Die Senatorin
für Bildung und Wissenschaft

Freie
Hansestadt
Bremen

Schriftliche Abiturprüfung 2008

Leistungskurs Mathematik (TR)

Mai 2008, 9.00 Uhr

Unterlagen für Lehrerinnen und Lehrer

- Diese Unterlagen sind nicht für die Prüflinge bestimmt -

Diese Unterlagen enthalten …

- Allgemeines,
- die Bewertung der Prüfungsleistung,
- Aufgaben mit Lösungsskizzen,
- einen Protokollbogen zur Auswahl der Aufgaben für die Prüfungsakten Ihrer Schule,
- einen Rückmeldebogen für die Zentralabiturkommission zur Auswahl der Aufgaben.

Allgemeines

- Wählen Sie gemeinsam mit Ihrer Korreferentin / Ihrem Korreferenten aus den sechs vorgelegten Aufgaben drei zur Bearbeitung aus. Die Aufgaben kommen aus mindestens zwei verschiedenen Themenbereichen, mindestens eine der Aufgaben ist aus dem Themenbereich Analysis. Kommt es zu keiner Einigung, bestimmt die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses die Auswahl der Aufgaben (§ 10 Abs. 2 Nr. 1 AP-V). Protokollieren Sie auf dem beigefügten Protokollformular, welche Aufgaben Sie gewählt haben (Prüferin/Prüfer und Korreferentin/Korreferent und ggf. auch die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses unterschreiben das Protokoll).
- Füllen Sie bitte für die Zentralabiturkommission Mathematik den beigefügten Rückmeldebogen zur Auswahl der Aufgaben aus und schicken ihn an die dort genannte Adresse.
- Fragen Sie vor Verteilung der Aufgaben nach der Arbeitsfähigkeit der Prüflinge und weisen Sie diese auf die Regelungen des § 5 AP-V (Täuschung und Behinderung) hin.
- Machen Sie die Prüflinge auf die Arbeitshinweise aufmerksam, die am Anfang der Unterlagen für die Prüfungsteilnehmer stehen. Geben Sie ihnen ggf. die nötigen Angaben zur Schulnummer sowie zur genauen Kursbezeichnung.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 240 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: Nicht programmierbarer wissenschaftlicher Taschenrechner, Formelsammlung, Zeichengerät, Rechtschreiblexikon

Die Bewertung der Prüfungsleistung

Die Lösungsskizze stellt eine Lösungsvariante dar; andere gleichwertige Lösungen sind entsprechend zu bewerten. Die Bewertungsanteile pro Teilaufgabe sind obligatorisch.

Für die Festlegung der Gesamtleistung werden den erzielten Bewertungseinheiten die entsprechenden Notenstufen gemäß folgender Tabelle zugeordnet.

Bewertungs-einheiten	KMK Punkte
bis 19,5	0
20 bis 26,5	1
27 bis 33,5	2
34 bis 39,5	3
40 bis 44,5	4
45 bis 49	5
49,5 bis 54	6
54,5 bis 59	7
59,5 bis 64	8
64,5 bis 69	9
69,5 bis 74	10
74,5 bis 79	11
79,5 bis 84	12
84,5 bis 89	13
89,5 bis 94	14
94,5 bis 99	15

Aufgabe 1 - zum Themenbereich Analysis

Windenergie

Seit Beginn der 90er Jahre erlebte Deutschland einen Boom im Bereich der Nutzung der Windenergie zur Stromerzeugung. Durch den Bau neuer Anlagen wird jährlich ein Zuwachs der jeweils am Jahresende insgesamt installierten Leistung aller Windenergieanlagen erreicht.[1]

a) Im Jahr 1994 betrug der *Zuwachs* der Leistung der Windenergieanlagen noch 300 Megawatt pro Jahr (MW/Jahr), bis 2002 steigerte er sich jährlich durchschnittlich um ca. 34%.
Angesetzt wird eine Funktionsvorschrift $f(t)$ für den jährlichen Zuwachs der Leistung der Windenergieanlagen im t-ten Jahr nach 1994.
Begründen Sie, dass die Funktion f mit der Gleichung $f(t) = 300e^{0,293 \cdot t}$, t in Jahren ($t = 0$ entspricht Ende 1994) und $f(t)$ in MW pro Jahr zu den gegebenen Daten passt.
Erläutern Sie die zu Grunde liegenden Annahmen und die Grenzen der Modellierung.

Verwenden Sie für b) und c) die Modellierung aus a)

b) Skizzieren Sie mit Hilfe der folgenden Ergebnisse den Graphen von f mit $f(t)$ im Bereich $0 \le t \le 14$.

- Bestimmen Sie den Zuwachs für 2008.
- Berechnen Sie die Zeit, in der sich der Zuwachs verdoppelt.
- Erläutern Sie, was in diesem Zusammenhang der Wert von $2^4 \cdot 300$ angibt und berechnen Sie diesen Wert sowie den zugehörigen Zeitpunkt t.

