Schulnr.: Kursbezeichnung:

Name:

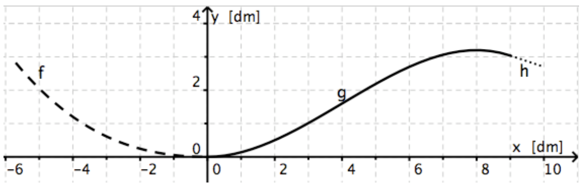
Aufgabe 1 - zum Themenbereich Analysis

Balance

Stefan Heiliger ist ein bekannter Produktdesigner für Relax-Sessel, Sitzmöbel und Liegen. Er hat sowohl bei dem berühmten Designer Wilhelm Wagenfeld als auch im Automobil-Design bei Daimler–Benz gearbeitet. Formen, die er für seine Sessel benutzt, können an Sportwagen-Kurven oder an mathematische Kurven erinnern.

Einer seiner Sessel, den es in unterschiedlichen Ausführungen gibt, heißt „Balance“. Ein Modell sieht man im Bild oben.[1] Es besteht aus einem Metallgestell, einer Liegefläche und einem Kopfteil. Für die Aufgabenteile a) und b) wird davon ausgegangen, dass sich der Sessel im Gleichgewichtszustand wie oben abgebildet befindet.

Die untere Linie des Metallgestells kann näherungsweise mit Hilfe von drei Funktionen f, g und h beschrieben werden. Man legt den Ursprung des Koordinatensystems in den tiefsten Punkt des Gestells (siehe Skizze rechts). Die Achsen werden in Einheiten unterteilt, die einem Dezimeter entsprechen.



a) Im Bereich $0 \leq x \leq 9$ kann das Gestells durch eine ganzrationale Funktion dritten Grades g beschrieben werden. Diese hat am linken Rand in $P(0|0)$ einen Punkt mit der Steigung 0 und für positive x-Werte ihren höchsten Punkt 8 dm weiter rechts mit der Höhe $3,2$ dm.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung für die Funktion g.
Weisen Sie nach, dass mit Ihrer gefundenen Lösung tatsächlich an der gewünschten Stelle ein Hochpunkt liegt.
(Zur Kontrolle: $g(x) = -0,0125x^3 + 0,15x^2$)

(8 Punkte)

b) Das rechte Ende des Gestells besteht im Bereich $9 \leq x \leq 10$ aus einem geraden Anschlussstück, das durch die Funktion h beschrieben werden kann. Es schließt knickfrei an den Gestellteil, der durch g beschrieben wird, an.
Berechnen Sie, in welcher Höhe und mit welcher Steigung dieses gerade Stück an den Graphen von g anschließt (Funktionsgleichung von g siehe Aufgabenteil a).

Ermitteln Sie, in welcher Höhe das Geradenstück endet.

Ermitteln Sie die Funktionsgleichung von h.

(6 Punkte)

[1] Bildquelle: Volker Fischer, Ulrich Schneider, Stefan Heiliger Design, Ausstellungskatalog zur gleichnamigen Ausstellung im Museum für angewandte Kunst Frankfurt am Main, Edition Menges Stuttgart/London 2007

c) Der Sessel kann höchstens so weit nach vorne schwingen, bis das Fußende des Sessels auf den Boden kommt – siehe Abbildung 1. In Abbildung 2, die den Sessel im Gleichgewichtszustand zeigt, befindet sich dieses Fußende in $F(10|2,7)$.

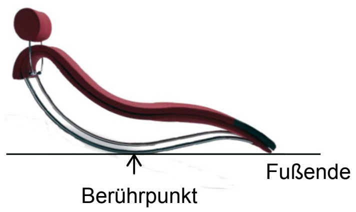


Abb. 1

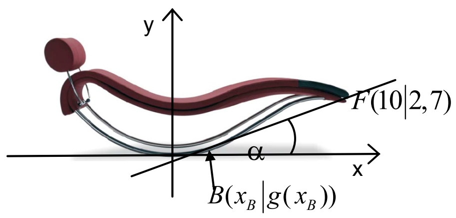


Abb. 2

Wie weit der Sessel nach vorne kippen kann, lässt sich mit Hilfe der Tangente vom Fußpunkt F an den Graphen von g ermitteln. Der Berührpunkt B der Tangente mit dem Graphen hat die Koordinaten $B(x_B|g(x_B))$.

Jemand behauptet, x_B sei die Wendestelle des Graphen von g. Begründen Sie ohne Rechnung mit einem mathematischen Argument, warum das nicht stimmen kann.

Erläutern Sie, was die Gleichung $g'(x_B) = \dfrac{2{,}7 - g(x_B)}{10 - x_B}$ beschreibt.

Mit Hilfe dieser Gleichung wurde die Berührstelle $x_B = 1{,}1$ und die Funktionsgleichung der Tangente im Berührpunkt B mit $t(x) = 0{,}2846x - 0{,}1486$ bestimmt.
Ermitteln Sie mit Hilfe dieser Gleichung und $\tan\alpha$ den Winkel α, um den der Sessel höchstens nach vorne kippen kann.

(6 Punkte)

d) Für die Herstellung des Metallgestells soll die Rohrlänge ermittelt werden. Die Länge eines gebogenen Stücks des Graphen von g im Intervall $[a,b]$ lässt sich mit guter Genauigkeit durch die Formel

$L = \int_a^b \left(\frac{9}{12800}x^4 - \frac{9}{800}x^3 + \frac{9}{200}x^2 + 1\right)dx$ abschätzen[2].

Bestimmen Sie damit die Länge des Rohrs im Bereich $0 \le x \le 9$. Geben Sie die benötigte Stammfunktion an.

(5 Punkte)

[2] Die Formel ergibt sich aus $L = \int_a^b (0{,}5(g'(x))^2 + 1)dx$.

Aufgabe 2 - zum Themenbereich Analysis

Skatebahn

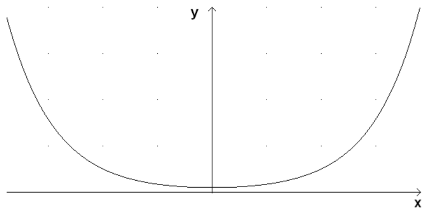
Hinweis: Runden Sie alle Ergebnisse auf zwei Dezimalstellen hinter dem Komma.

Skate-Parks stellen Bahnen zur Verfügung, die mit Skateboards, Inlinern oder BMX-Rädern befahren werden können.

Der Betreiber eines Skate-Parks schreibt einen Wettbewerb aus. Jugendliche sollen einen Vorschlag für die Konstruktion einer Bahn einreichen.

