ in €).
Begründen Sie Ihren Ansatz. (9 Punkte)

Für einen anderen landwirtschaftlichen Betrieb entstehen bei einer Produktionsmenge von x Gesamtkosten $K(x)$ in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x (x in Hektolitern, $K(x)$ in €).
Diese können durch die Funktion K mit $K(x) = 1,08x^3 - 9x^2 + 30x + 50,\ 0 \le x \le 8$ beschrieben werden.

Die Molkerei nimmt allen Betrieben die Milch zum Preis von 30 € pro Hektoliter ab.
Die Einnahmen, welche als Menge mal Preis definiert sind, werden dann durch die Funktion E mit $E(x) = 30 \cdot x$ für jede Produktionsmenge x beschrieben (x in Hektolitern, $E(x)$ in €).

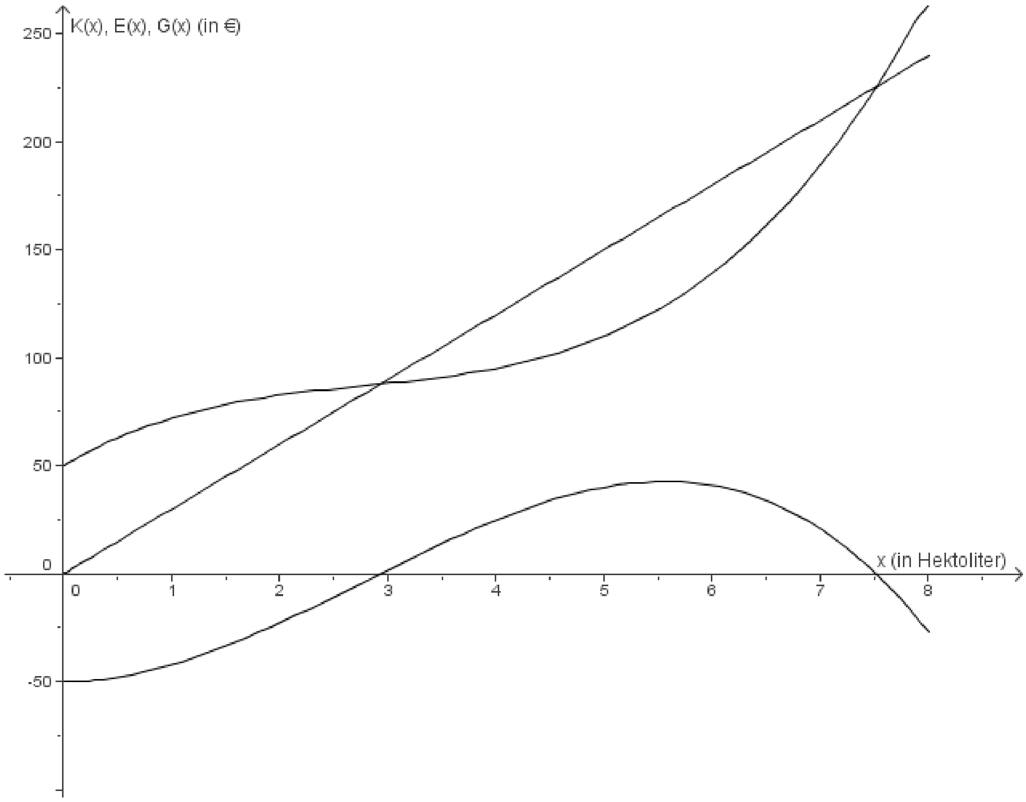
b) Wir betrachten jetzt den Gewinn:
Begründen Sie, warum die Funktion G mit $G(x) = -\frac{27}{25}x^3 + 9x^2 - 50$ für jede Produktionsmenge x den zugehörigen Gewinn angibt (x in Hektolitern, $G(x)$ in €).
Ordnen Sie den Graphen in der Abbildung auf der nächsten Seite die zugehörigen Funktionen K, E und G zu, und begründen Sie Ihre Entscheidung mit jeweils einem Argument. (4 Punkte)

c) Berechnen Sie die Produktionsmengen, bei denen der Landwirt einen Verlust von 50 € erwirtschaftet.
Erläutern Sie mit Hilfe der Grafik auf der nächsten Seite die besondere Bedeutung der Produktionsmengen von ungefähr $2,93$ Hektolitern und ungefähr $7,51$ Hektolitern für den betroffenen Betrieb. (4 Punkte)

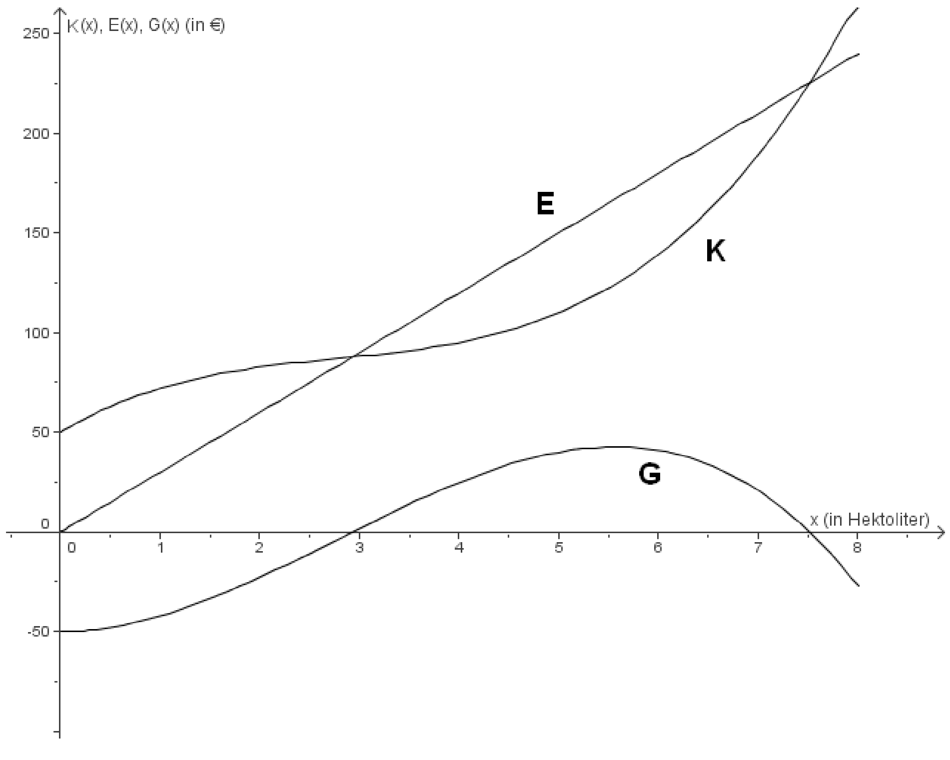
d) Ermitteln Sie in dem Intervall $[0;8]$ die Produktionsmenge, mit der der größte Gewinn erwirtschaftet wird, und geben Sie diesen größten Gewinn an.
Landwirt Meier hat seinen Betrieb auf diese Weise optimiert. Aufgrund einer Pachterhöhung steigen die Gesamtkosten für jede Produktionsmenge um den gleichen Betrag. Der Landwirt Meier denkt, dass er nun mehr produzieren sollte, um den Gewinn zu vergrößern.
Entscheiden Sie, ob diese Überlegung richtig oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Antwort. (5 Punkte)