Vergessen Sie nicht, den Graphen jetzt zu skizzieren.

c) Gegeben ist die Funktion L mit $L(x) = \int_0^x f(t)dt$.
Geben Sie eine Stammfunktion von f an und berechnen Sie $L(5)$.
Zeichnen Sie $L(5)$ in den Graphen aus b) ein.
Es ist bekannt, dass bis Ende 1994 Windenergieanlagen mit einer Gesamtleistung von 650 MW errichtet wurden. Geben Sie einen Funktionsterm $G(x)$ an, der die Gesamtleistung der Windenergieanlagen in Deutschland zum Zeitpunkt x näherungsweise vorhersagen kann, wenn sich die Bedingungen nicht ändern. $x = 0$ soll dabei für Ende 1994 stehen.

d) Da absehbar ist, dass der Boom im Bereich der Windenergie nicht unbegrenzt weitergeht, wurde für Prognosezwecke folgende Funktionsvorschrift $w(t)$ für die gesamte jeweils zum Zeitpunkt t vorhandene Leistung aller Windenergieanlagen aufgestellt (sie erfasst die bisherigen Gesamtleistungen jeweils am Jahresende hinreichend gut):
$w(t) = \frac{29000}{1 + 43,6e^{-0,421t}}$, t in Jahren ($t = 0$ entspricht Ende 1994), $w(t)$ in MW.
Ermitteln Sie das Jahr, in dem nach dieser Modellierung eine Gesamtleistung von 28000 MW erreicht wird.

e) Geben Sie $w'(t)$ an und bestimmen Sie $w'(14,5)$.
Interpretieren Sie $w'(14,5)$ in Bezug auf die Prognose.

f) Bestimmen Sie $\lim_{t \to \infty} w(t)$, $w(0)$ und $w(8,967)$ und skizzieren Sie den Graphen von $w(t)$ für $t > 0$.
Berücksichtigen Sie dabei, dass $w''(8,967) = 0$ und $w'''(8,967) \neq 0$.
Interpretieren Sie $\lim_{t \to \infty} w(t)$ und $P(8,967 / w(8,967))$ in Bezug auf die Prognosen.

[1] Die folgenden Prognosewerte beziehen sich nur auf Windenergieanlagen an Land, also ohne Windkraftanlagen auf See einzubeziehen.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 1**

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1a</td><td>

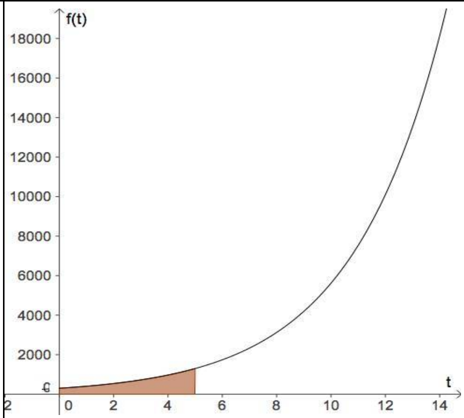
Unter der Annahme exponentiellen Wachstums ergibt sich mit dem gegebenen $f(0)=300$ und dem Wachstumsfaktor von $1,34$

$f(t)=300\cdot 1,34^t=300\cdot e^{\ln 1,34\cdot t}\approx 300\cdot e^{0,293\cdot t}$.

Annahme: Exponentielles Wachstum, d.h. jedes Jahr gleich bleibende Zunahme um 34% , also gleich bleibender Wachstumsfaktor von $1,34$.

Grenzen der Modellierung: Wachstum kann nicht unbegrenzt weitergehen (sowohl Bedarf als auch Möglichkeiten des Ausbaus sind irgendwann erschöpft), zusätzlich: gleich bleibende Wachstumsrate ist Idealisierung

</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>1b</td><td>



Das Jahr 2008 entspricht $t=14$, $f(14)\approx 18138,3$

Verdopplungszeit: $2=e^{0,293t_d}\;\Rightarrow\; t_d\approx 2,4$.

$2^4\cdot 300=4800$ gibt den Wert nach 4 Verdopplungszeiten an, also bei $t\approx 4\cdot 2,4=9,6$.

</td><td>6</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>1c</td><td>

$\int_0^5 f(t)dt=\left[300\cdot\frac{1}{0,293}\cdot e^{0,293\cdot t}\right]_0^5\approx 3407,04\approx 3410.$

Markierung von $L(5)$ *siehe Skizze in b)*

$G(x)=650+\int_0^x f(t)dt=1024e^{0,293\cdot x}-374$.

(bzw. $G(x)=650+\int_{0,5}^{x+0,5} f(t)dt=1024e^{0,293\cdot(x+0,5)}-536$)

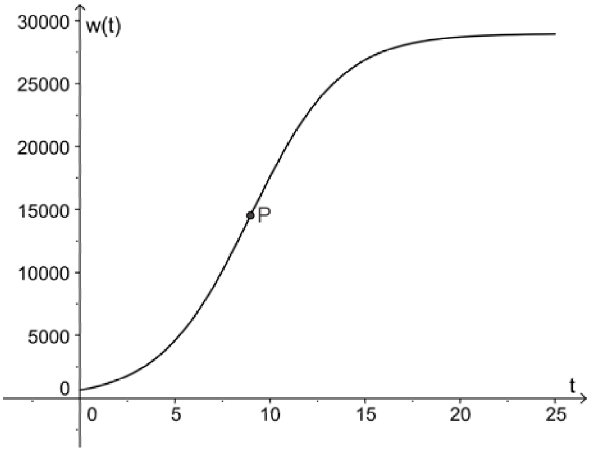
</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1d</td><td>

$28000=\frac{29000}{1+43,6\cdot e^{-0,421t}}\Rightarrow t=\frac{\ln\frac{29-28}{28\cdot 43,6}}{-0,421}\approx 16,9$.

Nach ca. 17 Jahren wird nach dieser Prognose der Wert von 28000 MW erreicht, d.h. ca. 2011.