Eine Gruppe von Jugendlichen nimmt an dem Wettbewerb teil. Sie stellen Skatebahnen im Profil als Graphen von Funktionen dar (Siehe Grafik und Profil).

In dieser Aufgabe werden die Modellierungen einer Skatebahn durch unterschiedliche Funktionen untersucht. Das Koordinatensystem wird dabei so gewählt, dass der Tiefpunkt der Bahn auf der y – Achse und die x – Achse auf der Höhe des Erdbodens liegt.



Eine Bahn im Profil

a) Der Betreiber des Skate-Parks gibt bestimmte Eckdaten für eine Bahn vor. An der tiefsten Stelle soll die Bahn $0{,}1$ m über dem Erdboden liegen. In einem Abstand von 4 m zur tiefsten Stelle muss die Bahn eine Höhe von 5 m aufweisen.

Eine erste Modellierung, die sich nur auf den Bereich $0 \le x \le 4$ beschränkt, wird mit der Funktion f vom Typ $f(x) = a \cdot e^{kx}$ vorgenommen.

Ermitteln Sie aus den oben genannten Anforderungen an den *rechten* Teil der Bahn den Wert der Parameter a und k und die Funktionsgleichung.
(Kontrollergebnis: $f(x) = 0{,}1e^{0{,}98x}$ für $0 \le x \le 4$)

(3 Punkte)

b) Skizzieren Sie den *linken* Teil der Bahn mit Hilfe der Funktion g mit der Gleichung $g(x) = 0{,}1\,e^{-0{,}98x}$ für $-4 \le x \le 0$ in das Koordinatensystem im Anhang.

Geben Sie die Ableitungen f' und g' an.

Begründen Sie unter Verwendung der Steigungen $f'(0)$ bzw. $g'(0)$, weshalb es nicht sinnvoll ist, die Bahn mit Hilfe der Funktionen f und g zu konstruieren.

(5 Punkte)

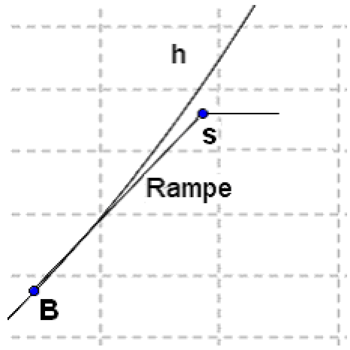
Eine weitere Modellierung verwendet die Funktion h mit $h(x) = 0{,}05e^{1{,}15x} + 0{,}05e^{-1{,}15x}$ und die Ableitung h' mit $h'(x) \approx 0{,}06\,e^{1{,}15x} - 0{,}06\,e^{-1{,}15x}$ für $-4 \le x \le 4$.

c) Entscheiden Sie mit Hilfe einer Überprüfung der Funktionswerte, ob die Bahn unter Verwendung der Funktion h im gesamten Intervall die geforderten Kriterien näherungsweise erfüllt.

Ermitteln Sie rechnerisch den Tiefpunkt der Bahn.

(7 Punkte)

d) Die Bahn mit der Funktion h für $x > 0$ hat im *rechten* Teil eine Rampe. Sie ermöglicht einen leichten Einstieg in die Bahn. Die Rampe, welche als Stück einer Geraden beschrieben werden kann, startet im Punkt $S(3,50 \mid 2,57)$ und soll bei $B(3,05 \mid 1,67)$ tangential in die Bahn geführt werden.
Entscheiden Sie mittels Rechnung, ob diese Bedingung erfüllt werden kann.



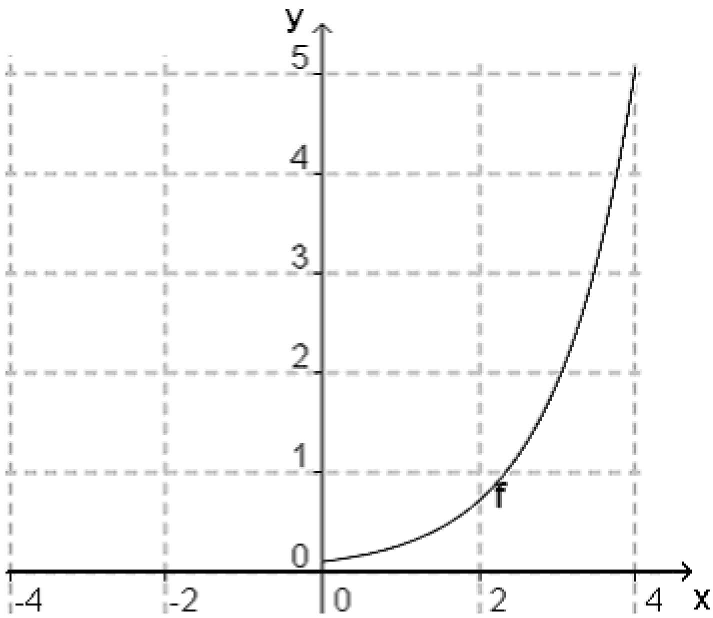
(4 Punkte)

e) Zeigen Sie, dass H mit der Gleichung $H(x) = \frac{1}{23}e^{1,15x} - \frac{1}{23}e^{-1,15x}$ eine Stammfunktion von h ist.

Berechnen Sie die das Integral $\int_{-4}^{4} h(x)dx$ und erläutern Sie das Ergebnis.

(6 Punkte)

Anhang:



Aufgabe 3 - zum Themenbereich Wahrscheinlichkeitsrechnung / Statistik

Bürgerpark-Tombola

Die Bürgerpark-Tombola in Bremen gibt es seit über fünfzig Jahren. Während eines Jahres werden drei Monate lang in der Stadt Lose verkauft. Das Geld, das mit der Lotterie eingenommen wird, trägt wesentlich dazu bei, dass der Bürgerpark und der Stadtwald ohne die Verwendung von Steuergeldern gepflegt werden können.

a) Eine Erhebung der Bürgerpark-Tombola- Betreiber ergab:
Ca. 68% der Loskäuferinnen und -käufer kommen aus Bremen, etwa 19% aus dem Bremer Umland mit bis zu 30 km Entfernung, ca. 13% wohnen noch weiter von Bremen entfernt. 42% der Menschen, die ein Los kaufen, sind männlich.
Diese statistischen Daten sollen im Folgenden als Wahrscheinlichkeiten für die entsprechenden Merkmale in einem Zufallsversuch „Ziehen einer Person aus allen Loskäuferinnen und -käufern" aufgefasst werden. Außerdem wird angenommen, dass das zahlenmäßige Verhältnis der Geschlechter unter den Loskäuferinnen und -käufern in allen Regionen gleich ist.
Ermitteln Sie aus diesen Angaben die Wahrscheinlichkeit, dass ein Hauptgewinn an eine weibliche Person aus Bremen geht.

