Die Senatorin
für Bildung und Wissenschaft

Freie
Hansestadt
Bremen

Schriftliche Abiturprüfung 2009

Leistungskurs Mathematik (TR)

Dienstag, 21. April 2009, 9.00 Uhr

Unterlagen für Lehrerinnen und Lehrer

- Diese Unterlagen sind nicht für die Prüflinge bestimmt -

Diese Unterlagen enthalten …

- Allgemeines,
- die Bewertung der Prüfungsleistung,
- Aufgaben mit Lösungsskizzen,
- einen Protokollbogen zur Auswahl der Aufgaben für die Prüfungsakten Ihrer Schule,
- einen Rückmeldebogen für die Zentralabiturkommission zur Auswahl der Aufgaben.

Allgemeines

- Wählen Sie gemeinsam mit Ihrer Korreferentin / Ihrem Korreferenten aus den sechs vorgelegten Aufgaben drei zur Bearbeitung aus. Die Aufgaben kommen aus mindestens zwei verschiedenen Themenbereichen, mindestens eine der Aufgaben ist aus dem Themenbereich Analysis. Kommt es zu keiner Einigung, bestimmt die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses die Auswahl der Aufgaben (§ 10 Abs. 2 Nr. 1 AP-V). Protokollieren Sie auf dem beigefügten Protokollformular, welche Aufgaben Sie gewählt haben (Prüferin/Prüfer und Korreferentin/Korreferent und ggf. auch die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses unterschreiben das Protokoll).
- Füllen Sie bitte für die Zentralabiturkommission Mathematik den beigefügten Rückmeldebogen zur Auswahl der Aufgaben aus und schicken ihn an die dort genannte Adresse.
- Fragen Sie vor Verteilung der Aufgaben nach der Arbeitsfähigkeit der Prüflinge und weisen Sie diese auf die Regelungen des § 5 AP-V (Täuschung und Behinderung) hin.
- Machen Sie die Prüflinge auf die Arbeitshinweise aufmerksam, die am Anfang der Unterlagen für die Prüfungsteilnehmer stehen. Geben Sie ihnen ggf. die nötigen Angaben zur Schulnummer sowie zur genauen Kursbezeichnung.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 240 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: Nicht programmierbarer wissenschaftlicher Taschenrechner, Formelsammlung, Zeichengerät, Rechtschreiblexikon

Die Bewertung der Prüfungsleistung

Die Lösungsskizze stellt eine Lösungsvariante dar; andere gleichwertige Lösungen sind entsprechend zu bewerten. Die Bewertungsanteile pro Teilaufgabe sind obligatorisch.

Für die Festlegung der Gesamtleistung werden den erzielten Bewertungseinheiten die entsprechenden Notenstufen gemäß folgender Tabelle zugeordnet.

Bewertungseinheiten			KMK Punkte
0	bis	19,5	0
20	bis	26,5	1
27	bis	33,5	2
34	bis	39,5	3
40	bis	44,5	4
45	bis	49	5
49,5	bis	54	6
54,5	bis	59	7
59,5	bis	64	8
64,5	bis	69	9
69,5	bis	74	10
74,5	bis	79	11
79,5	bis	84	12
84,5	bis	89	13
89,5	bis	94	14
94,5	bis	99	15

Aufgabe 1 - zum Themenbereich Analysis

DSL-Boom

In regelmäßigen Abständen werden neue Zahlen zu den DSL-Internet-Zugängen veröffentlicht. Die nebenstehende Grafik zeigt die Entwicklung vom Jahr 2002 bis zum Jahr 2006.

Quelle: BITKOM (Bundesverband der Informationswirtschaft, Telekommunikation und neue Medien)

Durch die Analyse der Daten eines zurückliegenden Zeitraums versucht man Vorhersagen für die Zukunft abzuleiten. Dazu werden mathematische Modelle entwickelt.

In einer ersten Modellannahme soll exponentielles Wachstum mit der Funktion f und der Gleichung $f(x) = c \cdot e^{k \cdot x}$ angenommen werden; x in Jahren ($x = 0$ entspricht Ende 2002), $f(x)$ in Millionen DSL-Anschlüssen zum Zeitpunkt x.

a) Bestimmen Sie die Parameter c und k mit Hilfe der Daten der Jahre 2002 und 2005. Runden Sie den Wert k auf zwei Nachkommastellen.
Berechnen Sie, wie viele DSL-Anschlüsse es nach dieser Funktionsgleichung im Jahre 2010 geben würde.
Berechnen Sie, in welchem Jahr eine Anzahl von 30 Millionen Anschlüssen erstmalig überschritten würde.
Begründen Sie, warum die weitere Entwicklung vermutlich mit der obigen Funktionsgleichung nicht vorhergesagt werden kann.

In einer zweiten Modellannahme legen wir logistisches Wachstum mit der Funktionsgleichung

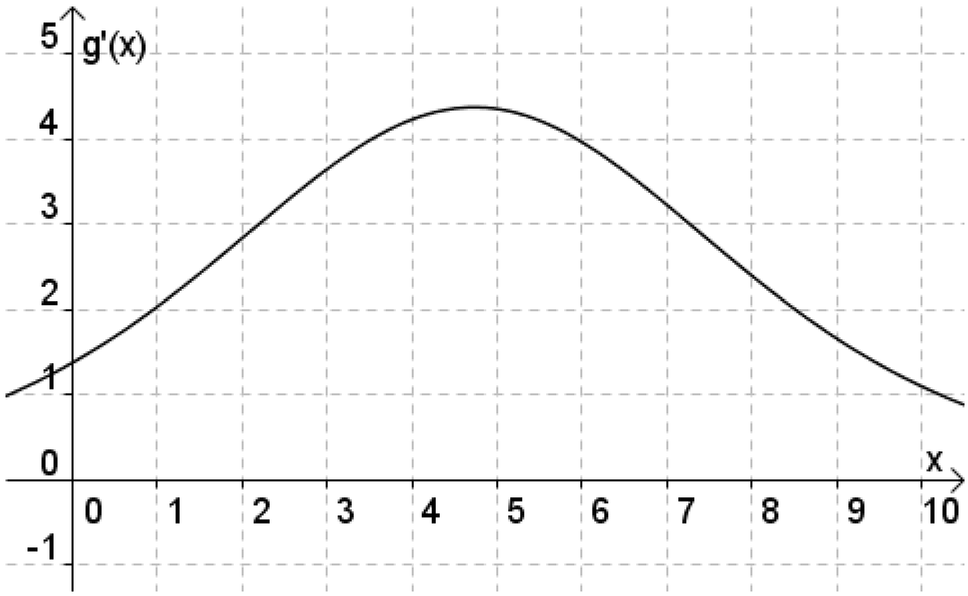
$$g(x) = \frac{105}{3 + 32 \cdot e^{-0,5 \cdot x}}$$

zugrunde. Sie erfasst die bisherigen DSL-Anschlüsse jeweils am Jahresende hinreichend gut. Wieder gilt: x in Jahren ($x = 0$ entspricht Ende 2002), $g(x)$ in Millionen DSL-Anschlüssen zum Zeitpunkt x. Benutzen Sie diese Gleichung für die nachfolgenden Untersuchungen.

b) Zeigen Sie, dass die Prognosefunktion g die Werte der vergangenen Jahre 2002 und 2005 relativ gut wiedergibt und berechnen Sie einen Vorhersagewert für 2010.
Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to \infty} g(x)$ und erläutern Sie seine Bedeutung für eine langfristige Vorhersage. Gehen Sie dabei von insgesamt 40 Mio. vorhandenen Haushalten in Deutschland aus.

c) Leiten Sie für die Funktion g den Term der ersten Ableitung her und geben Sie zwei verwendete Regeln an.
Erläutern Sie die Bedeutung der Ableitungsfunktion im Sachzusammenhang.

d) Der nachfolgend angegebene Graph ist der Graph von g'.
Lesen Sie aus dem Graphen die Koordinaten des Maximums von g' näherungsweise ab.
Beschreiben Sie dessen Bedeutung bei der Entwicklung der DSL-Anschlusszahlen und für den Graphen der Funktion g.
Beschreiben Sie den Lösungsweg zur genauen Berechnung des Maximums von g', wenn Ihnen keine Skizze vorliegt. Die Ausführung der Rechnung wird nicht erwartet.