e) Die Molkerei will den Landwirten die Milch nur noch zu einem geringeren Preis abnehmen.
Ermitteln Sie mit Hilfe von K bei einer Produktionsmenge von fünf Hektolitern den Preis, bei dem ein Betrieb weder Gewinn noch Verlust erwirtschaftet. (3 Punkte)

Anlage zur Aufgabe „Milchpreise“:



Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 2**

Lösungsskizze		Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
2a	Aus dem Text lassen sich vier Informationen entnehmen, welche zu vier Gleichungen führen. Deshalb wird eine allgemeine ganzrationale Funktion 3. Grades als Ansatz gewählt: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ $f(6)=216a+36b+6c+d=110$; $f'(6)=108a+12b+c=17,5$ $f(0)=d=50$; $f'(0)=c=25$ $\left[\begin{array}{cc\|c} 216 & 36 & -90 \\ 108 & 12 & -7,5 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{c} a=\frac{5}{8} \\ b=-\frac{25}{4} \end{array}\right] \Rightarrow f(x)=\frac{5}{8}x^3-\frac{25}{4}x^2+25x+50$	3	6	
2b	Der Gewinn berechnet sich aus der Differenz der Einnahmen und der Gesamtkosten, d.h. $G(x)=E(x)-K(x)=-1,08x^3+9x^2-50$.  Mögliche Begründungen: Der Graph der linearen Funktion E ist eine Gerade. Der Graph von K schneidet bei $K(0)=50$ die $f(x)$-Achse und die Funktionsgleichung von K hat bei 50 ihr absolutes Glied. Der Graph von G schneidet bei $G(0)=-50$ die $f(x)$-Achse und die Funktionsgleichung von G hat bei -50 ihr absolutes Glied.	2	2	

	Lösungsskizze	Bewertung I	II	III
2c	$G(x) = -\frac{27}{25}x^3 + 9x^2 - 50 = -50 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8\frac{1}{3}$. Bei Produktionsmengen von Null Liter und $8{,}3$ Hektolitern erwirtschaftet der Betrieb einen Verlust von 50 €. Aus der Grafik ersieht man: die Produktionsmengen $2{,}93$ Hektoliter und $7{,}51$ Hektoliter sind Nullstellen der Funktion G und kennzeichnen den Wechsel vom Verlust zum Gewinn und umgekehrt. Für Produktionsmengen von $2{,}93$ Hektoliter bis $7{,}51$ Hektoliter erwirtschaftet der Betrieb einen Gewinn ($G(x) \geq 0$). Für Produktionsmengen kleiner als $2{,}93$ Hektoliter und größer als $7{,}51$ Hektoliter erwirtschaftet der Betrieb einen Verlust.	2	2	
2d	$G'(x) = -3{,}24x^2 + 18x$. Für eine relative Extremstelle muss $G'(x_E) = 0$ erfüllt sein, woraus sich die Stellen $x_{E1} = 0$ und $x_{E2} = \frac{50}{9}$ ergeben. Ein Vergleich der Funktionswerte an diesen Stellen und den Rändern des Intervalles ergibt $G(0) = -50$, $G\left(\frac{50}{9}\right) \approx 42{,}59$. und $G(8) \approx -27$. Bei $\frac{50}{9}$ Hektolitern wird also das absolute Maximum des Gewinns mit ca. $42{,}59$ € erzielt. Der Bauer hat nicht recht. Eine mögliche Begründung: Da durch den Pachtvertrag die Kosten bei allen Produktionsmengen gleich steigen, sinkt der Gewinn bei allen Produktionsmengen gleich, aber die Menge mit dem maximalen Gewinn bleibt $\frac{50}{9}$ Hektoliter. Der Gewinn verringert sich zwar, aber er bleibt der maximale Gewinn.	2	2	1
2e	Eine mögliche Lösung: Die Gesamtkosten bei einer Produktionsmenge von fünf Hektolitern betragen 110 €. Die Einnahmen werden mit dem gesuchten Preis a durch $E(5) = a \cdot 5$ beschrieben. Es gilt insgesamt: $a \cdot 5 - 110 = 0 \Leftrightarrow a = 22$. Mit einem Preis von ca. 22 € pro Hektoliter wird bei einer Produktionsmenge von fünf Hektolitern weder Gewinn noch Verlust erwirtschaftet.	1	1	1
	Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	**10**	**13**	**2**

Aufgabe 3 - zum Themenbereich Wahrscheinlichkeitsrechnung / Statistik

Masern

Deutschland hat sich gegenüber der WHO[1] verpflichtet, die Masern bis zum Jahr 2010 zu eliminieren. Um dieses Ziel zu erreichen, müssen weniger als 85 Masernfälle jährlich in Deutschland auftreten. Dieses ist nur sicherzustellen, wenn die Impfrate (zwei Impfungen innerhalb der ersten beiden Lebensjahre) mindestens 95% beträgt. Nur mit beiden Impfungen ist ein kompletter Schutz gegen Masern vorhanden.

a) Die Kosten für die erste Impfung betragen 15 Euro, die für die zweite 13 Euro. Berechnen Sie die Kosten pro Kind, mit denen die Bundesrepublik Deutschland langfristig rechnen muss, wenn die Impfrate für die erste Impfung bei $98\,\%$ und die für die zweite bei $95\,\%$ bleibt.
Erläutern Sie, dass Sie zur Beantwortung der Frage Erwartungswerte berechnet haben.