(4 Punkte)

Laut Angaben der Betreiber gewinnt bei der Bürgerpark-Tombola jedes $4.$ Los.

b) Jemand kauft 6 Lose. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Gewinnlose unter den 6 gekauften Losen.

Begründen Sie, warum die Binomialverteilung eine geeignete Verteilung der Zufallsgröße ist.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse auf 4 Stellen genau:

- Genau zwei Lose sind Gewinnlose.
- Mindestens 4 Lose sind Nieten.

Ermitteln Sie, wie viele Lose eine Person kaufen muss, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens ein Gewinnlos hat.

(10 Punkte)

c) Eine Person kauft während der Bürgerpark-Tombola 12 Lose.
Bestimmen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der Gewinnlose unter den 12 gekauften Losen.

Die Person kauft diese 12 Lose jedoch nicht auf einmal, sondern dreimal je vier Lose. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie jedes Mal mindestens einen Gewinn erhält.

(5 Punkte)

Die Bürgerpark-Tombola umfasst mehrere Lotterien hintereinander. Pro Lotterie werden $40\,000$ Lose verkauft.

d) Jede Lotterie der Bürgerpark-Tombola hat einen unterschiedlichen Hauptgewinn (Autos, Traumreisen, Sparbücher, ...) und unterschiedliche Gewinne in den verschiedenen Gewinnklassen, aber in jeder Lotterie werden 80% der Los-Einnahmen von $40\,000$ € als Gewinn wieder ausgeschüttet, bei einem Lospreis von 1 € beträgt der Erwartungswert für den Gewinn durch die Loseinnahmen also durchschnittlich $0{,}80$ €.
Tatsächlich liegt der Erwartungswert für die Gewinnsumme pro Los durch Sonderveranstaltungen, bei denen Bremer Firmen zusätzliche Gewinne ins Spiel bringen, bzw. durch Firmenspenden sogar höher, nämlich zwischen $1{,}10$ € und $1{,}20$ €.

Bestimmen Sie mit Hilfe dieses Erwartungswerts einen Bereich, in dem die Geld- bzw. Sachspenden der Bremer Firmen pro Lotterie liegen.

(2 Punkte)

e) Ermitteln Sie für den folgenden Gewinnplan den fehlenden Wert in der Tabelle, wenn der Erwartungswert für den Gewinn pro Los $1{,}10$ € beträgt. (Die Wahrscheinlichkeit, irgendetwas zu gewinnen, beträgt hier nicht genau, sondern nur ungefähr 0,25.)

Gewinnklasse	Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn	Wert des Gewinns
Hauptgewinn	$\frac{1}{40000}$	6000 €
1000 € bis 3000 €	$0{,}0001$	durchschnittlich 2000 €
100 € bis 500 €		durchschnittlich 250 €
Kleinstgewinne	$0{,}248$	durchschnittlich 1 €

(4 Punkte)

Aufgabe 4 - zum Themenbereich Lineare Algebra

Marienkäfer

Marienkäfer (Coccinellidae) sind eine weltweit verbreitete Insektenfamilie. In Europa findet man über 250 Arten und Unterarten, darunter den bekannten Siebenpunkt-Marienkäfer.

Eine bestimmte Marienkäferart kann bis zu drei Jahre alt werden. Wir unterscheiden Larven (*L*), die sich ein Jahr später zu Jungkäfern (*J*) und nach einem weiteren Jahr zu Altkäfern (*K*) entwickeln.

Im Frühjahr beginnen die Tiere mit der Paarung. Danach legen die Weibchen Eier, aus denen die Larven schlüpfen. Im Mittel bringt jeder Jungkäfer 7,2 Larven und jeder Altkäfer 4 Larven hervor. Von den Larven überleben nur 12% das nächste Jahr, von den Jungkäfern immerhin 50%. Alle Altkäfer sterben innerhalb des folgenden Jahres.

a) Geben Sie zu der oben beschriebenen Entwicklung eine Matrix A an, für die gilt: Multipliziert man den Populationsvektor $\vec{v}$ eines Jahres mit der Matrix A von links, erhält man den Populationsvektor für das Folgejahr. (4 Punkte)

Bei einer anderen Marienkäferart lässt sich die Population durch die Matrix B beschreiben mit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 7{,}2 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} L \\ J \\ K \end{pmatrix}.$$

b) Zeichnen Sie ein Übergangsdiagramm für diese Population.

Geben Sie die Überlebensrate eines Altkäfers und die eines Jungkäfers pro Jahr an. (5 Punkte)

c) Ein neu angelegter Garten wird während des Sommers nur von 25 Jungkäfern bevölkert. Geben Sie zu diesem Zeitpunkt den Populationsvektor $\vec{v}_0$ an.

Berechnen Sie die Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$, die die Marienkäfer-Populationen nach einem Jahr bzw. nach zwei Jahren beschreiben, wenn ihre Entwicklung mit Matrix B beschrieben wird. (4 Punkte)

d) Nach einigen Jahren hat sich für die Marienkäfer-Population, die durch die Matrix B beschrieben wird, eine stabile Verteilung ergeben. In dieser Verteilung ist die Anzahl der Jungkäfer dreimal so groß wie die der Altkäfer und die Anzahl der Larven ist zwölfmal so groß, wie die der Jungkäfer.

Geben Sie einen Vektor $\vec{v}$ an, der eine stabil verteilte Population von 200 Tieren beschreibt.

Zeigen Sie, dass diese Verteilung tatsächlich stabil bleibt.

Bestimmen Sie den Wachstumsfaktor der Population. (5 Punkte)

In einer klimatisch weniger günstigen Region lässt sich die Entwicklung der Marienkäfer-Population durch eine veränderte Matrix C beschreiben, bei der ein Element unsicher ist und durch die Variable p ersetzt wurde. Es ist

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 8 & p \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} L \\ J \\ K \end{pmatrix}.$$