Graph der Ableitungsfunktion g'

e) Als Maß für die Einnahmen aller DSL-Anschlüsse kann die Größe der Fläche unter der Funktion g angesehen werden.
Weisen Sie nach, dass die Funktion G mit $G(x) = 70 \cdot \ln\left(3 \cdot e^{0,5 \cdot x} + 32\right)$ eine Stammfunktion der obigen Funktion g zum logistischen Wachstum ist.
Bestimmen Sie den Faktor, um den sich die Einnahmen und damit die Fläche im Zeitraum 2008 bis 2010 gegenüber dem Zeitraum 2004 bis 2006 verändert hat.

f) Die Funktionsgleichung g zum logistischen Wachstum erfüllt die Differenzialgleichung

$$g'(x) = k \cdot g(x) \cdot \left(S - g(x)\right),$$

mit Wachstumskonstante k und Sättigungsgrenze S.
Interpretieren Sie die Differenzialgleichung und geben Sie an, was diese für die Entwicklung der DSL-Anschlusszahlen bedeutet.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 1**

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1a</td><td>Ablesen der Werte $c = f(0) = 3{,}3$ und $f(3) = 10$ aus der Grafik.
Einsetzen in die Funktionsgleichung von f und nach k umgestellt ergibt gerundet $k = 0{,}37$.
Für 2010 mit $x = 8$ folgt $f(8) = 3{,}3 \cdot e^{0{,}37 \cdot 8} = 63{,}7$ Millionen Anschlüsse.
30 Millionen Anschlüsse überschritten, wenn $30 = 3{,}3 \cdot e^{0{,}37 \cdot x}$
ergibt $x \approx 6$ Jahre, also 2008.
Begründung: Die Exponentialfunktion berücksichtigt nicht die Marktsättigung, d.h. dass nur eine begrenzte Anzahl Haushalte in Deutschland als Kunde für DSL-Anschlüsse zur Verfügung steht.</td><td>3</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>1b</td><td>Für das Jahr 2002 gilt: $x = 0$ und $g(0) = 3$
Für das Jahr 2005 gilt: $x = 3$ und $g(3) = 10{,}35$
Abweichungen von den Daten maximal 10%; die Prognosefunktion g gibt die Werte deshalb hinreichend genau wieder.
Für das Jahr 2010 gilt: $x = 8$ und $g(8) = 29{,}3$
Grenzwert: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{105}{3 + 32 \cdot e^{-0{,}5 \cdot x}} = 35$
Bedeutung des Grenzwertes:
Die Prognosefunktion g geht von einer Marktsättigung von 35 Mio. aus, und das sind 87% der Haushalte in Deutschland.</td><td>3</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>1c</td><td>Anwendung der (z. B.) Quotienten- und Kettenregel ergibt
$g'(x) = \frac{1680 \cdot e^{-0{,}5x}}{\left(3 + 32 \cdot e^{-0{,}5x}\right)^2}$
Bedeutung der ersten Ableitung im Sachzusammenhang:
Momentane Wachstumsgeschwindigkeit oder Änderung in DSL-Anschlusszahlen pro Jahr in Deutschland.</td><td>4</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>1d</td><td>Das Maximum liegt bei $x \approx 4{,}8$ und $g'(4{,}8) \approx 4{,}3$
Zur Bedeutung des Maximums von g' für die Entwicklung der DSL-Anschlüsse wird folgendes erwartet: Größte Steigerungsrate bei der Anzahl der DSL-Anschlüsse, der Zuwachs an DSL-Anschlüssen wird anschließend wieder geringer, es handelt sich um eine Wendestelle der Funktion g.
Beschreibung des Lösungsweges:
Zweite Ableitung bilden und Null setzen ergibt Stellen mit Steigung 0 der ersten Ableitung. Die dritte Ableitung bilden und überprüfen, ob sie an einer solchen Stelle kleiner 0 ist. Wenn ja, so liegt bei g' ein rel. Maximum vor. Einsetzen der errechneten Stelle in g' ergibt den maximalen Wert. Alternativ: Vorzeichenwechselkriterium.</td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
</table>

Lösungsskizze		Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
1e	Nachweis durch Ableiten der Stammfunktion G unter Anwendung der Kettenregel und geschicktem Erweitern ergibt $g(x)$. Fläche unter dem Graphen der Funktion g im Zeitraum 2004 bis 2006, d.h. im Intervall $[2;4]$, ergibt $G(4)-G(2)\approx 21{,}0$. Fläche unter dem Graphen der Funktion g im Zeitraum 2008 bis 2010, d.h. im Intervall $[6;8]$, ergibt $G(8)-G(6)\approx 52{,}7$. Steigerung der Einnahmen, d.h. der Flächengröße, um den Faktor $2{,}5$.	3	3	
1f	Bedeutung der Differenzialgleichung: Die momentane Änderung $g'(x)$ ist proportional zum Produkt aus Funktionswert $g(x)$ und $(S-g(x))$, dem Unterschied zwischen Sättigungsgrenze und Funktionswert. Zu Beginn liegt näherungsweise exponentielles Wachstum vor, zum Schluss liegt näherungsweise beschränktes Wachstum vor. Beim hier angenommenen logistischen Wachstum für die Entwicklung der Anzahl der DSL-Anschlüsse ist damit der Anstieg proportional zum Produkt aus aktuellem Bestand der DSL-Anschlüsse und Sättigungsmanko.			4
Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**13**	**16**	**4**

Aufgabe 2 - zum Themenbereich Analysis

Hochwasser

Wasserstandsanzeiger Bremerhaven

Auf der Höhe von Bremerhaven erzeugt der Tidenverlauf (Zyklus von Ebbe und Flut) in Verbindung mit den vorherrschenden Winden unterschiedliche Fließgeschwindigkeiten der Weser. Vom Wasser- und Schifffahrtsamt Bremerhaven wurden zu unterschiedlichen Zeitpunkten die Fließgeschwindigkeiten der Weser in $\frac{m^3}{s}$ [Kubikmeter pro Sekunde] gemessen.

a) Die Weser hatte zu Beginn der Messung eine Fließgeschwindigkeit von $6600\frac{m^3}{s}$. Eine Stunde nach Beginn der Messung stieg die Fließgeschwindigkeit auf ihren höchsten Wert von $9000\frac{m^3}{s}$ an.
Drei Stunden nach Beginn der Messung hatte die Weser wieder die Fließgeschwindigkeit erreicht, die sie zu Beginn der Messung hatte.
Das Wasser- und Schifffahrtsamt möchte die Fließgeschwindigkeit der Weser auf der Höhe von Bremerhaven mit Hilfe der beschriebenen Messergebnisse näherungsweise durch eine ganzrationale Funktion f dritten Grades beschreiben.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f in Abhängigkeit von der Zeit x, wobei x die Zeit in Stunden nach Beginn der Messung und $f(x)$ die Fließgeschwindigkeit in $\frac{m^3}{s}$ zum Zeitpunkt x angibt.

Messungen an anderen Tagen bei gleichen Tidenverhältnissen aber unterschiedlichen Winden zeigten, dass sich die Fließgeschwindigkeiten der Weser durch die Funktionen f_k mit

$$f_k(x) = 600x^3 - kx^2 + 5400x + 6600,\ 0 \le x \le 3$$

und $k \in [3550;\ 3600]$ beschreiben lassen.

Die Aufgabenteile b) bis e) sollen stets in Abhängigkeit von k gelöst werden.

b) Berechnen Sie die Fließgeschwindigkeit der Weser sowohl zwei als auch drei Stunden nach Beginn der Messung.
Bestimmen Sie an diesen Punkten jeweils den größten und kleinsten Wert der Fließgeschwindigkeit, der aufgrund des Intervalls für k möglich ist.

c) Weisen Sie nach, dass der Wendepunkt von f_k bei $x_W = \frac{k}{1800}$ liegt und dass die Fließgeschwindigkeit zu dieser Zeit $-\frac{k^3}{4860000} + 3k + 6600\ \frac{m^3}{s}$ beträgt. Erläutern Sie die Bedeutung des Wendepunktes für die Fließgeschwindigkeit.

d) Zeigen Sie, dass alle Wendepunkte (vgl. Teil c)) der Kurvenschar f_k auf dem Graphen einer Funktion h liegen und geben Sie die zugehörige Funktionsvorschrift an.