(4 Punkte)

Aus der Gesundheitsberichterstattung des Bundes stammen folgende Zahlen für das Jahr 2005, die bei Schuleingangsuntersuchungen festgestellt wurden:

Region	Untersuchte Kinder insgesamt	Kompletter Impfschutz gegen Masern
Deutschland	782404	74,6%
Alte Bundesländer	669709	73,2%
Neue Bundesländer	112695	
Berlin	27925	78,8%
Brandenburg	19592	85,6%
Mecklenburg-Vorpommern	12870	87,1%
Sachsen	17301	84,1%
Sachsen-Anhalt	16767	84,2%
Thüringen	18240	83,5%

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei der Schuleingangsuntersuchung im Jahr 2005 in dem Bundesland Brandenburg in einer zufälligen Auswahl von 25 Kindern

- genau 23 einen vollständigen Impfschutz haben.
- mindestens 24 einen vollständigen Impfschutz haben.
- weniger als 23 einen vollständigen Impfschutz haben.

(6 Punkte)

c) Ermitteln Sie für eine Zufallsstichprobe von 500 Schulkindern aus den alten Bundesländern den Erwartungswert μ für die Anzahl der Kinder, die einen kompletten Impfschutz gegen Masern haben.
Entscheiden Sie durch Ankreuzen, welche der folgenden Aussagen über diesen Erwartungswert μ falsch sind, und begründen Sie, warum die angekreuzte Aussage falsch ist:

falsch	Bitte nur vor die falschen Aussagen ein Kreuz setzen
	1. Man kann davon ausgehen, dass in der Stichprobe mindestens μ Kinder einen kompletten Impfschutz haben
	2. Der Erwartungswert μ gehört zu den wahrscheinlichsten Werten der Verteilung
	3. Der Erwartungswert μ hat eine Wahrschscheinlichkeit von fast 1.
	4. $\mu = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + ... + 499 \cdot P(X=499) + 500 \cdot P(X=500)$

(5 Punkte)

[1] Weltgesundheitsorganisation, Sonderorganisation der Vereinten Nationen

d) Wir stellen nun eine Überlegung zu dem in der Tabelle fehlenden Prozentsatz für die neuen Bundesländer an.

Erläutern Sie, weshalb der Rechenweg in der folgenden Berechnung falsch ist.

$$\frac{78{,}8\% + 85{,}6\% + 87{,}1\% + 84{,}1\% + 84{,}2\% + 83{,}5\%}{6} = 83{,}9\%$$

(2 Punkte)

e) Im Jahr 2010 sollen im Land Bremen aus allen Grundschulen Erstklässler an einer gesundheitsbezogenen Studie teilnehmen. Dazu soll für jede Schule die Anzahl der teilnehmenden Schüler/innen so bestimmt werden, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von $99\,\%$ oder darüber mindestens ein Kind mit vollem Impfschutz unter den Teilnehmer/innen ist. Aus Kostengründen sollen die Gruppen möglichst klein gehalten werden.

- In einigen Schulen besitzen 70% der Erstklässler einen vollen Impfschutz. Bestimmen Sie den kleinstmöglichen Stichprobenumfang für die Schulen, die mit über 30 Erstklässlern groß genug sind, um mit der Binomialverteilung rechnen zu dürfen.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von drei zufällig ausgewählten Kindern mindestens eins den vollen Impfschutz besitzt, wenn es in der Schule nur 10 Erstklässler gibt, von denen 7 den vollen Impfschutz besitzen.
  Interpretieren Sie Ihre Lösung in Bezug auf die kleinste Anzahl Schüler/innen, die an der Gesundheitsstudie von dieser Schule teilnehmen sollen. Erläutern Sie, warum in diesem Fall die Binomialverteilung nicht verwendet werden darf.

(8 Punkte)

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 3**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
3a	1. Impfung: $0,98 \cdot 15,00€ = 14,70€$ 2. Impfung: $0,95 \cdot 13,00€ = 12,35€$ Summe: $27,05€$ Langfristig müssen mit $27,05€$ pro Kind gerechnet werden. Erläuterung am Beispiel der 1. Impfung: Die zugehörige Zufallsgröße X nimmt die Werte 15 und 0 an mit $P(X=15)=0,98$ und $P(X=0)=0,02$, so dass $E(X)=0,02\cdot 0+0,98\cdot 15=14,70$	2	2	
3b	Aufgrund der zufälligen Auswahl kann X: Anzahl der Kinder unter den 25 ausgewählten, die einen vollständigen Impfschutz besitzen, als binomialverteilt mit $p=0,856$; $n=25$ angesehen werden. $P(X=23)\approx 0,174$ $P(X\ge 24)=P(X=24)+P(X=25)\approx 0,107$ $P(X<23)=1-P(X\ge 23)\approx 0,719$ (mit Abweichungen, je nachdem, ob mit gerundeten Werten weiter gerechnet wurde).	6		
3c	$\mu = 500\cdot 0,732 = 366$ ist der Erwartungswert für X: Anzahl der Kinder mit einem kompletten Impfschutz, X ist binomialverteilt mit Stichprobenumfang $n=500$ und $p=0,732$. 1. ist falsch, da z. B. bei einer Binomialverteilung mit $n=500$ die Summe der Wahrscheinlichkeiten für alle Werte links vom Erwartungswert in etwa der für die aller Werte rechts davon entspricht. 3. ist falsch, da z. B. erst die Summe aller Wahrscheinlichkeiten den Wert 1 hat und Werte in der Nähe vom Erwartungswert ähnlich wahrscheinlich sind wie dieser. 2. und 4. erhalten kein Kreuz, sie sind richtig (keine Begründung)	1	4	
3d	Die Stichprobengrößen, auf die sich die Prozentsätze beziehen, sind unterschiedlich, deswegen darf man nicht den Mittelwert der Prozentsätze berechnen.		2	