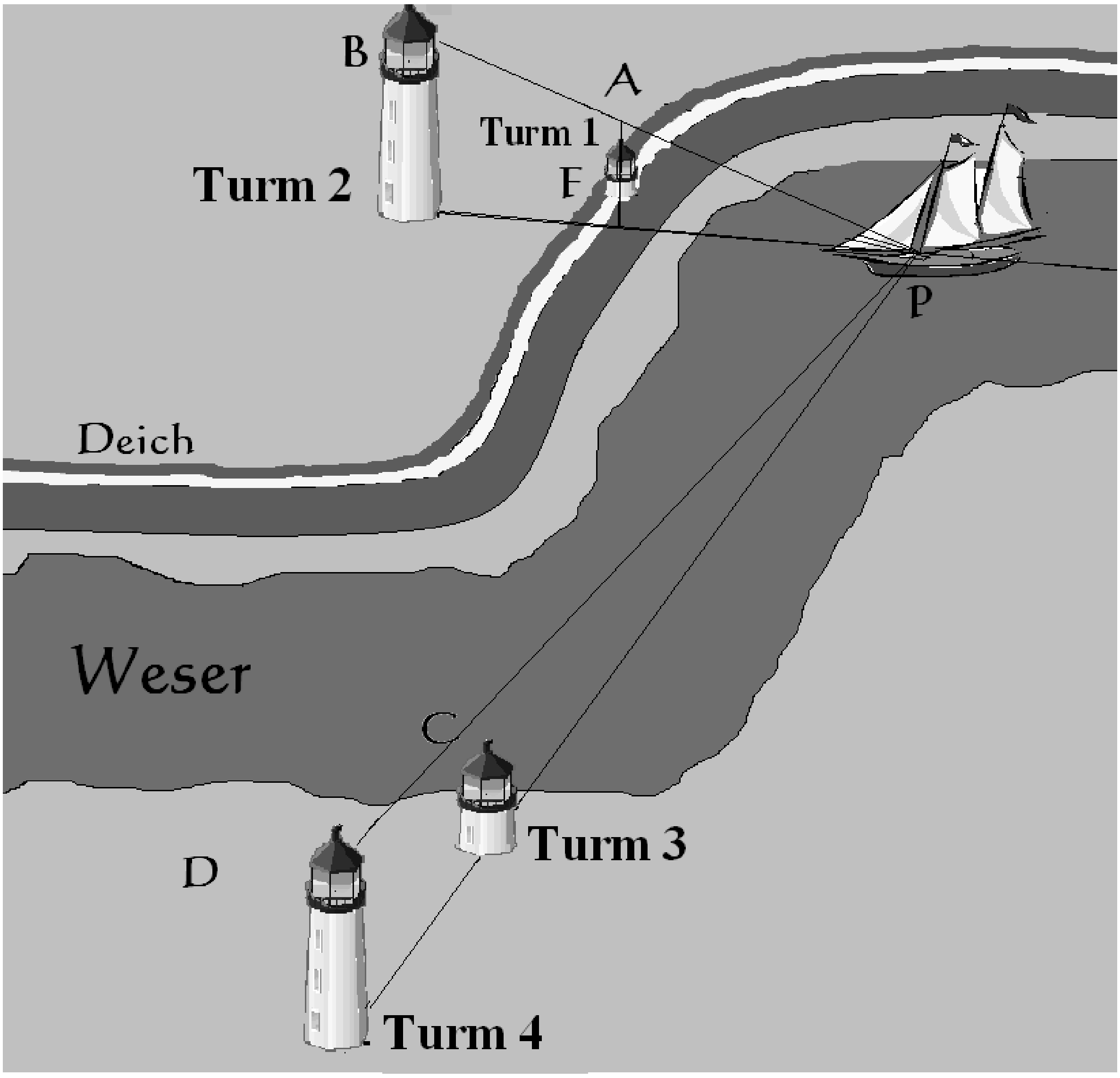
e) Erläutern Sie, welche Bedeutung der Parameter p im Anwendungszusammenhang besitzt.

Bestimmen Sie einen Wert für p, bei dem die Population stationär bleibt.

Ermitteln Sie mit dem von Ihnen bestimmten Wert für p eine stabile Verteilung. (7 Punkte)

Aufgabe 5 - zum Themenbereich Analytische Geometrie

Leuchttürme an der Weser



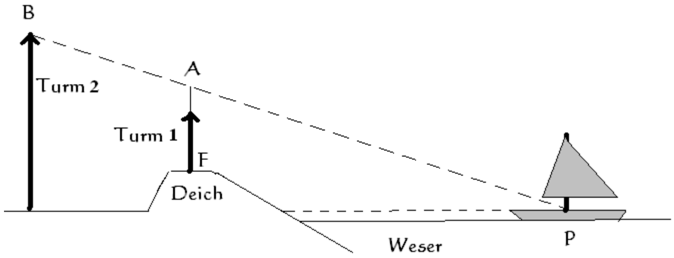
Entlang der Weser stehen zahlreiche Leuchttürme zur Orientierung der Schifffahrt. Ein Schiff muss stets so gelenkt werden, dass es auf zwei hintereinander stehende Leuchttürme zufährt, ein niedriger Turm mit dem Unterfeuer und dahinter ein hoher Turm mit dem Oberfeuer. Wenn das Schiff eine Stelle erreicht, aus deren Sicht zwei weitere Leuchttürme hintereinander stehen, wendet der Steuermann das Schiff in diese neue Richtung[1]. In der Abbildung oben fährt ein Schiff in Richtung der Türme 1 und 2. Wenn es die Stelle P erreicht, fährt es in Richtung der Türme 3 und 4 weiter.

[1] Dass diese Stelle durch ein Quermarkenfeuer signalisiert wird, lassen wir hier außer Acht.

Wir legen ein rechtwinkliges Koordinatensystem so zugrunde, dass die x_1-x_2-Ebene dem Erdboden entspricht und die x_3-Achse senkrecht zum Himmel zeigt. Die Stelle, an der das Schiff dreht, wird dann durch den Punkt $P(-700\,|\,500\,|\,0)$ beschrieben. Die Punkte $B(-700\,|\,-500\,|\,40)$ und $D(1300\,|\,-500\,|\,30)$ stellen jeweils die Mitten der Oberfeuer der Türme 2 und 4 dar. Die Augen des Steuermannes befinden sich ungefähr auf Höhe des Erdbodens.

Alle Koordinaten sind dabei in Meter angegeben.

a) Der Blick des Steuermannes zum Oberfeuer soll durch eine Gerade beschrieben werden.
Geben Sie eine Geradengleichung für die Gerade g an, die durch die Punkte P und B geht.
Das Unterfeuer darf nicht so hoch sein, dass es aus Sicht des Steuermannes das Oberfeuer verdeckt.
Zeigen Sie, dass der Punkt $A(-700\,|\,-100\,|\,24)$ auf der Geraden g liegt.
Das Unterfeuer steht auf dem Deich mit dem Fußpunkt $F(-700\,|\,-100\,|\,10)$.
Geben Sie die Höhe des Deiches an.
Geben Sie an, wie hoch der Turm 1 sein darf. (6 Punkte)



b) Bestimmen Sie den Abstand des Schiffes beim Drehmanöver in P vom Fußpunkt des Turmes 4, der in der x_1-x_2-Ebene liegt. (2 Punkte)

c) Eine Möwe fliegt auf der Geraden h

ausgehend vom Punkt $Q(300\,|\,400\,|\,135)$ in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -0{,}3 \end{pmatrix}$.