e) Geben Sie die Funktion g_k an, welche die Fließgeschwindigkeit in „m^3 pro Stunde“ statt in „m^3 pro Sekunde“ beschreiben.
Ermitteln Sie mit Hilfe der Integralrechnung diejenige Wassermenge, welche in der Zeit von Beginn der Messung bis eine Stunde nach Beginn der Messung durch die Weser fließt.
Geben Sie jeweils die größte und kleinste Wassermenge an, die aufgrund des Intervalls für k möglich ist.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 2**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
2a	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ Die drei gegebenen Messungen liefern $f(0) = 6600$ und somit $d = 6600$, $f(1) = 9000 = a + b + c + d$ sowie $f(3) = 6600 = 27a + 9b + 3c + d$. Die Angabe der größten Fließgeschwindigkeit liefert $f'(1) = 0 = 3a + 2b + c$. Zu lösen bleibt das LGS $\begin{bmatrix} 2400 & = & a+b+c \\ 0 & = & 27a+9b+3c \\ 0 & = & 3a+2b+c \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & = & 600 \\ b & = & -3600 \\ c & = & 5400 \end{bmatrix}$ Funktionsgleichung: $f(x) = 600x^3 - 3600x^2 + 5400x + 6600$. Nachweis der Hochpunkteigenschaft.	6	7	
2b	$f_k(2) = 22200 - 4k$ und $f_k(3) = 39000 - 9k$, also beträgt die Fließgeschwindigkeit der Weser zwei Stunden nach Beginn der Messung zwischen $8000\frac{m^3}{s}$ und $7800\frac{m^3}{s}$ und nach drei Stunden zwischen $7050\frac{m^3}{s}$ und $6600\frac{m^3}{s}$.	4		
2c	$x_W = \frac{k}{1800}$ ist Wendestelle, da $f_k''(\frac{k}{1800}) = 3600\frac{k}{1800} - 2k = 0$ und jede Funktion dritten Grades genau eine Wendestelle hat. Die Fließgeschwindigkeit berechnet sich mit $f_k(\frac{k}{1800}) = 600\left(\frac{k}{1800}\right)^3 - k\left(\frac{k}{1800}\right)^2 + 5400\left(\frac{k}{1800}\right) + 6600$ $= \frac{600k^3 - 1800k^3}{1800^3} + 3k + 6600 = -\frac{k^3}{4860000} + 3k + 6600$. Der Wendepunkt ist der Punkt der größten Abnahme der Fließgeschwindigkeit.	2	3	1
2d	Die Wendepunkte $W\left(\frac{k}{1800}\middle\vert -\frac{k^3}{4860000} + 3\cdot k + 6600\right)$ liegen auf der durch $h(x) = -1200x^3 + 5400x + 6600$ beschriebenen Kurve, da $h(\frac{k}{1800}) = -1200\cdot\left(\frac{k}{1800}\right)^3 + 5400\cdot\left(\frac{k}{1800}\right) + 6600 = -\frac{k^3}{4860000} + 3\cdot k + 6600$.	1	4	

Lösungsskizze		Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
2e	Mit $g_k(x) = 3600 \cdot f_k(x)$ gilt: $V_{Wasser} = \int_0^1 g_k(x)dx = 3600 \cdot \int_0^1 f_k(x)dx = 3600 \cdot \int_0^1 (600x^3 - kx^2 + 5400x + 6600)dx$ $= 3600 \cdot \left[150x^4 - \frac{k}{3}x^3 + 2700x^2 + 6600x\right]_0^1 = 3600 \cdot (-\frac{k}{3} + 9450)$ Die Wassermenge, welche von Beginn der Messung bis eine Stunde nach Beginn der Messung durch die Weser fließt, hat den kleinsten Wert von $29700000\ m^3$ und den größten Wert von $29760000\ m^3$.		3	2
Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**13**	**17**	**3**

Aufgabe 3 - zum Themenbereich Wahrscheinlichkeitsrechnung / Statistik

Material: Tabelle zur Normalverteilung, Tabelle zur kumulierten Binomialverteilung für $n = 20$, $p = 0,65$

Studienwünsche

Für die Abiturientinnen und Abiturienten des Jahres 1999 lag die Quote derjenigen, die fest geplant hatten ein Studium aufzunehmen, bei 65%. Diesen Prozentsatz nennt man „Brutto-Studierquote".

Nehmen Sie für die Aufgabenteile a) bis c) folgendes an:
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig befragte Person des Abiturjahrgangs 2009 zu denjenigen gehört, die studieren wollen, beträgt wie zehn Jahre zuvor $0,65$.

a) Erläutern Sie, warum man die Befragung von n zufällig ausgewählten Personen des Abiturjahrgangs 2009 nach ihrer Studierabsicht als binomialverteilten Zufallsversuch auffassen kann.

Geben Sie die zugehörige Zufallsgröße an.

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür an, dass von 20 zufällig befragten Personen des Abiturjahrgangs 2009

- genau 13 studieren wollen.
- mehr als 15 studieren wollen.

Bestimmen Sie $P(13 \le X \le 15)$ und geben Sie an, was dieser Wert im Sachzusammenhang dieser Aufgabe bedeutet.

c) 200 Personen des Abiturjahrgangs 2009 werden nach ihrer Studierabsicht befragt.
Bestimmen Sie den Bereich, in dem mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 90% das Stichprobenergebnis zu erwarten ist.
Erläutern Sie, warum ein Stichprobenergebnis von 142 Studierwilligen auf einem Signifikanzniveau von 5% für eine Erhöhung der Brutto-Studierquote sprechen würde.

d) Im Jahr 2005 war die Brutto-Studierquote auf ca. 70% angestiegen.
Berechnen Sie die Anzahlen von Studierwilligen, die bei einer Befragung von 200 Abiturienten sowohl mit der Brutto-Studierquote von 1999 ($p_1 = 0,65$) als auch mit der Brutto-Studierquote 2005 ($p_2 = 0,7$) verträglich wären (Sicherheitswahrscheinlichkeit 90%).

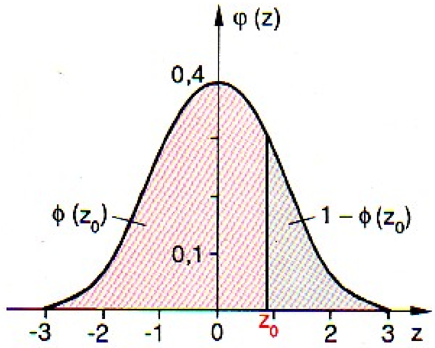
(Der Bereich aus Aufgabenteil c) kann hier ohne Rechnung benutzt werden. Falls Sie Aufgabenteil c) nicht gelöst haben, gehen Sie dabei vom Bereich $\{119; \ldots ;140\}$ aus.)

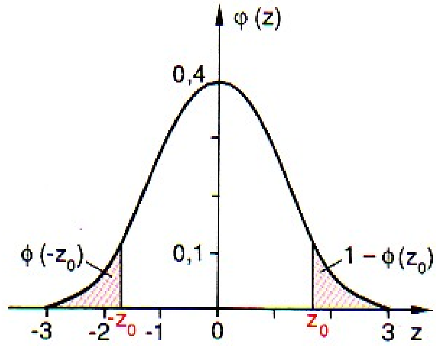
e) Zeigen Sie: Wächst bei einer binomialverteilten Zufallsgröße der Stichprobenumfang um den Faktor $a > 1$, so wächst die Standardabweichung σ um den Faktor $\sqrt{a}$.
Erläutern Sie, warum für eine Umfrage vom Stichprobenumfang $n = 1000$ die $90\% -$ Umgebungen um den Erwartungswert für $p_1 = 0,65$ und $p_2 = 0,7$ keine gemeinsamen Werte haben.

f) Gehen Sie für diesen Aufgabenteil davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig befragte Person des Abiturjahrgangs 2009 studieren will, wie 2005 $p = 0,7$ beträgt.
Für eine Umfrage zur Wahl des Studienfaches sollen mindestens 500 Studierwillige befragt werden.
Bestimmen Sie, wie viele Abiturientinnen / Abiturienten zur Befragung ausgewählt werden müssen, damit man mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95% 500 oder mehr Studierwillige dabei hat.