</td><td>1</td><td>4</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1e</td><td>$w'(t)=\frac{532312,4e^{-0,421\cdot t}}{\left(1+43,6e^{-0,421\cdot t}\right)^2}$; $w'(14,5)\approx 987$

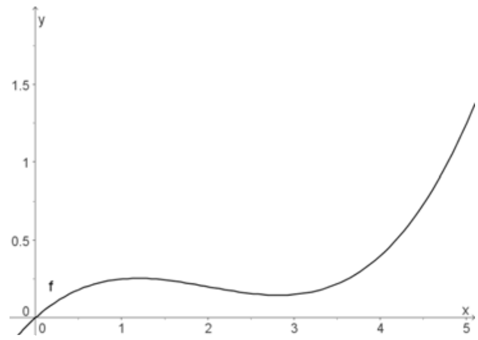
$w'(14,5)$ gibt an, mit welchem Leistungszuwachs pro Jahr Mitte 2009 zu rechnen ist.</td><td>1</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>1f</td><td>$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{29000}{1+43,6e^{-0,421\cdot t}}=\frac{29000}{1+0}=29000$, $w(0)\approx 650$, $w(8,967)\approx 14500$. Die angegebenen Bedingungen sind hinreichend für eine Wendestelle bei $t\approx 9$.
In der Skizze muss deutlich werden, dass bei ca. $(9/14500)$ ein Wendepunkt liegt.


$\lim\limits_{t\to\infty} w(t)$ gibt den Grenzwert an, über den die Gesamtleistung der Windenergieanlagen nach dieser Prognose nicht steigen wird. P ist Wendepunkt, so dass $t_P\approx 9$ (Ende 2003) den Zeitpunkt angibt, ab dem die Zuwachsraten sinken.</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>13</td><td>17</td><td>3</td></tr>
</table>

Aufgabe 2 - zum Themenbereich Analysis

Spielfigur

Ein Metall verarbeitender Betrieb will eine Spielfigur in Serienproduktion herstellen. Diese Spielfigur wird in einer Fräsmaschine gefertigt, indem ein zylinderförmiges Stück Metall unter einem messerartigen Fräswerkzeug rotiert. Das Werkzeug bewegt sich dabei von links nach rechts mal höher, mal tiefer entlang einer in die Maschine eingegebenen mathematischen Funktion. Diese Funktion gibt also für jeden Querschnitt der Spielfigur Ihren Radius an. Die entstehende waagerecht liegende Spielfigur wird später so aufgestellt, dass sich das linke Ende als Kopf der Figur oben und das rechte Ende als Fuß unten befindet.



a) Am Kopf der $5cm$ hohen Spielfigur ist der Radius mit $0cm$ am kleinsten, während er am Fußende mit $1,25cm$ am größten ist. Am Übergang vom Kopf zum Hals der Spielfigur bei $x = 2cm$ beträgt der Radius $0,2cm$. Die Funktion f, deren Graph das Messer in der Maschine durchläuft, soll eine ganz-rationale Funktion dritten Grades sein. Um eine bestimmte Form des Kopfes zu erhalten, wird das Krümmungsverhalten am Übergang vom Kopf zum Hals durch $f''(2) = 0$ festgelegt.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f in Abhängigkeit von x.

Die Maschine ist in der Lage, $5cm$ große Spielfiguren mit den Randfunktionen f_k mit der Gleichung

$$f_k(x) = \frac{1}{20}x^3 - kx^2 + \frac{1}{2}x$$

herzustellen. Dabei kann k aus dem Intervall $I = [0,27;\ 0,31]$ vorgewählt werden.

Die Aufgabenteile b) bis d) sollen stets in Abhängigkeit von k aus dem Intervall I gelöst werden.

b) Berechnen Sie den Radius der Spielfigur sowohl an ihrem Fußpunkt als auch an der Stelle $x = 2$.
Bestimmen Sie an diesen Punkten jeweils den größten und kleinsten Wert des Radius, der aufgrund des Intervalls I für k möglich ist.

c) Zeigen Sie, dass der Übergang vom Kopf zum Hals, d.h. der Wendepunkt, bei $x_W = \frac{20}{3}k$ liegt und der Radius an dieser Stelle $f_k(x_w) = -\frac{800}{27}k^3 + \frac{10}{3}k$ beträgt.

d) Zeigen Sie, dass alle Wendepunkte (vgl. Teil c)) der Kurvenschar f_k auf dem Graphen der Funktion h mit $h(x) = -\frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{2}x$ liegen.

e) Der Betrieb möchte den Abfall bei der Herstellung der Spielfiguren abschätzen.
Ermitteln Sie mit Hilfe einer Stammfunktion das Volumen der Spielfigur für $k = 0,30$.
Die Spielfiguren werden aus einem Metallzylinder mit einem Radius von $1,25cm$ und einer Länge von $5cm$ hergestellt. Bestimmen Sie den Abfall.
Vergleichen Sie die beiden Volumina miteinander.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 2**