Geben Sie an, in welche Himmelsrichtung die Möwe fliegt, wenn die x_1-Achse nach Süden und die x_2-Achse nach Osten zeigt.

Die Gerade $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} -700 \\ 500 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2000 \\ -1000 \\ 30 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$ enthält die Punkte P und D.

Bestimmen Sie den Schnittpunkt S zwischen den Geraden h und k.
Interpretieren Sie die Bedeutung dieses Schnittpunktes für den Steuermann. (5 Punkte)

d) Beim Drehmanöver des Schiffes geht der Blick des Steuermannes mehrfach vom Leuchtturm 2 zum Leuchtturm 4 und beschreibt damit den Ausschnitt einer Ebene.
Bestimmen Sie eine Ebenengleichung in Parameterform und in Normalenform für die Ebene E, die die Punkte P, B und D enthält. (8 Punkte)

e) Ermitteln Sie den Neigungswinkel α zwischen der Blickebene E des Steuermannes und dem Boden.
Der Steuermann sieht die beiden Oberfeuer unter verschiedenen Winkeln gegenüber dem Erdboden.
Geben Sie ohne Rechnung an, welche Größe diese Winkel gegenüber dem Winkel α haben.
(Hinweis: mögliche Darstellung der Blickebene $E: x_1 + 8x_2 + 200x_3 = 3300$) (4 Punkte)

Aufgabe 6 - zum Themenbereich Analysis

Funktionsuntersuchung

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = 10 \cdot x \cdot e^{-0,2x} \;,\; x \in \mathbb{R}$$

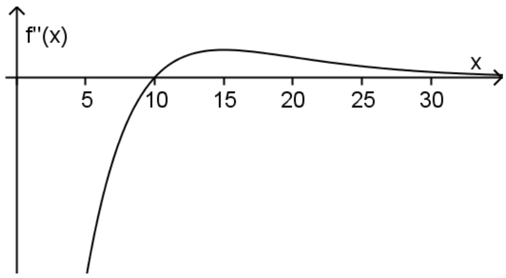
a) Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f.

Untersuchen Sie die Funktionswerte von f für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$. Begründen Sie dabei das Verhalten von $f(x)$ anhand des Funktionsterms.

Die Funktion $h(x) = x$ beschreibt die Winkelhalbierende durch den 1. und 3. Quadranten des Koordinatensystems. Bestimmen Sie alle Punkte, in denen sich die Graphen von f und h schneiden.

(5 Punkte)

b) Bestimmen Sie die erste Ableitung von f und ermitteln Sie mit ihrer Hilfe den Extrempunkt des Graphen von f.



Rechts ist der Graph der zweiten Ableitung von f dargestellt. Begründen Sie anhand des Schaubildes, ob es sich bei dem von Ihnen gefundenen Extrempunkt um ein Maximum oder Minimum handelt.

Begründen Sie anhand des Schaubildes, wo der Graph von f Wendestellen besitzt.

(6 Punkte)

c) Skizzieren Sie den Graphen von f in einem sinnvollen Intervall. (4 Punkte)

Um bei Bränden in Gebäuden den Schutz der dort arbeitenden Menschen zu erhöhen, werden von Sicherheitsbeauftragten oder von der Feuerwehr regelmäßig Räumungsübungen durchgeführt: Nachdem ein Probealarm ausgelöst wurde, müssen alle Personen zügig das Gebäude verlassen.

Der Sicherheitsbeauftragte einer kleinen Schule führt eine Räumungsübung durch, die nach 20 Minuten beendet sein soll. Im Gebäude befinden sich 250 Personen. Mit x wird die Zeit in Minuten seit dem Auslösen des Alarms bezeichnet. Die oben angegebene Funktion f gibt jetzt die Anzahl der Personen pro Minute an, die das Gebäude zum Zeitpunkt x verlassen.

d) Beschreiben Sie den Ablauf der Räumungsübung in den wesentlichen Eigenschaften, wie er sich anhand der Funktion f ergibt. (4 Punkte)

e) Weisen Sie nach, dass alle Funktionen F mit $F(x) = -(250 + 50x) \cdot e^{-0,2x} + c$ und mit der Konstanten $c \in \mathbb{R}$ Stammfunktionen von f sind.

Die Funktion $F(x)$ soll jedem Zeitpunkt $x \geq 0$ die Anzahl der Personen zuordnen, die seit dem Auslösen des Alarms insgesamt das Gebäude verlassen haben. Bestimmen Sie dazu einen passenden Wert für c.

Berechnen Sie das Integral $\int_0^{20} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Erläutern Sie, welche Bedeutung das Integral im Anwendungszusammenhang hat und beurteilen Sie den Erfolg der Räumungsübung. (6 Punkte)

Die Senatorin
für Bildung und Wissenschaft

Schriftliche Abiturprüfung 2011 im dritten Prüfungsfach

Grundkurs Mathematik (TR)

Mai 2011, 9.00 Uhr

Unterlagen für Referenten und Korreferenten

- Diese Unterlagen sind nicht für Schülerinnen und Schüler bestimmt -

---

Diese Unterlagen enthalten …

- Allgemeines,
- die Bewertung der Prüfungsleistung und Lösungsskizzen zu den Aufgaben,
- keine Aufgabenstellungen – Ihre Exemplare entnehmen Sie bitte den Schüleraufgaben – ,
- einen Protokollbogen zur Auswahl der Aufgaben für die Prüfungsakten Ihrer Schule,
- einen Rückmeldebogen für die Zentralabiturkommission zur Auswahl der Aufgaben.

Allgemeines

- Prüfen Sie die Prüfungsaufgaben vor der Aushändigung an die Schülerinnen und Schüler auf ihre Vollständigkeit und formale und inhaltliche Korrektheit und ergänzen Sie sie gegebenenfalls. Bei nicht ausreichender Anzahl erstellen Sie entsprechende Kopien vor Ort. Bei einem schwerwiegenden inhaltlichen Fehler informieren Sie sofort die Senatorin für Bildung und Wissenschaft über die **Hotline (0421 361 6209 oder 10595)** von 7.00 bis 9.30. Die von der Senatorin für Bildung und Wissenschaft vorgenommene Korrektur gibt die Schule sofort an die für die schriftliche Prüfung zuständige Lehrkraft weiter.
- Wählen Sie gemeinsam mit Ihrer Korreferentin / Ihrem Korreferenten aus den sechs vorgelegten Aufgaben drei zur Bearbeitung aus. Die Aufgaben kommen aus mindestens zwei verschiedenen Themenbereichen, mindestens eine der Aufgaben ist aus dem Themenbereich Analysis. Kommt es zu keiner Einigung, bestimmt die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses die Auswahl der Aufgaben (§ 10 Abs. 2 Nr. 1 AP-V). Protokollieren Sie auf dem beigefügten Protokollformular, welche Aufgaben Sie gewählt haben (Prüferin/Prüfer und Korreferentin/Korreferent und ggf. auch die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses unterschreiben das Protokoll).
- Füllen Sie bitte für die Zentralabiturkommission Mathematik den beigefügten Rückmeldebogen zur Auswahl der Aufgaben aus und schicken ihn an die dort genannte Adresse.
- Fragen Sie vor Verteilung der Aufgaben nach der Arbeitsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler und weisen Sie diese auf die Regelungen des § 5 AP-V (Täuschung und Behinderung) hin.
- Machen Sie die Schülerinnen und Schüler auf die Arbeitshinweise aufmerksam, die am Anfang ihrer Unterlagen für die Prüfung stehen. Geben Sie ihnen ggf. die nötigen Angaben zur Schulnummer sowie zur genauen Kursbezeichnung.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: Nicht programmierbarer wissenschaftlicher Taschenrechner, Formelsammlung, Zeichengerät, Rechtschreiblexikon.