Material zur Aufgabe Studienwünsche: ***Tabelle zur Normalverteilung***

$$\phi(z) = 0,\ldots$$
$$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$$





z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7703	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998

Beispiele für den Gebrauch der Tabelle:

$\phi(2{,}37) = 0{,}9911$; $\phi(-2{,}37) = 1 - \phi(2{,}37) = 1 - 0{,}9911 = 0{,}0089$;

$\phi(z) = 0{,}7910 \Rightarrow z = 0{,}81$; $\phi(z) = 0{,}2090 = 1 - 0{,}7910 \Rightarrow z = -0{,}81$

Für die Wahrscheinlichkeit von σ-Umgebungen um den Erwartungswert μ gilt:

$$P(\mu - 1{,}64\sigma \le X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 90\%$$

$$P(\mu - 1{,}96\sigma \le X \le \mu + 1{,}96\sigma) \approx 95\%$$

Tabelle zur Kumulierten Binomialverteilung für $n = 20$, $p = 0{,}65$

k	$p = 0{,}65$
0	0,000
1	0,000
2	0,000
3	0,000
4	0,000
5	0,000
6	0,002
7	0,006
8	0,020
9	0,053
10	0,122
11	0,238
12	0,399
13	0,583
14	0,755
15	0,882
16	0,956
17	0,988
18	0,998
19	1,000
20	1,000

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 3**

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>3a</td><td>Mögliche Erläuterung:
Stufen des Versuchs: $1.$ Person, $2.$ Person, ..., $n-$ te Person
Es gibt zwei mögliche Ausfälle auf jeder Stufe: Es wird eine Abiturientin / ein Abiturient betrachtet, die / der studieren will oder nicht studieren will.
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person gefragt wird, die studieren möchte, ist bei jeder Person gemäß Annahme gleich, sofern der Stichprobenumfang klein ist gegenüber der Grundgesamtheit, wovon man hier ausgehen kann.
X : Anzahl der Studierwilligen unter n befragten Personen.</td><td>1</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>3b</td><td>X siehe oben; $p=0,65$; $n=20$
$P(X=13)\approx 0,184$
$P(X>15)\approx 0,118$
$P(13\le X\le 15)\approx 0,483$
Der Wert von $P(13\le X\le 15)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass 13, 14 oder 15 von 20 befragten Abiturientinnen und Abiturienten des Jahrgangs 2009 studieren wollen.</td><td>5</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>3c</td><td>X, p siehe oben, $n=200$
X ist binomialverteilt mit n und p, also ist $Z=\frac{X+0,5-\mu}{\sigma}$ mit $\mu=130$ und $\sigma\approx 6,745$ näherungsweise normalverteilt, da $\sigma>3$.
(Es sind sowohl Lösungen mit als auch ohne Stetigkeitskorrektur zugelassen.)
$\Phi(z)=0,95 \Rightarrow z\approx 1,64$
$\Phi(z)=0,05 \Rightarrow z\approx -1,64$
(auch möglich: $z\approx 1,645$)
Damit gilt für die 90% -Intervallschätzung (evtl. Erklärung auch über Skizze):
$k_u\ge \mu-0,5-1,645\sigma\approx 118,4\ge k_u-1$
$k_o\le \mu-0,5+1,645\sigma\approx 140,6\le k_o+1$
also $A=\{119; ... ;140\}$
(Anmerkung: Die Grenzen können mit entsprechender Begründung auch um Eins differierend gewählt werden.)
2009 sind also mit 90% iger Wahrscheinlichkeit Ergebnisse zwischen 119 und 140 (jeweils einschließlich) studierwilligen Abiturientinnen und Abiturienten zu erwarten.
Ein Ergebnis von 142 oder mehr studierwilligen Personen des Abiturjahrgangs 2009 tritt bei $p=0,65$ nur mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als 5% ein, wäre also unwahrscheinlich. Daher würde man $p\le 0,65$ auf dem $5\%-$ Niveau ablehnen und annehmen, dass sich die Bruttostudierquote erhöht hat.</td><td>4</td><td>5</td><td></td></tr>
</table>

Lösungsskizze		Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
3d	Für X und n wie oben, $p = 0{,}7$ und entsprechendes Z mit $\mu = 140$ und $\sigma \approx 6{,}481 > 3$ gilt: $k_u = 129 \geq 128{,}8$ und $k_o = 150 \leq 150{,}2$, also $A_{0,7;200} = \{129; \ldots ;150\}$ Für $n = 200$ sind Stichprobenergebnisse zwischen 129 und 140 (jeweils einschließlich) mit beiden Erfolgswahrscheinlichkeiten verträglich. Anmerkung: Die Grenzen der $90\% -$ Umgebungen können um Eins differierend gewählt worden sein, dadurch kann sich ein anderer Durchschnitt ergeben.	3	2	
3e	$\sigma_n = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ Wächst der Stichprobenumfang um den Faktor a, so gilt für das neue $\sigma_{a \cdot n}$: $\sigma_{a \cdot n} = \sqrt{a \cdot n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{a} \cdot \sigma_n$ Dass die Standardabweichung nur um den Faktor $\sqrt{a}$ wächst, wenn der Stichprobenumfang um den Faktor a wächst, bedeutet, dass mit zunehmendem Stichprobenumfang n sich die Ausfälle eines Zufallsversuchs relativ zu n gesehen mehr um den Erwartungswert konzentrieren. Deswegen ist der Überlappungsbereich der beiden $90\% -$ Umgebungen für $n = 200$ noch relativ groß, für $n = 1000$ jedoch leer. (evtl. mit Skizze) Für die rechnerische Begründung gibt es unterschiedliche Lösungswege, z.B.: X, p wie in c), $n = 1000$; Z wie oben mit $\mu = 650$ und $\sigma \approx 15{,}083 > 3$. Dann ist $k_u = 625 \geq 624{,}7$ und $k_o = 674 \leq 674{,}3$, also $A_{0,65;1000} = \{625; \ldots ;674\}$ $n = 1000$: $p = 0{,}7$; $\mu = 700$, $\sigma \approx 14{,}5 > 3$: $k_u = 676 \geq 675{,}66$ und $k_o = 723 \leq 723{,}83$, also $A_{0,7;1000} = \{676; \ldots ;723\}$. (bzw. für $n = 200$ nur k_o und für $n = 1000$ nur k_u berechnen) Damit überlappen sich $A_{0,65;1000}$ und $A_{0,7;1000}$ nicht.		3	2
3f	Da aus $\Phi(z) = 0{,}05$ folgt $z \approx -1{,}645$, muss für die Wahl des Stichprobenumfangs gelten: $\mu - 0{,}5 - 1{,}645\sigma \geq 500$ (evtl. Skizze als Erklärung) $\Rightarrow n \cdot 0{,}7 - 1{,}645\sqrt{n \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3} \geq 500{,}5$ (Rechnungen auch ohne Stetigkeitskorrektur sowie mit $z \approx -1{,}64$ oder mit einer Gleichung statt einer Ungleichung möglich) Umformung der quadratischen Ungleichung mit der Variablen $\sqrt{n}$ ergibt $\sqrt{n} \geq 27{,}28 \Rightarrow n \geq 745$ (evtl $n \geq 744$) Das bedeutet, dass mindestens 745 (744) Abiturientinnen oder Abiturienten befragt werden müssen, um mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95% 500 (oder mehr) Studierwillige unter den Befragten zu haben.		4	1
Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**13**	**17**	**3**

Aufgabe 4 - zum Themenbereich Lineare Algebra und Analytische Geometrie,
Vertiefung Lineare Algebra

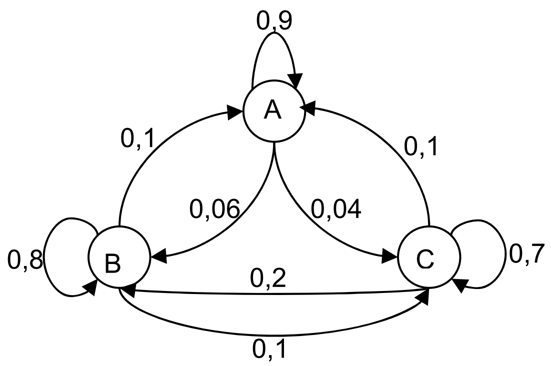
Abibienen

Ein aus den fleißigen Bienen mutierter Insektenstamm, die nachtaktiven „Abibienen", wurde im Jahr 2009 auf der Insel „Bremensia" über einen längeren Zeitraum von Abibienenforschern beobachtet:

Die 1200 Abibienen verteilten sich jeden Morgen gegen acht Uhr auf einen ihrer drei Erholungsplätze, genannt A, B, C.

Um das tägliche Wanderverhalten der Abibienen zwischen den drei Erholungsplätzen zu erforschen, fingen die Forscher alle 1200 Abibienen ein und versahen je ein Drittel von ihnen mit einer eindeutigen Markierung für jeweils einen der drei Plätze A, B oder C.

Am Morgen des $0.$ Tages ihrer Untersuchung setzten die Forscher je 400 Abibienen an den drei Erholungsplätzen entsprechend ihrer Markierungen aus. Nun zählten die Forscher am folgenden Morgen ($1.$ Tag), wie viele Abibienen zu ihrem Erholungsplatz zurückgekehrt und wie viele einen anderen Erholungsplatz aufgesucht hatten. Ihre Ergebnisse fassten sie im nebenstehenden Übergangsdiagramm zusammen.