<table>
<tr><th rowspan="2" colspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>2a</td><td>$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \quad ; \quad f'(x)=3ax^2+2bx+c \quad ; \quad f''(x)=6ax+2b$
Drei vorgegebene Punkte liefern $f(0)=0$ und somit $d=0$,
$f(5)=1,25=125a+25b+5c$ sowie $f(2)=0,2=8a+4b+2c$
Das Krümmungsverhalten ergibt $f''(2)=0=12a+2b$. Zu lösen bleibt das LGS
$$\begin{bmatrix} 1,25 & = & 125a+25b+5c \\ 0,2 & = & 8a+4b+2c \\ 0 & = & 12a+2b \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1,25 & = & -25a+5c \\ 0,2 & = & -16a+2c \\ b & = & -6a \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & = & \frac{1}{20} \\ b & = & -\frac{3}{10} \\ c & = & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
Funktionsgleichung: $f(x)=\frac{1}{20}x^3-\frac{3}{10}x^2+\frac{1}{2}x$.</td><td>6</td><td>7</td><td></td></tr>
<tr><td>2b</td><td>$f_k(2)=\frac{7}{5}-4k$ und $f_k(5)=\frac{35}{4}-25k$, also beträgt der Radius an der Stelle $x=2$ zwischen $0{,}16cm$ und $0{,}32cm$ und am Fußende zwischen $1cm$ und $2cm$.</td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2c</td><td>Für die Wendestelle muss gelten: $f_k''(x_W)=\frac{3}{10}x_W-2k=0$, woraus $x_W=\frac{20}{3}k$ folgt. Über die dritte Ableitung $f_k'''(x)=\frac{3}{10}\neq 0$ lässt sich nachweisen, dass an dieser Stelle ein Wendepunkt existiert. Der Radius berechnet sich zu
$f_k(\frac{20}{3}k)=-\frac{800k^3}{27}+\frac{10k}{3}$.</td><td>3</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>2d</td><td>Die Wendepunkte $\mathrm{W}(\frac{20}{3}\mathrm{k}\,|\,-\frac{800\mathrm{k}^3}{27}+\frac{10\mathrm{k}}{3})$ liegen auf der durch
$\mathrm{h}(\mathrm{x})=-\frac{1}{10}\mathrm{x}^3+\frac{1}{2}\mathrm{x}$ beschriebenen Kurve, da
$-\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{20}{3}k\right)^3+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{20}{3}k\right)=-\frac{800}{27}k^3+\frac{10}{3}k$.</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
</table>

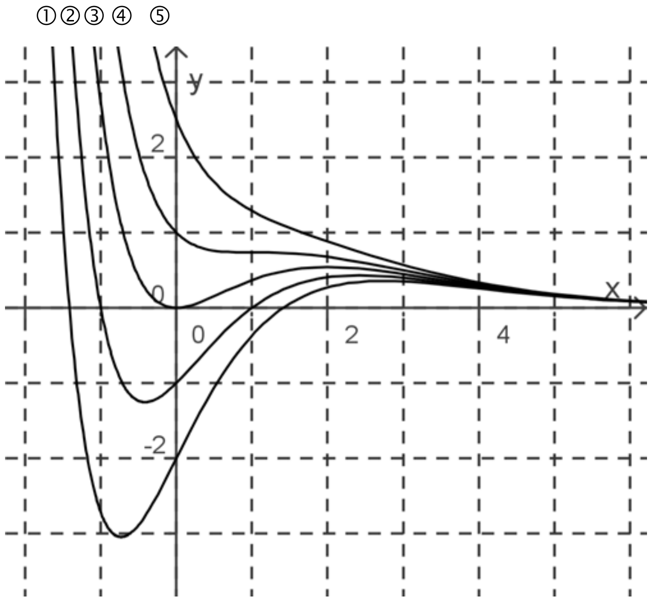
	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
2e	$V_S = \pi \cdot \int_0^5 (\frac{1}{20}x^3 - \frac{3}{10}x^2 + \frac{1}{2}x)^2\, dx \approx 2,57$ Das Volumen der Spielfigur ist $2,57\,cm^3$ groß. $V_Z - V_S = [\pi \cdot 1,5625 \cdot 5] - 2,57 = 24,54 - 2,57 = 21,97$ Das Volumen des Abfalls ist mit $21,97\,cm^3$ mehr als achtmal so groß wie das der Spielfigur.		4	3
Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**13**	**17**	**3**

Aufgabe 3 - zum Themenbereich Analysis

Funktionsuntersuchung

Gegeben sind die

- Funktionen f_k für $k \in \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = \left(x^2 - k\right) \cdot e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$,
- die Funktionsgleichungen ihrer ersten drei Ableitungsfunktionen
  $f_k'(x) = \left(-x^2 + 2x + k\right) \cdot e^{-x}$, $f_k''(x) = \left(x^2 - 4x + 2 - k\right) \cdot e^{-x}$, $f_k'''(x) = \left(-x^2 + 6x - 6 + k\right) \cdot e^{-x}$
- die Graphen einiger ihrer Vertreter.



a) Entscheiden Sie, welcher dieser Graphen zu der Funktion f_1 gehört. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

b) Zeigen Sie, dass der Graph von f_k
- für $k = -1$ genau eine Sattelstelle
- für $k > -1$ genau zwei Extremstellen

besitzt und bestimmen Sie diese.