Die Bewertung der Prüfungsleistung

Die Lösungsskizze stellt eine Lösungsvariante dar; andere gleichwertige Lösungen sind entsprechend zu bewerten. Die Bewertungsanteile pro Teilaufgabe sind obligatorisch.

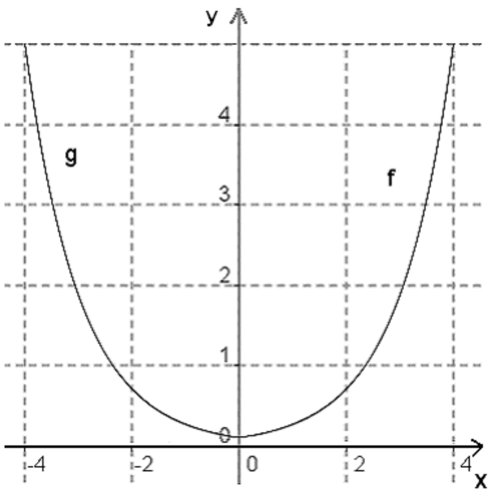
Für die Festlegung der Gesamtleistung werden den erzielten Bewertungseinheiten die entsprechenden Notenstufen gemäß folgender Tabelle zugeordnet.

Bewertungs-einheiten	KMK Punkte
0 bis 14,5	00
15 bis 20	01
20,5 bis 24,5	02
25 bis 29,5	03
30 bis 33,5	04
34 bis 37	05
37,5 bis 41	06
41,5 bis 44,5	07
45 bis 48,5	08
49 bis 52	09
52,5 bis 56	10
56,5 bis 59,5	11
60 bis 63,5	12
64 bis 67	13
67,5 bis 71	14
71,5 bis 75	15

Aufgabe 1 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
a)	$g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $g'(x)=3ax^2+2bx+c$ $g''(x)=6ax+2b$ $g(0)=0 \quad \Rightarrow \quad d=0$ $g'(0)=0 \quad \Rightarrow \quad c=0$ $g(8)=3{,}2 \quad \Rightarrow \quad 3{,}2=a\cdot 8^3+b\cdot 8^2$ $g'(8)=0 \quad \Rightarrow \quad 0=3\cdot a\cdot 8^2+2\cdot b\cdot 8$ Die Lösung des linearen Gleichungssystems $\left\lvert\begin{matrix}512a+64b=3{,}2\\192a+16b=0\end{matrix}\right\rvert$ liefert $a=-0{,}0125$ und $b=0{,}15$ Damit ist $g(x)=-0{,}0125x^3+0{,}15x^2$ eine mögliche Lösung. Wegen $g''(8)<0$ liegt an der in der Aufgabe geforderten Stelle ein Hochpunkt. Also ist $g(x)=-0{,}0125x^3+0{,}15x^2$ die geforderte Funktionsgleichung.	3	5	
b)	Höhe am Ansatzpunkt des geraden Anschlussstücks: $g(9)=3{,}0375$ Steigung am Ansatzpunkt des geraden Anschlussstücks: $g'(9)=-0{,}3375$ Höhe h am Ende des geraden Anschlussstücks: $h=g(9)-g'(9)=2{,}7$ Geradengleichung: $h(x)=mx+b$; $m=g'(9)=-0{,}3375$ Mit zum Beispiel $h(10)=2{,}7$ ist $b=2{,}7+0{,}3375\cdot 10=6{,}075$, damit ist $h(x)=-0{,}3375x+6{,}075$	3	3	
c)	Zum Beispiel: Eine Wendetangente müsste den Graphen von g schneiden, die betrachtete Tangente liegt in einer Umgebung von x_B ganz unterhalb des Graphen. $g'(x_B)$ gibt die Steigung des Graphen im Punkt B an. Da es sich bei der Geraden durch B und F um die Tangente an den Graphen im Punkt B handelt, kann man diese Steigung $g'(x_B)$ auch durch die Sekantensteigung m zwischen F und B ermitteln: $m=\frac{y_F-y_B}{x_F-x_B}=\frac{2{,}7-g(x_B)}{10-x_B}$. Tangentengleichung: $t(x)=0{,}2846x-0{,}1486$. $\tan\alpha=m \quad \Rightarrow \quad \alpha\approx 15{,}9°$ Der Sessel kann höchstens um einen Winkel von ca. $16°$ gekippt werden.		4	2
d)	$L=\int_0^9\left(1+\frac{9}{12800}x^4-\frac{9}{800}x^3+\frac{9}{200}x^2\right)dx$ $=\left[x+\frac{9}{64000}x^5-\frac{9}{3200}x^4+\frac{3}{200}x^3\right]_0^9\approx 9{,}79$ Das Rohr ist in dem Bereich ca. 98 cm lang.	4	1	
	Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	**10**	**13**	**2**