Erstaunlicherweise fanden die Abibienenforscher auch an den weiteren Tagen das Übergangsdiagramm bestätigt. Gehen Sie daher im Folgenden davon aus, dass sich die Abibienen täglich entsprechend dem Übergangsdiagramm auf die drei Erholungsplätze verteilen.

a) Berechnen Sie anhand des Übergangsdiagramms, wie viele Abibienen am $1.$Tag am Platz C gezählt wurden.

Vervollständigen Sie die Matrix $U = \begin{pmatrix} 0,70 & 0,04 & 0,10 \\ 0,10 & ... & ... \\ 0,20 & ... & ... \end{pmatrix}$ zu einer zum Übergangsdiagramm gehörigen Übergangsmatrix.

Erläutern Sie die Bedeutung der Werte in der ersten Zeile von U für das Verhalten der Abibienen.

Verwenden Sie im folgenden die Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,10 \\ 0,06 & 0,80 & 0,20 \\ 0,04 & 0,10 & 0,70 \end{pmatrix}$, die ebenfalls das Wanderverhalten beschreibt.

b) Berechnen Sie die Verteilung $\vec{v}_1 = M * \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{pmatrix}$.

Interpretieren Sie die Komponenten des Vektors.

c) Bei ihren Untersuchungen in 2009 zählten die Forscher, bevor sie ihren oben beschriebenen Eingriff starteten, an jedem Morgen stets
600 der Tiere an Platz A, 390 an Platz B und die restlichen 210 an Platz C.
Zeigen Sie, dass diese Verteilung die einzige stationäre Abibienenverteilung der Matrix M ist.

d) $M^{31} \approx \begin{pmatrix} 0,500 & 0,500 & 0,500 \\ 0,325 & 0,325 & 0,325 \\ 0,175 & 0,175 & 0,175 \end{pmatrix}$ ist die Übergangsmatrix für einen Zeitraum von 31 Tagen auf drei Nachkommastellen genau. Berechnen Sie die zugehörige Abibienenverteilung $\vec{v}_{31}$.

Berechnen Sie M^{62} ebenfalls auf drei Nachkommastellen genau.

Gehen Sie davon aus, dass $G = \lim\limits_{n\to\infty} M^n$ existiert.

Berechnen Sie die exakten Werte für die Komponenten von G ohne Verwendung von Matrixpotenzen. Begründen Sie Ihr Vorgehen und das spezielle Aussehen dieser Matrix.

e) Erläutern Sie den Begriff „inverse Matrix" und erklären Sie, wozu die inverse Matrix von M in diesem Sachzusammenhang verwendet werden kann.

Die Forscher merkten, dass nächtliche Stürme das Wanderverhalten der Abibienen kurzfristig beeinflussen. Ein paar Tage nach einem solchen Sturm fanden sie die folgende Verteilung vor:
80 Tiere waren am Platz A, 637 am Platz B und die restlichen 483 am Platz C.
Verwenden Sie die auf eine Nachkommastelle gerundete, zu M inverse Matrix
$M^{-1} \approx \begin{pmatrix} 1,1 & -0,1 & -0,1 \\ -0,1 & 1,3 & -0,4 \\ -0,1 & -0,2 & 1,5 \end{pmatrix}$, um begründet nachzuweisen, dass das Wanderverhalten der Abibienen noch nicht wieder der Übergangsmatrix M entsprochen haben kann.

f) Nach einem heftigen Wirbelsturm im April 2009 verschlug es nicht nur viele der Abibienen auf andere Inseln, so dass der Stamm auf 900 zusammenschrumpfte, sondern es wurde auch der Erholungsplatz C zerstört. Die Abibienenforscher vermuteten bald darauf, dass die Übergangsmatrix $U = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix}$ das neue Wanderverhalten beschreibt.

Zeigen Sie, dass aus $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = U * \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ folgt: $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,2x_{n-1} + 360 \\ -0,2y_{n-1} + 720 \end{pmatrix}$.
Beweisen Sie, dass eine Grenzverteilung existiert und berechnen Sie diese.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 4**

<table>
<tr><th rowspan="2" colspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>4a</td><td>Aus dem Übergangsdiagramm ergibt sich gemäß der Prozente, die an den bei C ankommenden Pfeilen stehen, die Anzahl für
C: $0,04 \cdot 400 + 0,1 \cdot 400 + 0,7 \cdot 400 = 336$

$$U = \begin{pmatrix} 0,70 & 0,04 & 0,10 \\ 0,10 & 0,90 & 0,10 \\ 0,20 & 0,06 & 0,80 \end{pmatrix}.$$
Mögliche Erläuterung:
In der ersten Zeile stehen die Wahrscheinlichkeiten, mit der eine Abibiene sich für C entscheidet, wenn sie den vorigen Tag am Platz C, A bzw. B (Reihenfolge der Spalten) verbracht hat.</td><td>4</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>4b</td><td>$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,10 \\ 0,06 & 0,80 & 0,20 \\ 0,04 & 0,10 & 0,70 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 360+40+40 \\ 24+320+80 \\ 16+40+280 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 440 \\ 424 \\ 336 \end{pmatrix}$$, am $1.$ Tag finden sich 440 Abibienen am Platz A, 424 am Platz B und 336 am Platz C ein (Reihenfolge durch die Matrix festgelegt).</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4c</td><td>Der Nachweis: $M * \vec{v}_s = \vec{v}_s$ und Summe der Komponenten gleich 1200 für
$$\vec{v}_s = \begin{pmatrix} 600 \\ 390 \\ 210 \end{pmatrix}$$ reicht nicht. Es bleibt zu zeigen, dass es keine zweite Verteilung gibt,

z. B. über das LGS zu $M * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $x + y + z = 1200$:
$$\begin{bmatrix} -0,1x + 0,1y + 0,1z = 0 \\ 0,06x - 0,2y + 0,2z = 0 \\ 0,04x + 0,1y - 0,3z = 0 \\ 1x + 1y + 1z = 1200 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1x + 1y + 1z = 1200 \\ 2y + 2z = 1200 \\ 26y - 14z = 7200 \\ -6y + 34z = 4800 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1x + 1y + 1z = 1200 \\ 1y + 1z = 600 \\ -40z = -8400 \\ +40z = 8400 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1x + 1y = 990 \\ 1y = 390 \\ 1z = 210 \\ 0 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1x = 600 \\ 1y = 390 \\ 1z = 210 \\ 0 = 0 \end{bmatrix}$$
die Lösung ist somit eindeutig.</td><td>2</td><td>4</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2" colspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>4d</td><td>

$$\vec{v}_{31} = M^{31} * \vec{v}_0 \approx \begin{pmatrix} 0{,}500 & 0{,}500 & 0{,}500 \\ 0{,}325 & 0{,}325 & 0{,}325 \\ 0{,}175 & 0{,}175 & 0{,}175 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 200 \\ 3 \cdot 130 \\ 3 \cdot 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 390 \\ 210 \end{pmatrix},$$

$$M^{62} = (M^{31})^2 \approx \begin{pmatrix} 0{,}500 & 0{,}500 & 0{,}500 \\ 0{,}325 & 0{,}325 & 0{,}325 \\ 0{,}175 & 0{,}175 & 0{,}175 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0{,}500 & 0{,}500 & 0{,}500 \\ 0{,}325 & 0{,}325 & 0{,}325 \\ 0{,}175 & 0{,}175 & 0{,}175 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}500 \cdot 1 & 0{,}500 & 0{,}500 \\ 0{,}325 \cdot 1 & 0{,}325 & 0{,}325 \\ 0{,}175 \cdot 1 & 0{,}175 & 0{,}175 \end{pmatrix},$$

da die Summe jeder Spalte 1 ergibt und der Wert der Zeile ausgeklammert werden kann.

Ist G eine Grenzmatrix, so gilt für jede Verteilung $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ der 1200 Abibienen,

dass sie durch G auf die stationäre Verteilung abgebildet wird:

$G * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 390 \\ 210 \end{pmatrix}$, wenn $x + y + z = 1200$.