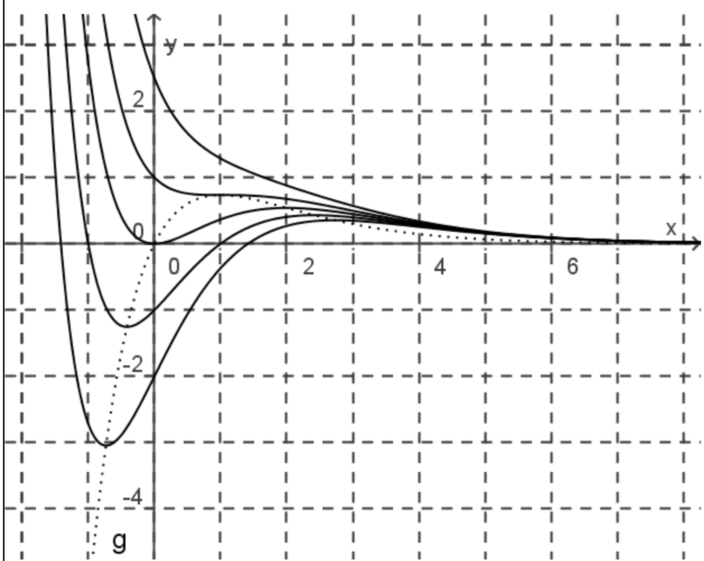
c) Die Punkte $P_1\left(1 + \sqrt{k+1} \,\middle|\, \left(2 + 2\sqrt{k+1}\right) \cdot e^{-\left(1+\sqrt{k+1}\right)}\right)$ und $P_2\left(1 - \sqrt{k+1} \,\middle|\, \left(2 - 2\sqrt{k+1}\right) \cdot e^{-\left(1-\sqrt{k+1}\right)}\right)$ liegen auf dem Graphen einer Funktion g . Geben Sie die Gleichung dieser Funktion an und zeichnen Sie ihren Graphen in das gegebene Koordinatensystem ein.

d) Zeigen Sie, dass F_K mit $F_k(x) = (-x^2 - 2x - 2 + k) \cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion zu f_k ist.

e) Ermitteln Sie, für welche Werte von k durch $\left| \int_{-\sqrt{k}}^{+\sqrt{k}} f_k(x)\,dx \right|$ die Maßzahl der Fläche dargestellt wird, die von der x-Achse und dem Graphen von f_k eingeschlossen ist.
Berechnen Sie $\left| \int_{-\sqrt{k}}^{+\sqrt{k}} f_k(x)\,dx \right|$ für $k = 4$.

f) Zwischen dem Graphen von f_0 und der positiven x-Achse liegt eine Fläche. Veranschaulichen Sie diese in der Zeichnung und bestimmen Sie die Maßzahl dieser Fläche.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 3**

	Lösungsskizze	**Bewertung**		
		I	**II**	**III**
3a	Graph ② gehört zu f_1. Begründung z. B. über Nullstellen bei -1 bzw. 1 oder über den y-Achsenabschnitt bei $S(0 \mid -1)$.	2	1	
3b	$f'_{-1}(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow x=1$, damit besitzt f_{-1} genau eine Stelle mit Steigung 0, diese Stelle ist Sattelstelle, da auch die hinreichende Bedingung $f'_{-1}(1)=0 \wedge f''_{-1}(1)=0 \wedge f'''_{-1}(1)\neq 0$ erfüllt ist. Extremstellen: $f_k'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; x^2-2x-k=0 \;\Leftrightarrow\; \left(x=1+\sqrt{1+k} \;\vee\; x=1-\sqrt{1+k}\right) \wedge k\geq -1$ Bei $k=-1$ handelt es sich um eine Sattelstelle (s.o), für $k<-1$ hat der Graph nirgendwo die Steigung Null. Überprüfung mit f_k'': $f_k''\left(1+\sqrt{k+1}\right)=-2\sqrt{k+1}\cdot e^{-1-\sqrt{k+1}}<0$ und $f_k''\left(1-\sqrt{k+1}\right)=2\sqrt{k+1}\cdot e^{-1+\sqrt{k+1}}>0$. Für $k>-1$ sind die beiden Nullstellen von f_k' somit Extremstellen von f_k, somit besitzt auch kein weiterer Graph eine Sattelstelle.	3	5	
3c	Für die Punkte $P_1\left(1+\sqrt{k+1}\,\middle\vert\, 2\left(1+\sqrt{k+1}\right)\cdot e^{-\left(1+\sqrt{k+1}\right)}\right)$ und $P_2\left(1-\sqrt{k+1}\,\middle\vert\, 2\left(1-\sqrt{k+1}\right)e^{-\left(1-\sqrt{k+1}\right)}\right)$ ergibt sich die Ortskurve dieser Punkte als der Graph von g mit $g(x)=2x\cdot e^{-x}$.  Zur Zeichnung des Graphen von g: Der Graph muss durch die Extrema von f_k gehen. Die Tatsache, dass $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$ gilt, muss ebenfalls deutlich werden.	1	5	1
3d	$F_k'(x)=(-2x-2)\cdot e^{-x}-(-x^2-2x-2+k)\cdot e^{-x}=\left(x^2-k\right)\cdot e^{-x}=f_k(x)$	2	1	

Lösungsskizze		Bewertung I	II	III
3e	Der Term ist aufgrund der Grenzen nur für $k \geq 0$ definiert: $\left\| \int_{-\sqrt{k}}^{+\sqrt{k}} f_k(x)dx \right\|$. $\left\| \int_{-2}^{+2} f_4(x)dx \right\| = \left\| \left[\left(-x^2 - 2x + 2\right) \cdot e^{-x} \right]_{-2}^{2} \right\| = \left\| -6e^{-2} - 2e^{2} \right\| \approx 15,6$	3	3	
3f	Veranschaulichung siehe Teil c). $\left\| \int_{0}^{b} x^2 \cdot e^{-x} dx \right\| = \left\| \left[\left(-x^2 - 2x - 2\right) e^{-x} \right]_{0}^{b} \right\|$ $A = \lim\limits_{b \to \infty} \left\| \left(-b^2 - 2b - 2\right) \cdot e^{-b} - (-2) \cdot e^{0} \right\| = 2$	2	2	2
Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**13**	**17**	**3**

Aufgabe 4 - zum Themenbereich Wahrscheinlichkeitsrechnung / Statistik

HIV-Tests

Man geht davon aus, dass in der BRD von den ca. 40 Millionen sexuell aktiven Personen im Alter von 18 bis 60 Jahren etwa 50 000 mit HIV infiziert sind. Zum Nachweis der Krankheit dienen Untersuchungen von Blutproben. Ist das Ergebnis des Bluttests „HIV-infiziert“, so spricht man von einem positiven Testergebnis.