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>3e</td><td>

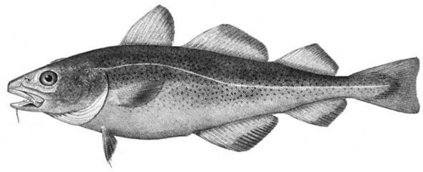
- Aufgrund der zufälligen Auswahl und da der Stichprobenumfang n im Vergleich zur Gesamtheit klein ist, ist X (Anzahl der Schüler mit vollem Impfschutz) binomialverteilt mit unbekanntem n und $p = 0,7$.
  Der Stichprobenumfang n ist das kleinste n mit
  $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,3^n \geq 0,99$ bzw. $0,3^n \leq 0,01$.
  Das kleinste ganzzahlige n, das diese Ungleichung erfüllt, ist $n = 4$.
- Aufgrund der Stichprobengröße von $n = 3$ und der geringen Größe der Gesamtheit kann X (Anzahl der Kinder mit vollständigem Impfschutz) nicht als binomialverteilt angenommen werden. Die Gesamtheit ist so klein, dass nach einer Ziehung nicht mehr ca. 70 % der Kinder in der Stichprobe den vollen Impfschutz besitzen.
  Drei-stufiger Baum mit Pfadwahrscheinlichkeit ergibt:
  $P(X = 0) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} \approx 0,008 < 0,01$, also $P(X \geq 1) \approx 0,992 > 0,99$.
  Da außerdem für $n = 2$ (zwei-stufiger Baum) gilt:
  $P(X = 0) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \approx 0,067$,
  ist $n = 3$ der kleinste Stichprobenumfang.

</td><td>1</td><td>5</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>10</td><td>13</td><td>2</td></tr>
</table>

Aufgabe 4 - zum Themenbereich Lineare Algebra

Kabeljau-Population

Viele Seefischarten gelten heute als überfischt. In der Nordsee ist hiervon besonders der Kabeljau betroffen. Für eine nachhaltige Fischereiwirtschaft werden daher die vorhandenen Bestände und ihre zukünftige Entwicklung geschätzt. Mit Hilfe der Vorhersagen können dann angemessene Fangmengen empfohlen werden.



In einem vereinfachten Modell teilen wir die Kabeljau-Population in drei Altersklassen.

Rekruten: heranwachsende Fische im Alter von unter zwei Jahren.

Jungfische: Fische von zwei bis unter vier Jahren, von denen bereits ein Teil geschlechtsreif ist.

Laicher: Fische ab einem Alter von vier Jahren, die im Allgemeinen geschlechtsreif sind. Sie werden bis zu 15 Jahre alt.

Die Anzahl der Tiere in den drei Altersklassen soll durch einen Populationsvektor $\vec{v}$ beschrieben werden. Zum Beobachtungsbeginn verteilt sich der Bestand von 30 Mio. Fischen auf 22 Mio. Rekruten, 6 Mio. Jungfische und 2 Mio. Laicher, so dass gesetzt werden kann

$$\vec{v}_0 = 10^6 \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Übergänge zwischen den drei Altersklassen beschreibt eine Übergangsmatrix A. Mit dieser lässt sich durch Matrix-Vektor-Multiplikation aus einem Populationsvektor $\vec{v}_0$ die Population $\vec{v}_1$ nach einer Zeiteinheit von zwei Jahren berechnen. Für die Kabeljau-Population in der Nordsee gilt:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 0,20 & 0 & 0 \\ 0 & 0,30 & 0,40 \end{pmatrix}$$

a) Stellen Sie die Populationsentwicklung des Nordsee-Kabeljaus, wie sie durch die Matrix A beschrieben wird, als Übergangsdiagramm dar.
Erläutern Sie, welcher biologische Entwicklungsschritt oder Vorgang zu jedem einzelnen Übergang gehört.

(5 Punkte)

b) Berechnen Sie den Bestand und den Populationsvektor $\vec{v}_1$ nach einer Zeiteinheit, also nach zwei Jahren.

(3 Punkte)

c) Bei unveränderter Übergangsmatrix entwickelt sich der gegebene Anfangsbestand langfristig zu einem festen Bestand von 31,2 Mio. Fischen.
Berechnen Sie die stationäre prozentuale Verteilung der Übergangsmatrix A.
Geben Sie die Verteilung an, auf die sich die gegebene Anfangsverteilung langfristig einpendelt.

(7 Punkte)

d) Aus wirtschaftlichen Gründen interessiert man sich weniger für das Alter der Tiere, sondern eher für ihr Gewicht. Dazu wird der Bestand in drei Gewichtsklassen eingeteilt:

- G1 beinhaltet Fische von 0 bis unter 1 kg,
- G2 Fische von 1 bis unter 4 kg,
- G3 Fische ab 4 kg.
- Von den Rekruten fallen 70% in die Gewichtsklasse G1, der Rest in G2.
- Jungfische gehören zu 60% in die Gewichtsklasse G2 und zu je 20% in die Klassen G1 und G3.
- Laicher fallen zu 40% in die Gewichtsklasse G2 und zu 60% in die Klasse G3.

Geben Sie eine Matrix G an, mit der man aus einem Populationsvektor $\vec{v}$ durch Matrix-Vektor-Multiplikation die Verteilung $\vec{g}$ der Fische auf die Gewichtsklassen ermitteln kann.
Berechnen Sie die Verteilung der Fische auf die Gewichtsklassen zum Beobachtungsbeginn.

(4 Punkte)

e) Für die Kabeljau-Population in der Ostsee liegt eine andere Übergangsmatrix B vor. Nach einer längeren Zeit der Bestandsschonung hat sich dort eine stabile Population mit dem Bestandsvektor $\vec{w}_0$ eingestellt. Es ist

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}39 & 0{,}75 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w}_0 = 10^6 \cdot \begin{pmatrix} 90 \\ 15 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

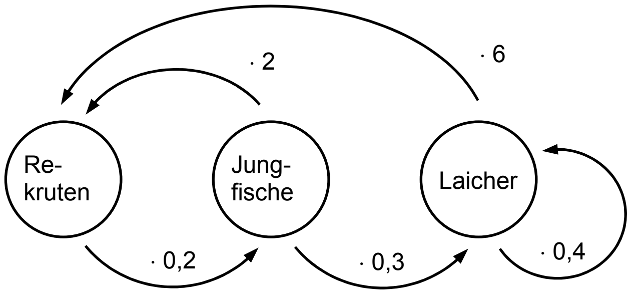
Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Matrix B bessere Lebensbedingungen voraussetzt als Matrix A.