In jeder Zeile einer Grenzmatrix G muss dreimal der gleiche Wert stehen, nämlich der Anteil, auf den sich die Abibienen am jeweiligen Erholungsplatz langfristig einpendeln, daher lassen sich die Komponenten explizit aus der Grenzverteilung berechnen:

$g_1 = \frac{600}{1200} = \frac{1}{2};\ g_2 = \frac{390}{1200} = \frac{13}{40};\ g_3 = \frac{210}{1200} = \frac{7}{40}$, der Index steht für die

entsprechende Zeile. $G = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{13}{40} & \frac{13}{40} & \frac{13}{40} \\ \frac{7}{40} & \frac{7}{40} & \frac{7}{40} \end{pmatrix}$

</td><td>2</td><td>4</td><td>2</td></tr>
<tr><td>4e</td><td>

Eine quadratische Matrix M hat eine inverse Matrix M^{-1}, wenn gilt:
$M * M^{-1} = M^{-1} * M = E$. Mit der inversen Matrix kann zu einer Verteilung eines bestimmten Tages die Verteilung des Vortages bestimmt werden. $\vec{v}_{n-1} = M^{-1} * \vec{v}_n$:

$$\begin{pmatrix} 1{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 1{,}3 & -0{,}4 \\ -0{,}1 & -0{,}2 & 1{,}5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 80 \\ 637 \\ 483 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 88 - 63{,}7 - 48{,}3 \\ 626{,}9 \\ 589{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ ... \\ ... \end{pmatrix}.$$

Da am Vortag die Anzahl der Abibienen am Platz A unter dieser Annahme bereits negativ gewesen wäre, ist es nicht möglich, dass das Wanderverhalten zu dem Zeitpunkt der Übergangsmatrix M entspricht.

Sollte M^{-1} mit dem Taschenrechner ermittelt und so verwendet werden, so ergibt sich $\vec{v}_{Vortag} = \begin{pmatrix} -50 \\ 650 \\ 600 \end{pmatrix}$

</td><td></td><td>3</td><td>1</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>4f</td><td>

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = U * \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2x_{n-1} + 0,4y_{n-1} \\ 0,8x_{n-1} + 0,6y_{n-1} \end{pmatrix}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $x_n + y_n = 900$, die Anzahl der Abibienen bleibt unverändert, daher folgt

1. $x_n = 0,2x_{n-1} + 0,4y_{n-1} = 0,2x_{n-1} + 0,4 \cdot (900 - x_{n-1}) = -0,2x_{n-1} + 360$ und
2. $y_n = 0,8x_{n-1} + 0,6y_{n-1} = 0,8 \cdot (900 - y_{n-1}) + 0,6y_{n-1} = -0,2y_{n-1} + 720$ für $n \ge 1$.

- Entweder Lösungsansatz über Iterationsfolgen:

  In beiden Fällen handelt es sich um eine Iterationsfolge an einer linearen Funktion mit einer Steigung betragsmäßig kleiner 1: $|-0,2| < 1$, daher konvergieren beide Folgen gegen den Fixpunkt der jeweiligen Iterationsfunktion, also gegen $x^* = 300$ bzw. $y^* = 600$.

- oder Lösungsansatz über geometrische Reihen:

$$x_n = -0,2x_{n-1} + 360 = -0,2(-0,2x_{n-2} + 360) + 360 = \dots$$

$$= (-0,2)^n \cdot x_0 + 360 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (-0,2)^k = (-0,2)^n \cdot x_0 + 360 \cdot \frac{1 - (-0,2)^n}{1,2},$$

daher gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 300$.

Da $y_n = 900 - x_n$, folgt $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = \lim\limits_{n \to \infty} (900 - x_n) = 900 - \lim\limits_{n \to \infty} x_n = 600$,

oder analog zu x_n

$$y_n = (-0,2)y_{n-1} + 720 = \dots$$

$$= (-0,2)^n \cdot y_0 + 720 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (-0,2)^k = (-0,2)^n \cdot y_0 + 720 \cdot \frac{1 - (-0,2)^n}{1,2}$$

daher gilt $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = 600$.

Also ergibt sich als Grenzverteilung: $\lim\limits_{n \to \infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 600 \end{pmatrix}$.

</td><td>2</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>13</td><td>17</td><td>3</td></tr>
</table>

Aufgabe 5 - zum Themenbereich Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Vertiefung Analytische Geometrie

Camping-Zelt

Eine kleine Gruppe junger Leute unternimmt eine Campingreise und schlägt gegen Abend ihr Zelt auf. Der Untergrund ist eben, aber leicht abschüssig am Hang eines Hügels gelegen. Denkt man sich ein Koordinatensystem ungefähr durch die Mitte des Zeltes gelegt, so kann man die Ecken der Grundfläche mit den Punkten $A(0|-3|0)$, $B(2|1|0)$, $C(0|2|0{,}25)$ und $D(-2|-2|0{,}25)$ angeben (vgl. die Zeichnung auf der nächsten Seite). Eine Längeneinheit entspricht dabei einem Meter.

a) Zeigen Sie, dass die Grundfläche $ABCD$ des Zeltes ein Rechteck bildet.
Berechnen Sie die Länge und Breite des Zeltbodens.

b) Die Ebene E, die die Punkte A, B und C enthält, stellt den Hang des Hügels dar.
Bestimmen Sie eine Ebenengleichung in Koordinatenform für die Ebene E.
Begründen Sie, dass auch Punkt D in dieser Ebene liegt.

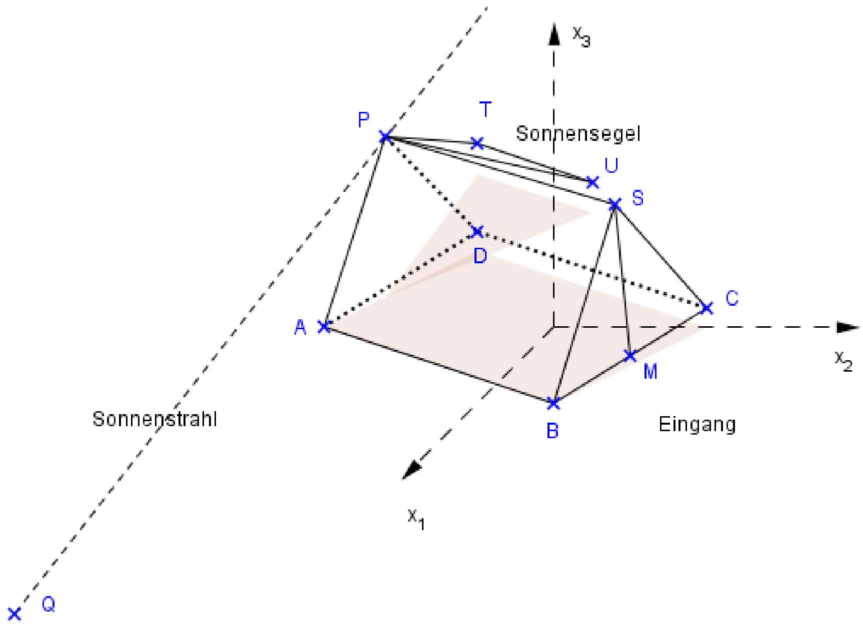
Verwenden Sie in den folgenden Aufgabenteilen für die Ebene E die Gleichung $E: 2x_1 - x_2 + 20x_3 = 3$.

c) Ermitteln Sie den Winkel zwischen der Ebene E und der horizontalen Ebene, um eine Vorstellung von der Neigung des Hanges zu erhalten.

d) Auf der Grundseite $\overline{BC}$ steht die Dreiecksfläche mit dem Eingang des Zeltes und bildet mit seiner Spitze S das Dreieck BCS. Gehalten wird diese Spitze von einer Zeltstange, die genau auf der Mitte M der Strecke $\overline{BC}$ und senkrecht zur Grundfläche des Zeltes steht, also senkrecht zur Ebene E. Die Zeltstange ist genau $2m$ lang.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes S (Runden Sie auf 1 Nachkommastelle).

e) Die dem Eingang gegenüberliegende Seite des Zeltes ist ein Dreieck ADP mit der Spitze $P(-0{,}8|-2{,}6|2{,}1)$. Die Strahlen der tief stehenden Sonne haben die Richtung $\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und werfen einen Schatten des Zeltes auf den schrägen Hang. Der Schatten der Spitze P fällt dabei auf den Punkt Q der Hangebene E.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q (Runden Sie auf 1 Nachkommastelle).

f) Ein dreieckiges Sonnensegel wird an der Spitze $P(-0{,}8|-2{,}6|2{,}1)$ und am Boden an den Punkten $T(-4|-3|0{,}4)$ und $U(-3|-1|0{,}4)$ befestigt.
Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche des Sonnensegels in m^2.