In den letzten Jahren wurde ein Test entwickelt, der zwar nicht absolut sicher ist, für den aber immerhin folgendes gilt:

Wird eine Person getestet, die tatsächlich infiziert ist, so ist die Wahrscheinlichkeit $99{,}8\%$, dass der Test dann auch positiv reagiert.

Wird hingegen eine nicht infizierte Person getestet, so ist die Wahrscheinlichkeit 99%, dass der Test dann auch negativ reagiert.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine beliebig herausgegriffene Person nicht infiziert ist und positiv getestet wird.

b) Bestätigen Sie durch Rechnung das erstaunliche Ergebnis, dass eine als positiv getestete Person nur mit ca. 11% Wahrscheinlichkeit tatsächlich infiziert ist.

In so genannten Risikogruppen ist der Anteil der HIV-Infizierten deutlich höher als im Bundesdurchschnitt. Bestimmen Sie für eine Risikogruppe, bei der ein Anteil von 1% HIV-Infizierten vorliegt, die Wahrscheinlichkeit, dass eine als positiv getestete Person tatsächlich infiziert ist. Erläutern Sie, inwiefern die Tatsache, dass ein Patient zu einer Risikogruppe gehört, für die Deutung eines positiven Ergebnisses eine Rolle spielt.

Es gibt seit einiger Zeit ein Medikament auf dem Markt, das bei 40% der Aids-Erkrankten nach spätestens einem Monat positiv wirkt.

c) Erläutern Sie, inwiefern man unter mathematischen Gesichtspunkten die Beobachtung von Patienten, die das Mittel einnehmen, als binomialverteilten Zufallsversuch auffassen kann und geben Sie die Zufallsvariable der Verteilung an.

Ein Pharma-Konzern hat ein neues Medikament entwickelt, von dem er behauptet, dass der Krankheitsverlauf bei mehr Personen nachweisbar positiv beeinflusst wird als bei dem bisher auf dem Markt befindlichen Medikament. In einer klinischen Studie an 100 an Aids erkrankten Personen, die das Medikament einnehmen, soll eine Wirksamkeit über 40% mit einem Signifikanztest nachgewiesen werden.

d) Ermitteln Sie eine Entscheidungsregel, die angibt, wann die Hypothese H_0: „Das neue Medikament ist nicht besser als das alte.“ auf dem $5\%-$Signifikanzniveau verworfen werden kann.

e) Bei Medikamenten ist es üblich, auf dem Signifikanzniveau von 1% zu testen. Erläutern Sie die Bedeutung, die das Signifikanzniveau und der Fehler 1. Art (α-Fehler) in diesem Zusammenhang haben. Nennen Sie einen Grund, der für ein Signifikanzniveau von 5% sprechen kann.

f) Bei einem Signifikanztest auf dem $1\%-$Niveau ist der Verwerfungsbereich V für die Hypothese H_0 $V=\{52,...,100\}$. Bestimmen Sie zu diesem Verwerfungsbereich die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art (β-Fehler), wenn man annimmt, dass der Anteil der Patienten, bei denen das neue Mittel wirkt, tatsächlich 43% beträgt.
Erläutern Sie, warum diese Fehlerwahrscheinlichkeit so groß ist.
Leiten Sie aus den Eigenschaften der Binomialverteilung her, wie man diesen Fehler verringern kann.
Veranschaulichen Sie Ihre Argumentationen mit Skizzen geeigneter Verteilungen.

Material zur Aufgabe HIV-Tests

Kumulierte Binomialverteilung, n = 100

k	p= 0,4	p= 0,43
0-10	0,000	0,000
11	0,000	0,000
12	0,000	0,000
13	0,000	0,000
14	0,000	0,000
15	0,000	0,000
16	0,000	0,000
17	0,000	0,000
18	0,000	0,000
19	0,000	0,000
20	0,000	0,000
21	0,000	0,000
22	0,000	0,000
23	0,000	0,000
24	0,001	0,000
25	0,001	0,000
26	0,002	0,000
27	0,005	0,001
28	0,008	0,001
29	0,015	0,003
30	0,025	0,005
31	0,040	0,009
32	0,062	0,016
33	0,091	0,026
34	0,130	0,042
35	0,179	0,064
36	0,239	0,094
37	0,307	0,133
38	0,382	0,182
39	0,462	0,241
40	0,543	0,308
41	0,623	0,383
42	0,697	0,462
43	0,763	0,542
44	0,821	0,621
45	0,869	0,694
46	0,907	0,761
47	0,936	0,819
48	0,958	0,867
49	0,973	0,905
50	0,983	0,935
51	0,990	0,956
52	0,994	0,972
53	0,997	0,983
54	0,998	0,990
55	0,999	0,994
56	1,000	0,997
57	1,000	0,998
58	1,000	0,999
59	1,000	1,000
60	1,000	1,000