Zeigen Sie, dass $\vec{w}_0$ eine stabile Verteilung der Matrix B zum Wachstumsfaktor $k = 1{,}2$ darstellt.

Berechnen Sie, nach wie vielen Zeiteinheiten der Bestand auf 200 Mio. Fische angewachsen sein wird, wenn die Wachstumsbedingungen unverändert bleiben.

(6 Punkte)

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 4**

	Lösungsskizze	Bewertung I	II	III
4a	 Der Übergang von Rekruten zu Jungfischen bedeutet, dass 20% der Rekruten den zweijährigen Entwicklungsschritt überleben und damit zu Jungfischen werden. Entsprechendes gilt für den Übergang von Jungfischen zu Laichern mit 30% Überlebensrate. 40% der Laicher verbleiben nach einem Entwicklungsschritt in der Altersklasse, der Rest stirbt. Jeder Jungfisch hat im Mittel 2 Rekruten als Nachwuchs, jeder Laicher im Mittel 6 Rekruten.	3	2	
4b	$\vec{v}_1 = A * \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix} * 10^6 \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 10^6 \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 4,4 \\ 2,6 \end{pmatrix}$, also insgesamt ein Bestand von 31 Mio. Fischen.	3		
4c	Aus einem langfristig festen Bestand folgt ein Wachstumsfaktor $k = 1$ mit stationären Eigenvektoren von A. Damit ist $A * \vec{v} = \vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -v_1 + 2v_2 + 6v_3 = 0 \\ 0,2v_1 - v_2 = 0 \\ 0,3v_2 - 0,6v_3 = 0 \end{bmatrix}$ Mit dem Gauss-Algorithmus erhält man z. B. $\begin{bmatrix} v_1 - 2v_2 - 6v_3 = 0 \\ 0,2v_1 - v_2 = 0 \\ 0,3v_2 - 0,6v_3 = 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 - 2v_2 - 6v_3 = 0 \\ 3v_2 - 6v_3 = 0 \\ 0,3v_2 - 0,6v_3 = 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ $\begin{bmatrix} v_1 - 2v_2 - 6v_3 = 0 \\ v_2 - 2v_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 - 10v_3 = 0 \\ v_2 - 2v_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v} = t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Mit $13t = 1$ ergibt sich $\vec{v}_s = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,769 \\ 0,154 \\ 0,077 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76,9\% \\ 15,4\% \\ 7,7\% \end{pmatrix}$. Für $13t = 31,2 \cdot 10^6$ ergibt sich $t = 2,4$ Mio. und somit $\vec{v}_\infty = 10^6 \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 4,8 \\ 2,4 \end{pmatrix}$, zur Berechnung kann auch die prozentuale Verteilung verwendet werden.		7	

Lösungsskizze		Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
4d	Bei Beachtung der gegebenen Indizierung erhält man $G = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0,6 & 0,4 \\ 0 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}$, dann ist durch $\vec{g}_0 = G * \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0,6 & 0,4 \\ 0 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix} * 10^6 \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 10^6 \cdot \begin{pmatrix} 16,6 \\ 11 \\ 2,4 \end{pmatrix}$ die Anfangsverteilung auf die Gewichtsklassen gegeben. Die Verteilung auf die Gewichtsklassen darf auch ohne die Matrix G bestimmt werden.		3	1
4e	Man erkennt, dass die Überlebensraten $0,39$ und $0,75$ bei B größer sind als bei der Matrix A, während die anderen Werte identisch sind. Damit müssen die Lebensbedingungen besser sein. Wegen $B * \vec{w}_0 = \vec{w}_1$ erhält man $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,39 & 0,75 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 90 \\ 15 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 108 \\ 18 \\ 15,6 \end{pmatrix}$ Das entspricht in jeder Komponente und damit auch insgesamt einem Anstieg um 20%, also $\vec{w}_1 = 1,2 \cdot \vec{w}_0$, was gezeigt werden sollte. $118 \cdot 10^6 \cdot 1,2^k = 200 \cdot 10^6$ besitzt die Lösung $k \approx 2,9$, nach knapp 3 Zeiteinheiten (6 Jahren) wird der Bestand auf 200 Mio. Fische angewachsen sein. Wird die ganzzahlige Jahresangabe durch Probieren ermittelt, muss erwähnt werden, dass es sich um den kleinsten Wert handelt.	4	1	1
Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**10**	**13**	**2**

Aufgabe 5 - zum Themenbereich Analytische Geometrie

Funbox

Bei vielen Funsportarten (z.B. Snowboarden, Wakeboarden oder Kitesurfen) gibt es Geräte, auf denen der Sportler mit seinem Board Kunststücke ausführen kann. In dem folgenden Bild ist ein Sportler zu sehen, der gerade auf einem solchen Gerät entlang rutscht.

Die Abbildung auf der nächsten Seite zeigt schematisch ein ähnliches Gerät, eine sogenannte Funbox, auf der es verschiedene Möglichkeiten gibt Kunststücke auszuführen: So kann der Sportler auf dem Tisch der Funbox oder auf der Stangenkonstruktion mit dem Board entlang rutschen (sliden). Der Sportler kommt von links, entweder auf den Tisch oder auf die Rutschstange, und verlässt rechts am Ende des Tisches oder am Ende der Rutschstange mit einem Sprung die Funbox.
Die Stangenkonstruktion besteht u.a. aus einer Rutschstange und einer Stützstange.
(Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.)

Die Skizze auf der zweiten Seite gibt die Situation nicht maßstabsgetreu wieder. Gehen Sie davon aus, dass die Oberfläche des Tisches als Ausschnitt einer Ebene beschrieben werden kann. Ebenso können die Stangen von der Stangenkonstruktion als Strecken bzw. als Teile von Geraden beschrieben werden, wenn man ihre Dicke vernachlässigt.

a) Der Sportler rutscht von dem Punkt $A(1{,}5\,|\,3\,|\,2{,}25)$ auf der Rutschstange in die Richtung $\begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Geben Sie eine Gleichung der Geraden h an, welche den Verlauf der Rutschstange beschreibt.