Aufgabe 2 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

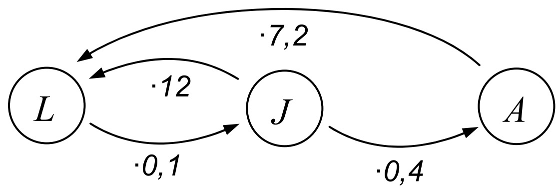
	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
a)	Ermitteln der Parameter: $f(0)=0{,}1 \Leftrightarrow a=0{,}1$ $f(4)=5 \Leftrightarrow k=\ln\left(\frac{5}{0{,}1}\right)\frac{1}{4}$ $k \approx 0{,}98$ Die Werte der Parameter stimmen überein.		3	
b)	Skizze des Graphen g für $-4 \le x \le 0$  Funktionsgleichungen der Ableitungen unter Berücksichtigung der Rundungen: $f'(x)=0{,}1\cdot 0{,}98\, e^{0{,}98x}$ $f'(x)=0{,}098\, e^{0{,}98x} \approx 0{,}10\, e^{0{,}98x}$ $g'(x)=0{,}1\cdot(-0{,}98)\, e^{-0{,}98x}$ $g'(x)=-0{,}098\, e^{0{,}98x} \approx -0{,}10\, e^{0{,}98x}$ Funktionswert der Ableitung an der Stelle $x=0$: $f'(0)\approx 0{,}1$ $g'(0)\approx -0{,}1$ Die Bahn hätte einen Knick. Aus Gründen der Symmetrie müsste aber $m=0$ gelten.	1	3	1
c)	$h(0)=0{,}1$, $h(4)\approx 4{,}97$, $h(-4)\approx 4{,}97$ An der Stelle $x=0$ wird der geforderte Wert eingehalten. An den Stellen $x=4$ bzw. $x=-4$ liegt man sehr nahe am gewünschten Wert. Der Tiefpunkt der Bahn: $f'(x_E)=0 \Leftrightarrow x_E=0$ $h''(x)\approx 0{,}07\,(e^{1{,}15x}+e^{-1{,}15x})$ $h''(x_E)=0{,}14>0$. Es handelt sich um einen Tiefpunkt $T(0\,\vert\,0{,}1)$.	3	3	1

d)	Die Steigung der Rampe lässt sich unter Verwendung der Punkte $S(3,50 \mid 2,57)$ und $B(3,05 \mid 1,67)$ berechnen: $m = \frac{2,57-1,67}{3,50-3,05} = 2$. $h'(3,05) \approx 2,00$. Die Bedingung kann als erfüllt gelten.	3	1	
e)	Eine Stammfunktion zu h wird mittels H angegeben: $H'(x) = \frac{1}{23} \cdot \frac{23}{20} e^{1,15x} - \frac{1}{23} \cdot (-\frac{23}{20})\, e^{-1,15x} = 0,05\, e^{1,15x} + 0,05\, e^{-1,15x}$. $H'(x) = h(x)$. Das Integral $\int_{-4}^{4} h(x)dx$ liefert: $H(4) - H(-4) \approx 8,65$. Es wird das Maß der Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse berechnet.	3	3	
Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**10**	**13**	**2**

Aufgabe 3 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
a)	Lösung zum Beispiel mit einem (verkürzten) Baumdiagramm: $0,68 \cdot 0,58 = 0,3944$ Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Hauptgewinn an eine weibliche Person aus Bremen geht, beträgt ca. $39,4\%$.	2	2	
b)	Es gibt zwei Ausgänge pro Losziehung: Gewinn oder Niete . Die Gewinnchance der einzelnen Lose kann als unabhängig voneinander angesehen werden. (p bleibt wegen der großen Anzahl der Lose im Topf (40000) und dem dazu verschwindend kleinen Anteil der gekauften Lose gleich.) $n=6;\ \ p=0,25$ $P(X=2)\approx 0,2966$ $P(X\le 2)\approx 0,8306$ $P(X\ge 1)\ge 0,95 \Leftrightarrow 1-0,75^n \ge 0,95 \ \Rightarrow n\ge 11$ Man muss mindestens 11 Lose kaufen, um mit mindestens 95% iger Wahrscheinlichkeit mindestens ein Gewinnlos dabei zu haben.	4	6	
c)	$n=12$, Erwartungswert $\mu = n\cdot p = 3$ $n=4;\ \ X,p$ wie in b) ; $P(X\ge 1)=\frac{175}{256}\approx 0,6836$ $P($ jedes Mal mindestens einen Gewinn $)=\left(\frac{175}{256}\right)^3 \approx 0,3194$	1	3	1
d)	Unterschied zwischen den Erwartungswerten mit und ohne Spenden: $0,30$ € bis $0,40$ €. Spendenaufkommen: $0,30\cdot 40000=12000$ $0,40\cdot 40000=16000$ Das Spendenaufkommen liegt zwischen 12000 € und 16000 € pro Lotterie.	2		
e)	Gewinnwahrscheinlichkeit für einen Gewinn zwischen 100 € und 500 €: $1,1-\left(\frac{1}{40000}\cdot 6000+0,0001\cdot 2000+0,248\cdot 1\right)=p\cdot 250$ $\Rightarrow \ p\approx 0,002$ Die Wahrscheinlichkeit, einen Los mit Gewinn zwischen 100 € und 500 € zu ziehen, beträgt ca. 0,2%.	1	2	1
	Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	**10**	**13**	**2**

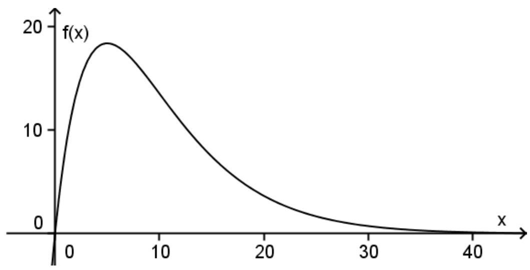
Aufgabe 4 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

Lösungsskizze		Bewertung I	II	III
a)	$A=\begin{pmatrix} 0 & 7{,}2 & 4 \\ 0{,}12 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$ mit $\vec{v}=\begin{pmatrix} L \\ J \\ K \end{pmatrix}$.	2	2	
b)	 Die Überlebensrate eines Jungkäfers beträgt $0{,}4$ und die eines Altkäfers 0.	3	2	
c)	$\vec{v}_0=\begin{pmatrix} 0 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_1=B*\vec{v}_0=\begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2=B*\vec{v}_1=\begin{pmatrix} 72 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}$.	2	2	
d)	Es sei $\vec{v}_S=\begin{pmatrix} 36 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Mit $\begin{pmatrix} 0 & 12 & 7{,}2 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} 36 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 43{,}2 \\ 3{,}6 \\ 1{,}2 \end{pmatrix}=1{,}2\cdot\begin{pmatrix} 36 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ zeigt man die Stabilität und bekommt direkt den Wachstumsfaktor $k=1{,}2$. Der Vektor $\vec{v}_S$ repräsentiert $36+3+1=40$ Tiere. Ein stabiler Vektor mit 200 Tieren ist dann $\vec{v}=\frac{200}{40}\cdot\begin{pmatrix} 36 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 180 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix}$.	2	3	
e)	Der Parameter p beschreibt die Anzahl von Larven, die ein Altkäfer aus dem Vorjahr im Mittel als Nachwuchs hervorbringt. Bei einer stationären Population gilt $k=1$. Damit ist die Bedingungsgleichung $\begin{pmatrix} 0 & 8 & p \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}*\vec{v}=\vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 8 & p \\ 0{,}1 & -1 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & -1 \end{pmatrix}*\vec{v}=\vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 8 & p \\ -1 & 8 & 5 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}*\vec{v}=\vec{0}$ Aus Vergleich der 1. und 2. Zeile ergibt sich $p=5$. Die 2. und 3. Zeile des LGS liefern $0{,}1\cdot v_1-1\cdot v_2=0$ und $0{,}4\cdot v_2-1\cdot v_3=0$. Setzt man zum Beispiel $v_2=5$, so folgt $v_1=50$, $v_3=2$ und man erhält $\vec{v}=\begin{pmatrix} 50 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ oder Vielfache als Verteilung.	1	4	2
Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**10**	**13**	**2**