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 4**

Lösungsskizze		Bewertung I	II	III
4a	$p($ infiziert $) = 0{,}00125$; $p($ nicht infiziert $) = 0{,}99875$ $p($ nicht infizierte Person wird positiv getestet $) = 0{,}99875 \cdot 0{,}01 \approx 1\%$	3		
4b	Mit Baumdiagramm oder Vierfeldertafel und Bestimmung der entsprechenden Pfad bzw. Feldwahrscheinlichkeiten (oder Bayes-Formel) und den Angaben zu Testspezifität und Testsensitivität ergibt sich $P(I \mid +) \approx 11{,}1\%$ („I“ steht für „infiziert“, „+“ für „positiv getestet“) Mit $p($ infiziert $) = 0{,}01$ erhält man $P(I \mid +) \approx 0{,}502 = 50{,}2\%$. Mögliche Erläuterung: Da der Anteil der Infizierten größer ist, ist auch der Anteil der richtig positiv Getesteten an den insgesamt positiv Getesteten größer bzw. der Anteil der falsch positiv Getesteten an den insgesamt positiv Getesteten kleiner. Damit ist der diagnostische Wert eines positiven Ergebnisses höher, die Wahrscheinlichkeit einer Erkrankung (traurigerweise) größer	5	5	1
4c	Mögliche Erläuterung: Stufen des Versuchs: 1.Patient, 2.Patient, ... Es gibt zwei mögliche Ausfälle auf jeder Stufe: Es wird ein Patient betrachtet, bei dem das Mittel wirkt bzw. nicht wirkt. Die Tatsache, dass auf einer Stufe ein Patient betrachtet wird, bei dem das Mittel wirkt / nicht wirkt, beeinflusst die Ausfälle auf den anderen Stufen nicht, oder die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person betrachtet wird, bei der das Mittel wirkt / nicht wirkt, ist bei jedem Patienten gleich. X: Anzahl der unter Beobachtung stehenden Patienten, bei denen das Mittel wirkt.	2	1	
4d	X: Anzahl der Personen, bei denen das Mittel positiv wirkt X ist binomialverteilt mit $n = 100$ und $p_0 = 0{,}4$, siehe c). Rechtsseitiger Test, also ist das kleinste k gesucht, für das $P(X \geq k) \leq 5\%$ gilt. Mit Taschenrechner oder Tabelle folgt $k = 49$, da $P(X \geq 49) = 1 - P(X \leq 48) < 5\%$, aber $P(X \geq 48) = 1 - P(X \leq 47) > 5\%$ Entscheidungsregel: Wenn bei 49 oder mehr Patienten das Mittel Wirkung zeigt, nehmen wir an, dass H_0 „Das neue Medikament ist nicht besser als das alte“ widerlegt ist.	2	2	

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>4e</td><td>Der Fehler 1. Art besagt, dass man das neue Medikament nicht als besser ansieht, obwohl das tatsächlich häufiger wirkt als das alte. Das Signifikanzniveau legt fest, mit welcher Wahrscheinlichkeit dieser Fehler höchstens eintreten darf. Für 5% spricht z.B.: Im Interesse der Kranken sollte man die Gefahr, dass ein etwas besseres Mittel nicht erkannt wird, verringern.

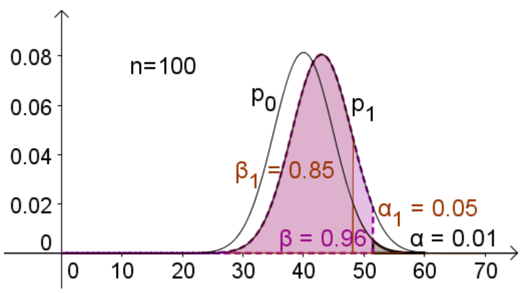
Interessen hinter den Argumentationen sollten deutlich werden.</td><td>1</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>4f</td><td>$P(\beta-\text{Fehler}) = P_{100;0,43}(X \le 51) = \sum_{k=0}^{51} \binom{100}{k} \cdot 0,43^k \cdot 0,57^{100-k} = 0,9564$ (mit Taschenrechner oder Tabelle).

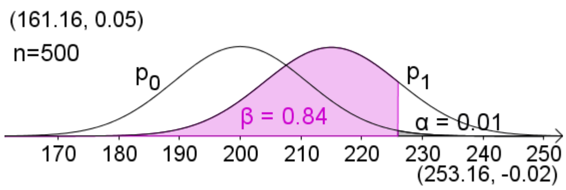
Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art beträgt bei den gegebenen Voraussetzungen ca. $95,6\%$.

Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers ist so groß, weil p_0 und p_1 so nahe beieinander liegen und sich die Verteilungen damit stark überlappen. Er könnte verringert werden, indem man das Signifikanzniveau oder n vergrößert.

In der Argumentation sowie in der Skizze sollte deutlich werden:
der Zusammenhang von α und β
und
dass bei binomialverteilten Zufallsgrößen sich die Versuchsausfälle bei wachsendem n relativ zu n gesehen zunehmend um den Erwartungswert konzentrieren. Damit werden bei kleinerem n die Bereiche, in denen sich die Histogramme der Verteilungen zu p_0 und z.B. p_1 überlappen, größer.

Genaue Zeichnungen wie in den folgenden Grafiken sind nicht nötig.