Die Rutschstange wird an ihrem Ende durch eine Stützstange getragen. Die Stützstange wird durch die Gleichung der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1{,}75 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ beschrieben. An dem Punkt D muss der Sportler die Rutschstange verlassen und von der Funbox springen.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D, an dem die Rutschstange endet und in die Stützstange übergeht. (6 Punkte)

b) Der Sportler rutscht innerhalb von zwei Sekunden mit konstanter Geschwindigkeit auf der Rutschstange vom Punkt A zu dem Punkt $P(1{,}8\,|\,5{,}1\,|\,2{,}4)$.

Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit der Sportler auf der Rutschstange entlang rutscht (Angabe in Meter pro Sekunden). (2 Punkte)

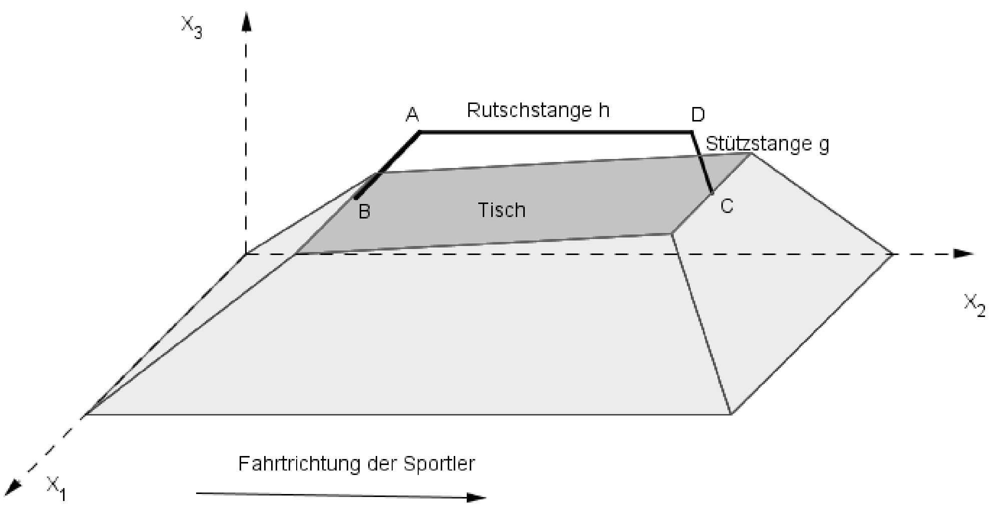
c) Bestimmen Sie eine Ebenengleichung in Parameterform und in Koordinatenform für die Ebene E, in der die Stützstange und die Rutschstange liegen. (6 Punkte)

d) Die Oberfläche des Tisches wird durch die Ebenengleichung $F: -0{,}5x_2 + 10x_3 = 14$ beschrieben.
Berechnen Sie den Abstand des Punktes A von der Ebene F, um abschätzen zu können, wie hoch der Sportler auf der Rutschstange über den Tisch entlang rutscht. (5 Punkte)

e) Die Stützstange ist in dem Punkt $C(2\,|\,7\,|\,1{,}75)$ im Tisch verankert. Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -20 \\ -1 \end{pmatrix}$ zeigt von C in Richtung auf die Verankerung der Stangenkonstruktion in dem Punkt B und die Strecke $\overline{CB}$ ist 5 m lang.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes B. (6 Punkte)

Material zur Aufgabe Funbox

Abbildung der Funbox



Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 5**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
5a	$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3 \\ 2,25 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix};\ s \in IR$. Der Ansatz $\begin{pmatrix} 1,5 \\ 3 \\ 2,25 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1,75 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1,5 \end{pmatrix}$ führt zu $s = 0,25$ und $t = -0,5$. Daraus folgt: $D(2 \mid 6,5 \mid 2,5)$.	3	3	
5b	Der Sportler legt die Strecke $\overline{AP}$ mit einer Länge von $\left\lvert \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} \right\rvert = \left\lvert \begin{pmatrix} 0,3 \\ 2,1 \\ 0,15 \end{pmatrix} \right\rvert \approx 2,13$ Meter in 2 Sekunden zurück. Der Sportler rutscht somit auf der Rutschstange mit einer Geschwindigkeit von ungefähr $1,06$ Meter pro Sekunde.	1	1	
5c	Ergänzt man die Gerade h mit dem Richtungsvektor von g, so erhält man die Parameterform der Ebenengleichung $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3 \\ 2,25 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1,5 \end{pmatrix};\ s,t \in IR$. Die Spannvektoren sind nicht kollinear. Auflösen zweier Komponentengleichungen nach s und t und Einsetzen in die dritte Komponentengleichung führt zu der Koordinatenform der Ebenengleichung $E: -11x_1 + 1,5x_2 + x_3 = -9,75$.	3	3	
5d	Für den Abstand d des Punktes A von der Ebene F gilt: $d = \left\lvert \frac{-0,5 \cdot 3 + 10 \cdot 2,25 - 14}{\sqrt{100,25}} \right\rvert = \left\lvert \frac{7}{\sqrt{100,25}} \right\rvert \approx 0,7$. Der Sportler rutscht auf der Rutschstange in einer Höhe von $0,7$ m über dem Tisch.	2	3	
5e	Mit $\overrightarrow{CB} = 5 \cdot \frac{\vec{v}}{\lvert\vec{v}\rvert} = \frac{5}{\sqrt{405}} \begin{pmatrix} -2 \\ -20 \\ -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,5 \\ -4,97 \\ -0,25 \end{pmatrix}$ ergibt sich aus $\vec{b} = \vec{c} + \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1,75 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,5 \\ -4,97 \\ -0,25 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,03 \\ 1,5 \end{pmatrix}$ der Punkt $B(1,5 \mid 2,03 \mid 1,5)$.	1	3	2
	Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	**10**	**13**	**2**

Aufgabe 6 - zum Themenbereich Analysis

Funktionsuntersuchung

Gegeben ist die Funktion f mit:

- der Funktionsgleichung $f(x) = x^3 \cdot e^{-\frac{x^2}{6}}$,
- ihrer ersten Ableitungsfunktion f' mit $f'(x) = -\frac{1}{3}\left(x^4 - 9x^2\right) \cdot e^{-\frac{x^2}{6}}$,
- einer Stammfunktion F mit der Funktionsgleichung $F(x) = -\left(3x^2 + 18\right) \cdot e^{-\frac{x^2}{6}}$,
- dem wesentlichen Verlauf der beiden Funktionsgraphen der ersten beiden Ableitungsfunktionen:

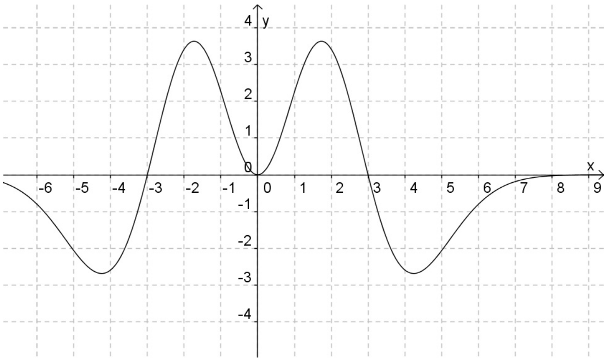


Abbildung 1: Graph von f'

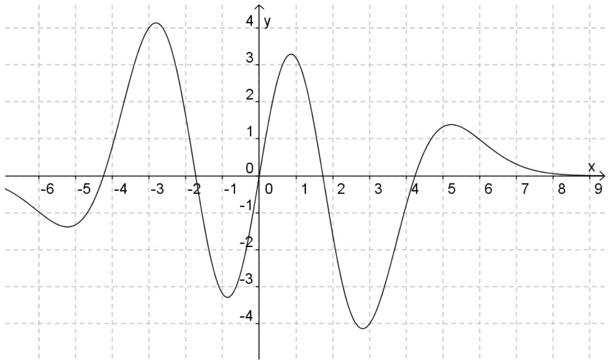


Abbildung 2: Graph von f''

a) Bilden Sie den Term $f''(x)$ der zweiten Ableitung zur Funktion f im Ansatz (d.h. ohne Zusammenfassung). (2 Punkte)

b) Untersuchen Sie den Graphen von f auf Symmetrie zum Ursprung. (2 Punkte)

c) Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte des Graphen der Funktion f. Sie dürfen die Abbildungen für Ihre Begründungen heranziehen, aber keine konkreten Werte aus ihnen ablesen. (8 Punkte)

d) Erklären Sie mit Hilfe der Abbildungen, dass der Graph von f im Intervall $[-8;\ 8]$ genau fünf Wendestellen besitzt.
Zeichnen Sie mit den ermittelten Werten und Eigenschaften den Graphen zur Funktion f im Intervall $[-8;\ 8]$ in ein geeignetes Koordinatensystem. Kennzeichnen Sie die charakteristischen Punkte des Graphen in Ihrer Zeichnung. (5 Punkte)

e) An den Graphen der Funktion f soll an der Stelle $x = 6$ eine Tangente g gelegt werden. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $g(x) = m \cdot x + b$ und zeichnen Sie die Tangente in Ihr Koordinatensystem. Einen der Werte, m bzw. b, kann man in einer der beiden gegebenen Abbildungen, 1 bzw. 2, finden. Geben Sie an, welcher Wert dieses ist und markieren Sie den zugehörigen Punkt in der entsprechenden Abbildung. (5 Punkte)

f) Kennzeichnen Sie die Fläche zwischen x-Achse und dem Graphen der Funktion f im Intervall $[-2; 2]$ in Ihrer Zeichnung und berechnen Sie deren Maßzahl A mit Angabe des Rechenweges. (3 Punkte)

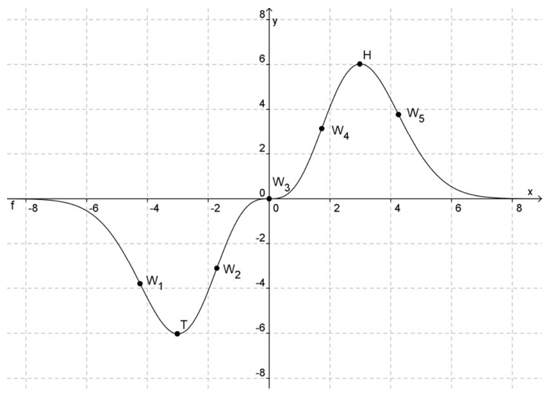
Hinweis: Runden Sie bei der Berechnung der Hoch- und Tiefpunkte, bei der Berechnung von m und b im Aufgabenteil e) und bei der Berechnung von A auf die 2. Nachkommastelle.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 6**

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>6a</td><td>$f''(x) = -\frac{1}{3}\left(x^4 - 9x^2\right)\cdot e^{-\frac{x^2}{6}} \cdot \left(-\frac{2x}{6}\right) - \frac{1}{3}\left(4x^3 - 18x\right)\cdot e^{-\frac{x^2}{6}}$</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>6b</td><td>Da $f(-x) = (-x)^3 \cdot e^{-\frac{(-x)^2}{6}} = -x^3 \cdot e^{-\frac{x^2}{6}} = -f(x)$, verläuft der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung.</td><td>1</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>6c</td><td>• Notwendige Bedingung:
Hoch- oder Tiefpunkte liegen höchstens an den Nullstellen von f' vor:
$f'(x_E) = 0 \Leftrightarrow 0 = -\frac{1}{3}(x_E{}^4 - 9x_E{}^2)\cdot e^{-\frac{x_E{}^2}{6}} \Leftrightarrow x_E = -3 \vee x_E = 0 \vee x_E = 3$;
• Für die hinreichende Bedingungen werden entweder entnommen:
der Abbildung 2:
$f''(-3) > 0$
$f''(3) < 0$
$f''(0) = 0$, da der Graph von f'' steigend durch diese Nullstelle geht (folglich $f'''(0) > 0$), liegt bei dem Graphen von f eine Wendestelle vor.
oder der Abb. 1:
der Vorzeichenwechsel an den beiden Nullstellen $x_{E1} = -3$ und $x_{E2} = 3$ von f' zeigt, dass es sich um Extremstellen bei f handelt;
an seiner dritten Nullstelle $x_{E3} = 0$ hat f' ein rel. Minimum, f folglich eine Sattelstelle.
Daraus ergibt sich
$x_T = -3$
$x_H = 3$
• Funktionswerte an den Stellen für Hoch- und Tiefpunkt:
$f(-3) = -27e^{-\frac{3}{2}} \approx -6{,}02$, also $T(-3 \mid -6{,}02)$
$f(3) = 27e^{-\frac{3}{2}} \approx 6{,}02$, also $H(3 \mid 6{,}02)$</td><td>2</td><td>6</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>6d</td><td>