Aufgabe 5 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

Lösungsskizze		Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
a)	Mit $\overrightarrow{OP}$ als Stützvektor und $\overrightarrow{PB}$ als Richtungsvektor ergibt sich die Geradengleichung $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-700\\500\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\-1000\\40\end{pmatrix};t\in\mathbb{R}$. Der Ansatz $\begin{pmatrix}-700\\500\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\-1000\\40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-700\\-100\\24\end{pmatrix}$ wird von $t=\frac{3}{5}=0,6$ in allen drei Komponenten erfüllt. Die dritte Komponente des Fußpunktes F legt die Deichhöhe auf 10 m fest. Punkt A liegt in 24 m Höhe, also muss der Turm kleiner als 14 m sein.	2	4	
b)	Für den Fußpunkt des Turmes 4 gilt $F_4(1300\|-500\|0)$. Der Abstand zum Punkt P beträgt ca. $2236m$ (wegen $a=\left\|\overrightarrow{PF_4}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}2000\\-1000\\0\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{5000000}\approx 2236$).	1	1	
c)	Die Möwe fliegt nach Westen. Der Ansatz $\begin{pmatrix}-700\\500\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2000\\-1000\\30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}300\\400\\135\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\-1\\-0,3\end{pmatrix}$ führt zu $r=\frac{1}{2}$, $s=400$ und $S(300\|0\|15)$. Die Möwe durchkreuzt am Schnittpunkt S den Blick des Steuermannes und erscheint ihm somit vor dem Oberfeuer D.	2	2	1
d)	Mit dem Stützvektor $\overrightarrow{OP}$ und den Spannvektoren $\overrightarrow{PB}$ und $\overrightarrow{PD}$ erhält man die Parametergleichung $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}-700\\500\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\-1000\\40\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2000\\-1000\\30\end{pmatrix};r,s\in\mathbb{R}$. Unterschiedliche Verfahren (z.B. Auflösen zweier Komponentengleichungen nach r und s und Einsetzen in die dritte Komponentengleichung) führen zu der Normalenform $\vec{x}*\begin{pmatrix}1\\8\\200\end{pmatrix}-3300=0$.	4	4	
e)	Für den Winkel zwischen den Normalenvektoren der beiden Ebenen gilt: $\cos(\alpha)=\frac{\begin{pmatrix}1\\8\\200\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\8\\200\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|}=\frac{200}{\sqrt{40065}}\approx 0,9992$, $\alpha\approx 2,3°$. Rundung kann zu abweichenden Ergebnissen führen. Die Winkel, unter denen der Steuermann die Oberfeuer gegenüber dem Erdboden sieht, sind kleiner als α.	1	2	1
Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**10**	**13**	**2**

Aufgabe 6 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
a)	Nullstellen: $f(x)=10\cdot x\cdot e^{-0,2x}=0$ ergibt nur $x=0$, da $e^{-0,2x}\neq 0$ für alle x. Für $x\to-\infty$ geht $f(x)\to-\infty$, da beide Faktoren vom Betrag über alle Grenzen wachsen und mit $x<0$ und $e^{-0,2x}>0$ das Produkt kleiner null ist. Für $x\to+\infty$ geht $f(x)\to 0$, da $e^{-0,2x}$ schneller gegen null geht als x wächst. Mit dem Ansatz $x=10\cdot x\cdot e^{-0,2x}$ erhält man $x_s=0\vee x_s=-5\cdot\ln(0,1)\approx 11,51$. Die Schnittpunkte sind damit $S_1(0\,\vert\,0)$ und $S_2(11,51\,\vert\,11,51)$.	2	3	
b)	Ableitung $f'(x)=(10-2x)\cdot e^{-0,2x}$. Extrempunkt $f'(x_E)=(10-2x_E)\cdot e^{-0,2x_E}=0$ ergibt $x_E=5$. Einsetzen von $x_E=5$ in $f(x)$ liefert $f(5)=50e^{-1}$. Aus dem Graphen von f'' liest man ab $f_k''(5)<0$, also ist ein Hochpunkt bei $H\left(5\,\vert\,\frac{50}{e}\right)$. Hinreichendes Kriterium für Wendestellen ist $f''(x_W)=0$ mit Vorzeichenwechsel bei x_W. Dieses Merkmal besitzt der Graph bei etwa $x=10$.	2	4	
c)	Ein sinnvoller Bereich umfasst Nullstelle, Hochpunkt, Wendepunkt und deutet die Asymptote an. 	3	1	
d)	Die Anzahl der Personen, die das Gebäude pro Minute verlassen, bezeichnen wir kurz als Personenrate. Unmittelbar bei Auslösen des Alarms verlassen noch keine Personen das Gebäude, die Personenrate ist also null. Sie steigt dann schnell an und erreicht nach 5 Minuten mit gut 18 Personen pro Minute ihr Maximum. Danach fällt die Rate ab und läuft gegen null: Nur noch sporadisch verlassen Personen das Gebäude.	2	2	
e)	Durch Ableiten der Stammfunktion F erhält man $F'(x)=-(50x+250)\cdot(-0,2)\cdot e^{-0,2x}-50\cdot e^{-0,2x}=10\cdot x\cdot e^{-0,2x}$ Da zu Beginn noch niemand das Gebäude verlassen konnte, muss $F(0)=0$ gelten. Durch Einsetzen wird der Parameter zu $c=250$ bestimmt. $\int_0^{20} 10\cdot x\cdot e^{-0,2\cdot x}\,\mathrm{d}x=F(20)=250-(250+50\cdot 20)e^{-0,2\cdot 20}\approx 227,1$. Das Integral ermittelt die Gesamtzahl der Personen, die ab dem Alarm bis zum Zeitpunkt $x=20$ das Gebäude verlassen haben. Es befinden sich damit bei Ende der Übung noch etwa 23 Personen im Gebäude, so dass die Übung nicht als erfolgreich gelten kann.	1	3	2
	Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	**10**	**13**	**2**