x3
P
T
Sonnensegel
U
S
D
C
A
x2
M
Sonnenstrahl
B
Eingang
x1
Q

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 5**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
5a	Zu zeigen ist z.B. die Parallelogramm-Eigenschaft. Es gilt: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, da $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}0\\2\\0,25\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\-2\\0,25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$ Es bleibt nachzuweisen, dass einer der Innenwinkel orthogonal ist. $\overrightarrow{AB}*\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}-2\\1\\0,25\end{pmatrix}=0$. Wegen $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{20}\approx 4,47$ und $\left\|\overrightarrow{AD}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}-2\\1\\0,25\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{5\frac{1}{16}}=2,25$ ist das Zelt ca. $4,47m$ lang und $2,25m$ breit.	3	3	
5b	Ein Normalenvektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$ der Ebene E steht senkrecht auf $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$: $\vec{n}*\overrightarrow{AB}=2n_1+4n_2=0$ und $\vec{n}*\overrightarrow{AC}=5n_2+0,25n_3=0$ Ein möglicher Normalenvektor ist $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-1\\20\end{pmatrix}$. Alternativen (z.B. Vektorprodukt, Weg über Parameterdarstellung) sind möglich. Einsetzen der Koordinaten eines Punktes in den Ansatz $2x_1-x_2+20x_3=d$ liefert die Ebene $E: 2x_1-x_2+20x_3=3$. Da $ABCD$ ein Rechteck ist, liegt D in der Ebene E .	2	3	
5c	Schnittwinkelberechnung mittels Normalenvektoren der Ebenen: $\cos(\alpha)=\dfrac{\left\|\begin{pmatrix}2\\-1\\20\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix}2\\-1\\20\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|}=\dfrac{20}{\sqrt{405}}\approx 0{,}9938,\ \alpha\approx 6,4^\circ$.	2	2	

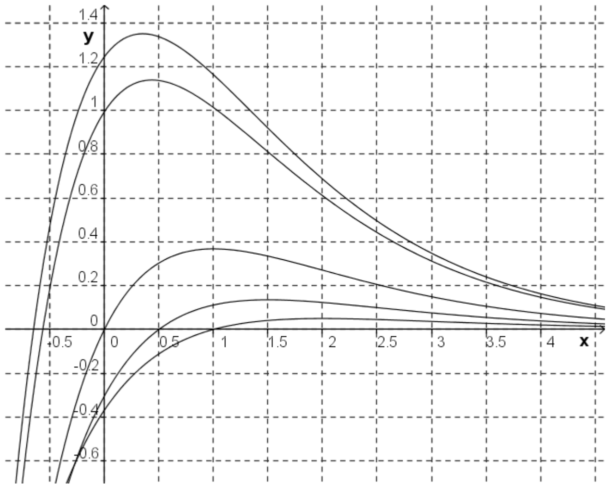
	Lösungsskizze	Bewertung I	II	III
5d	Sei M der Mittelpunkt von $\overrightarrow{BC}$. Normierung mit anschließender Verdoppelung des Normalenvektors führt zu $\overrightarrow{MS} = 2\cdot\frac{\begin{pmatrix}2\\-1\\20\end{pmatrix}}{\left\lvert\begin{pmatrix}2\\-1\\20\end{pmatrix}\right\rvert} = \frac{2}{\sqrt{405}}\begin{pmatrix}2\\-1\\20\end{pmatrix}$. Die Zeltspitze S erfüllt dann $\vec{s} = \frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)+\overrightarrow{MS} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\3\\0,25\end{pmatrix}+\frac{2}{\sqrt{405}}\begin{pmatrix}2\\-1\\20\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}1,2\\1,4\\2,1\end{pmatrix}$, also $S(1,2\,\vert\,1,4\,\vert\,2,1)$.	2	3	2
5e	Q errechnet sich als Schnittpunkt der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-0,8\\-2,6\\2,1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}5\\-1\\-2\end{pmatrix}\quad;\quad s\in\mathbb{R}$ mit der Ebene E: $2\left(-0,8+5s\right)-\left(-2,6-s\right)+20\left(2,1-2s\right)=3$ ergibt $s=\frac{40}{29}$ und $\vec{q} = \begin{pmatrix}-0,8\\-2,6\\2,1\end{pmatrix}+\frac{40}{29}\begin{pmatrix}5\\-1\\-2\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}6,1\\-4\\-0,7\end{pmatrix}$, also $Q(6,1\,\vert\,-4\,\vert\,-0,7)$.	2	3	
5f	Es bietet sich zum Beispiel eine Lösung mit Hilfe des Vektorproduktes an: $A = \frac{1}{2}\left\lvert\overrightarrow{UP}\times\overrightarrow{UT}\right\rvert = \frac{1}{2}\left\lvert\begin{pmatrix}2,2\\-1,6\\1,7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}\right\rvert = \frac{1}{2}\left\lvert\begin{pmatrix}3,4\\-1,7\\-6\end{pmatrix}\right\rvert = \frac{1}{2}\sqrt{50,45} \approx 3,55$ Das Segel besitzt einen Flächeninhalt von $3,55m^2$.	2	3	1
Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**13**	**17**	**3**

Aufgabe 6 - zum Themenbereich Analysis

Funktionsuntersuchung

Gegeben sind die

- Funktionen f_k für $k \in \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = (x-k)e^{-x-k}$, $x \in \mathbb{R}$,
- die Funktionsgleichungen ihrer ersten Ableitungsfunktionen $f_k'(x) = -(x-k-1) \cdot e^{-x-k}$,
- fünf Graphen für verschiedene k .



a) Markieren Sie in obiger Zeichnung den Graphen, der zu der Funktion f_1 gehört. Begründen Sie Ihre Wahl.

b) Zeigen Sie, dass alle Funktionen f_k Extrempunkte besitzen, indem Sie diese bestimmen.
Geben Sie die Gleichung der Funktion g an, auf deren Graph diese Extrempunkte liegen.
Skizzieren Sie den Graphen der Funktion g in das gegebene Koordinatensystem.

c) Gegeben ist eine Funktion t mit $t(x) = -x \cdot e^2 + 2e^2$. Zeigen Sie, dass für ein bestimmtes k die Funktion t eine Wendetangente von f_k beschreibt, indem Sie dieses k berechnen.

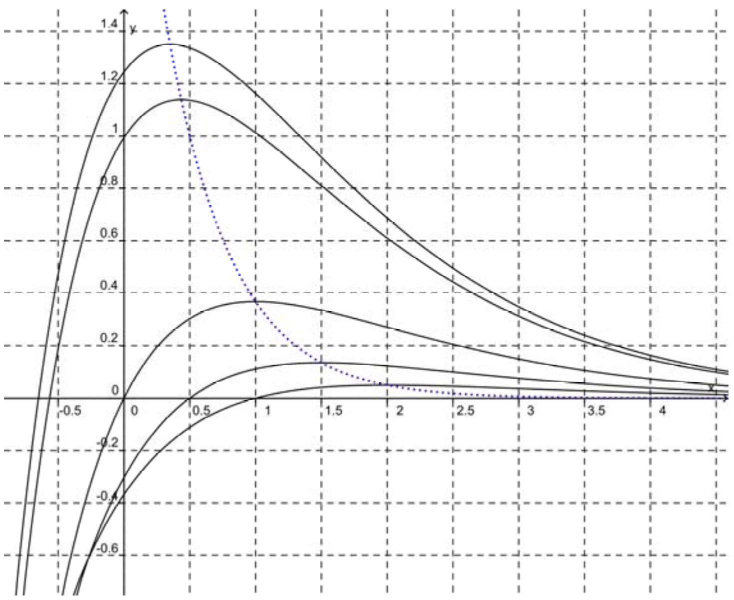
d) Zeigen Sie, dass jeder Graph der Funktionenschar genau eine Nullstelle x_N besitzt.
Berechnen Sie $\lim\limits_{b \to \infty} \int_{x_N}^{b} f_k(x)dx$ für die jeweilige Nullstelle x_N und erläutern Sie die geometrische Bedeutung dieses Wertes anhand der obigen Zeichnung.