- In Abb. 2 hat der Graph von f'' im gegebenen Intervall genau fünf Nullstellen mit Vorzeichenwechsel, bzw. in Abb. 1 hat f' genau 5 Extrema, d.h. der Graph von f hat genau diese fünf Wendestellen.
- Qualität der Zeichnung
- Maßstab und Achsenbeschriftungen
- Charakteristische Punkte
  - eine Nullstelle
  - HP, TP
  - fünf WP

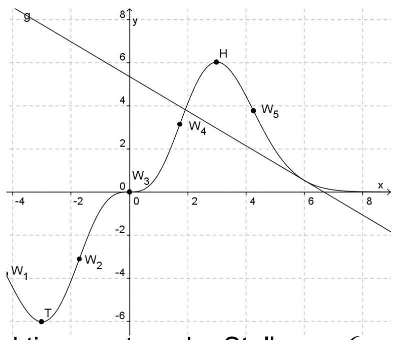


</td><td>4</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>6e</td><td>

Ansatz $g(x) = mx + b$

$x = 6$ einsetzen in

- $f'(x)$ ergibt $m = -324e^{-6} \approx -0,80$
- $f(x)$ ergibt $g(6) = 216e^{-6} \approx 0,54$ und somit $b \approx 0,54 + 4,82 = 5,36$
- Lösung: $g(x) \approx -0,80x + 5,36$
- Zeichnung ergänzt
- In Abb. 1 ist die Steigung $m \approx -0,8$ als Funktionswert an der Stelle $x = 6$ abzulesen. In Abb.1 muss der Punkt $(6 \mid -0,8)$ markiert sein.



</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>6f</td><td>

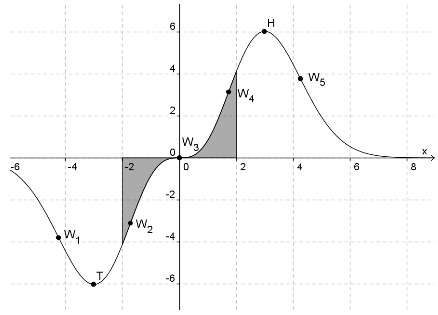
Schraffur in der Zeichnung.

Z. B.:
aufgrund der Punktsymmetrie gilt

$$A = 2 \cdot \int_0^2 f(x)dx = 2 \cdot \left[F(x)\right]_0^2$$
$$= 2 \cdot \left(F(2) - F(0)\right)$$
$$\approx 2(-15,4 + 18) = 5,2$$

bzw. $A = 2 \cdot \left| \int_{-2}^{0} f(x)dx \right| = 2 \cdot \left| \left[F(x)\right]_{-2}^{0} \right| \approx 5,2$

oder: $A = \left| \int_{-2}^{0} f(x)dx \right| + \left| \int_{0}^{2} f(x)dx \right| \approx 5,2$



</td><td>2</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>10</td><td>13</td><td>2</td></tr>
</table>

Protokollbogen zur Auswahl der Aufgaben für die Prüfungsakten der Schule

Auswahl der Aufgaben:

- Fach: **Mathematik**
- Schule: ______________________________
- Schulinterne Kursbezeichnung: ______________________________
- **Fachlehrerin / Fachlehrer** (Name, Vorname):

  ____

  Ich wähle für die Bearbeitung durch die Schülerinnen und Schüler die 3 Aufgaben

  Nr. ________ , ________ und ________ aus.

  Bremen / Bremerhaven, den ___.5.2010

  ____
  (Unterschrift Fachlehrerin / Fachlehrer)

- **Korreferentin / Korreferent** (Name, Vorname):

  ____

  Ich schließe mich der Auswahl an / nicht an (bitte Unzutreffendes streichen). Im Falle der Nichtzustimmung füge ich eine kurze schriftliche Begründung auf der Rückseite des Protokolls bei.

  Bremen / Bremerhaven, den ___.5.2010

  ____
  (Unterschrift Korreferentin / Korreferent)

- **Auswahl durch die Vorsitzende / den Vorsitzenden des Fachprüfungsausschusses** (im Falle der Nichtübereinstimmung zwischen Fachprüferin/Fachprüfer und Korreferentin / Korreferenten)

  Ich wähle die 3 Aufgaben Nr. ____________ zur Bearbeitung durch die Schülerinnen und Schüler aus und füge eine kurze schriftliche Begründung auf der Rückseite des Protokolls bei.

  Bremen / Bremerhaven, den ___.5.2010

  ____
  (Unterschrift Vorsitzende(r) Fachprüfungsausschuss)

Rückmeldebogen für die Zentralabiturkommission Mathematik zur Auswahl der Aufgaben

Auswahl der Aufgaben:

- Fach: **Mathematik GK** (TR)
- Schule: ______________________________
- Schulinterne Kursbezeichnung: ______________________________
- Anzahl der Schülerinnen und Schüler: ______________________________
- Der Fachprüfungsausschuss hat für die Bearbeitung durch die Schülerinnen und Schüler die drei Aufgaben Nr. ________ , ________ und ________ ausgewählt.

Bremen / Bremerhaven, den ___.5.2010

____
(Unterschrift)

Schicken Sie diesen Bogen bitte möglichst umgehend per FAX an folgende Adresse:

Landesinstitut für Schule, Herrn Löwer

FAX 0421-361-6451

Die Rückmeldebögen werden im LIS gesammelt und den Zentralabiturkommissionen zur Verfügung gestellt. Sie sind eine Grundlage für die Auswertungsgespräche mit den Schulen und die Erstellung neuer Aufgaben.