Die Graphen der Funktionen f_k sind für $x \geq 0$ gut geeignet, die momentane Änderungsrate der Wassertemperatur in einem Schwimmbad darzustellen (x in *Stunden* gemessen). Ausgehend von einer Ausgangstemperatur zum Zeitpunkt $x = 0$ werden die momentanen Änderungsraten in °*Celsius/Stunde* in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt.

e) Erläutern Sie, wie sich für die Funktion f_k , deren Graph bei $x_N = 1$ eine Nullstelle besitzt, die Temperatur des Wassers im Zeitraum von $x = 0$ bis $x = 4$ entwickelt. Gehen Sie dabei auf die Bedeutung der Nullstelle und des Maximums des gegebenen Graphen ein.

f) Bestimmen Sie das k , für welches nach „unendlich" langer Zeit wieder die Ausgangstemperatur erreicht wird.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 6**

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>6a</td><td>Markierung des Graphen f_1 mit Nullstelle bei $x=1$ bzw. dem $y-$Achsenabschnitt bei $S(0|-0,37)$. Eine Eigenschaft reicht als Begründung.</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6b</td><td>Höchstens Nullstellen der 1. Ableitung können Extremstellen sein:
$f_k'(x)=0 \Leftrightarrow x-k-1=0 \quad \Leftrightarrow x=k+1$
$x_E=k+1$ ist für jedes f_k eine mögliche Extremstelle.
Überprüfung entweder mit
- Vorzeichenwechselkriterium:
$f_k'(x)=-\frac{x-(k+1)}{e^{x+k}}$,
Aus $x<k+1 \Rightarrow x-(k+1)<0$ folgt somit $f_k'(x)>0$ und
aus $x>k+1 \Rightarrow x-(k+1)>0$ folgt somit $f_k'(x)<0$
oder mit
- Wert der 2. Ableitung an $x_E=k+1$:
$f_k''(x)=(x-k-2)e^{-x-k}$, $f_k''(k+1)=-e^{-2k-1}<0$
liefert den Nachweis, dass immer ein Hochpunkt existiert.
$f_k(k+1)=e^{-2k-1}=e^{-2(k+1)+1}$, daher ergibt sich die Ortskurve der Punke $\left(k+1 \middle| f_k(k+1)\right)$ als Graph von g mit $g(x)=e^{1-2x}$.
</td><td>3</td><td>5</td><td></td></tr>
</table>

Lösungsskizze		Bewertung		
		I	**II**	**III**
6c	k und x_W müssen so bestimmt werden, dass 1. $f_k''(x_W)=0$ (a) und x_W tatsächlich Wendestelle ist (b), 2. Steigung des Graphen muss der Steigung der Tangente entsprechen: $f_k'(x_W)=t'(x_W)=-e^2$ 3. Der Wendepunkt ist auch Punkt der Tangente: $f_k(x_W)=t(x_W)$ Die Gültigkeit aller drei Eigenschaften muss nachgewiesen werden, die Reihenfolge ist egal, in der gegebenen ist es am einfachsten: 1.(a)Mögliche Wendestellen als Nullstellen der 2. Ableitung: $f_k''(x)=\left(x-k-2\right)e^{-x-k}$, $f_k''(x)=0 \Leftrightarrow x=k+2$, d.h. alle Funktionen können höchstens bei $x_w=k+2$ eine Wendestelle besitzen. 2. $f_k'\left(x_W\right)=t'(x)$: $f'(k+2)=-(k+2-k-1)\cdot e^{-k-2-k}=-e^{-2(k+1)}$ $-e^{-2(k+1)}=-e^2 \Leftrightarrow e^{-2k}=e^4 \Leftrightarrow k=-2$ und somit $x_w=0$. 3. $f_{-2}(0)=t(0)$, da $f_{-2}(x)=(x+2)\cdot e^{2-x}$, $f_{-2}(0)=2e^2$ und $t(0)=2e^2$ 1.(b) $f_{-2}''(x)=xe^{-x+2}$, $f_{-2}'''(x)=(-x+1)\cdot e^{-x+2}$, $f_{-2}'''(0)=e^2\neq 0$ Damit ist t eine Wendetangente des Graphen von f_{-2}.	3	5	2
6d	Nullstellen von f_k: $f_k(x)=0 \Leftrightarrow x-k=0 \Leftrightarrow x=k$, damit ist $x_N=k$ die einzige Nullstelle von f_k. Stammfunktion: $F_k(x)=(-x+k-1)\cdot e^{-x-k}$, da $F_k'(x)=(-1+x-k+1)\cdot e^{-x-k}=f_k(x)$ $\lim\limits_{b\to\infty}\int_k^b f_k(x)dx=\lim\limits_{b\to\infty}\left(F_k(b)-F_k(k)\right)=e^{-2k}$ Es handelt sich um die zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion f_k nach rechts ins Unendliche reichende Fläche oder mit Schraffur der Fläche für ein Beispiel.	2	4	
6e	Bis zur Nullstelle $x_N=1$ nimmt die Temperatur erst stärker und dann weniger stark ab. Die Temperatur hat bei $x_N=1$ ihren niedrigsten Wert, anschließend steigt die Temperatur. Beim Hochpunkt ist der Anstieg der Temperatur am größten.	2	2	
6f	Damit die Bedingung erfüllt ist, muss die Temperatur um den gleichen Wert, den sie ansteigt anschließend wieder fallen (wie im Beispiel von g) oder umgekehrt (dafür liegt aber kein Beispiel vor), dabei muss für einen beliebigen Zeitpunkt $a>0$ gelten (man kann auch die Nullstelle $k>0$ nehmen): $\left\lvert\int_0^a f_k(x)dx\right\rvert=\left\lvert\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f_k(x)dx\right\rvert$ $F_k(x)=-\frac{\left(x-k+1\right)}{e^{x+k}}$ $0=\int_0^a f_k(x)dx+\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f_k(x)dx=\left(-\frac{\left(a-k+1\right)}{e^{a+k}}+\frac{\left(-k+1\right)}{e^k}\right)+\left(0+\frac{\left(a-k+1\right)}{e^{a+k}}\right)$ oder $0=\lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b f_k(x)dx \quad \Rightarrow k=1$ Für $k=1$ entspricht die Temperaturdifferenz von $x=0$ bis zur Nullstelle der Temperaturdifferenz, die sich als Grenzwert von der Nullstelle bis Unendlich ergibt.	1	1	1
Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**13**	**17**	**3**

Protokollbogen zur Auswahl der Aufgaben für die Prüfungsakten der Schule

Auswahl der Aufgaben:

- Fach: **Mathematik**
- Schule: ____
- Schulinterne Kursbezeichnung: ______________________________
- **Fachlehrerin / Fachlehrer** (Name, Vorname):

  ____

  Ich wähle für die Bearbeitung durch die Prüflinge die 3 Aufgaben Nr. __________ aus.

  Bremen / Bremerhaven, den 21.4.2009

  ____
  (Unterschrift Fachlehrerin / Fachlehrer)

- **Korreferentin / Korreferent** (Name, Vorname):

  ____

  Ich schließe mich der Auswahl an / nicht an (bitte Unzutreffendes streichen). Im Falle der Nichtzustimmung füge ich eine kurze schriftliche Begründung auf der Rückseite des Protokolls bei.

  Bremen / Bremerhaven, den 21.4.2009

  ____
  (Unterschrift Korreferentin / Korreferent)

- **Auswahl durch die Vorsitzende / den Vorsitzenden des Fachprüfungsausschusses** (im Falle der Nichtübereinstimmung zwischen Fachprüferin/Fachprüfer und Korreferentin / Korreferenten)

  Ich wähle die 3 Aufgaben Nr. __________ zur Bearbeitung durch die Prüflinge aus und füge eine kurze schriftliche Begründung auf der Rückseite des Protokolls bei.

  Bremen / Bremerhaven, den 21.4.2009

  ____
  (Unterschrift Vorsitzende(r) Fachprüfungsausschuss)

Rückmeldebogen für die Zentralabiturkommission Mathematik zur Auswahl der Aufgaben

Auswahl der Aufgaben:

- Fach: **Mathematik LK** (TR)
- Schule: ______________________________
- Schulinterne Kursbezeichnung: ______________________________
- Anzahl der Schülerinnen und Schüler: ______________________________
- Der Fachprüfungsausschuss hat für die Bearbeitung durch die Prüflinge die drei Aufgaben

  Nr. ________ , ________ und ________ ausgewählt.

Bremen / Bremerhaven, den 21.4.2009

____
(Unterschrift)

Schicken Sie diesen Bogen bitte möglichst umgehend per FAX an folgende Adresse:

Landesinstitut für Schule, Herrn Löwer

FAX 0421-361-6451

Die Rückmeldebögen werden im LIS gesammelt und den Zentralabiturkommissionen zur Verfügung gestellt. Sie sind eine Grundlage für die Auswertungsgespräche mit den Schulen und die Erstellung neuer Aufgaben.