</td><td>1</td><td>5</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>14</td><td>16</td><td>3</td></tr>
</table>

Aufgabe 5 - zum Themenbereich Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Vertiefung Lineare Algebra

Verteilung von Einkaufswagen

Ein Supermarkt verteilt seine insgesamt 400 Einkaufswagen auf drei Plätze: im Eingangsbereich E, auf dem Parkplatz P und bei den Glascontainern G. An diesen Plätzen können sie mitgenommen bzw. abgestellt werden. Ein Schüler soll dafür sorgen, dass an allen drei Plätzen ausreichend Einkaufswagen zur Verfügung stehen. Statt die Wagen hin und her zu schieben will der mathematisch interessierte Schüler eine Übergangsmatrix aufstellen. Er markiert morgens die Wagen an den drei Plätzen so, dass er abends erkennen kann, von welchem Platz jeder einzelne Wagen stammt.

Nach einigen Tagen stellte er folgende Tabelle für die Übergangsanteile auf:

nach \ von	Eingangsbereich (E)	Parkplatz (P)	Glascontainer (G)
Eingangsbereich (E)	$0,3$	$0,2$	$0,3$
Parkplatz (P)	$0,6$	$0,6$	$0,7$
Glascontainer (G)	$0,1$	$0,2$	$0,0$

a) Erstellen Sie zu der sich aus der Tabelle ergebenden Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,6 & 0,6 & 0,7 \\ 0,1 & 0,2 & 0,0 \end{pmatrix}$ das zugehörige Übergangsdiagramm.
Interpretieren Sie die Werte $0,3$, $0,7$ und $0,0$ aus der dritten Spalte in diesem Zusammenhang.

b) Wie viele Einkaufswagen wird der Schüler am ersten Abend an den einzelnen Plätzen gezählt haben, wenn sich zu Beginn seiner Untersuchung 200 Einkaufswagen im Eingangsbereich E und je 100 an den anderen beiden Plätzen P und G befanden? Berechnen Sie dazu ausgehend von $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$ die Verteilung $\vec{v}_1$.

c) Bestätigen Sie, dass $\vec{v}_s \approx \begin{pmatrix} 95 \\ 246 \\ 59 \end{pmatrix}$ (die Werte wurden auf ganze Zahlen gerundet) eine für die 400 Einkaufswagen geeignete stationäre Verteilung von M ist, ohne ein lineares Gleichungssystem zu lösen.

d) Die stationäre Verteilung $\vec{v}_s$ aus c) ist die Grenzverteilung von M, d. h. es gilt:
$\vec{v}_s = \lim\limits_{n\to\infty} \vec{v}_n = \lim\limits_{n\to\infty}(M^n * \vec{v}) = \lim\limits_{n\to\infty} M^n * \vec{v}$ für jede Anfangsverteilung $\vec{v}$.
Jede Grenzmatrix $G = \lim\limits_{n\to\infty} M^n$ hat die Form $G = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Komponenten a, b, c von G auf drei Nachkommastellen gerundet und interpretieren Sie die drei Werte in Bezug auf die 400 Einkaufswagen.

Nach Beseitigung der Glascontainer wurde der Platz G eingespart. Am ersten Morgen danach wurden je 200 Einkaufswagen an die beiden Plätze E und P gestellt. Abends befanden sich 80 bei E und 320 bei P.

Der Schüler stellte daraufhin die Vermutung auf, dass $U = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}7 & 0{,}9 \end{pmatrix}$ die neue Übergangsmatrix darstellt,

da gilt: $U * \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 320 \end{pmatrix}$.

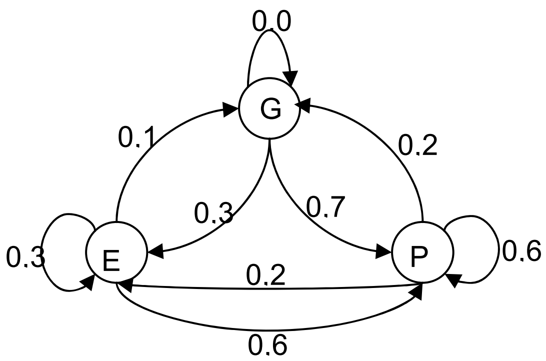
e) Berechnen Sie für die 400 Einkaufswagen die stationäre Verteilung $\vec{u}_s$ von U.

f) Wenn U korrekt gewählt wurde, so muss für die Verteilung $\vec{u}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ der Einkaufswagen am Abend nach n Tagen gelten: $x_n = 0{,}2 \cdot x_{n-1} + 40$.
Leiten Sie diese Berechnungsformel und eine für y_n her und bestätigen Sie durch Berechnung der jeweiligen Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, dass die stationäre Verteilung $\vec{u}_s = \begin{pmatrix} 50 \\ 350 \end{pmatrix}$ von e) wie erwartet die Grenzverteilung ist.

Gleich am ersten Abend verteilte der Schüler die Einkaufswagen gemäß dieser Grenzverteilung und war sehr erstaunt, dass er am folgenden Abend 95 Einkaufswagen bei E und 305 bei P vorfand.

g) Nun ist der Schüler überzeugt, dass er - sofern die täglichen Übergangswahrscheinlichkeiten tatsächlich immer gleich bleiben - die korrekte Übergangsmatrix S aufstellen kann. Er macht folgenden Ansatz:
$S * \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 320 \end{pmatrix}$ und $S * \begin{pmatrix} 50 \\ 350 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 95 \\ 305 \end{pmatrix}$. Erläutern Sie seinen Ansatz und berechnen Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten der Matrix S.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 5**

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>5a</td><td>Übergangsdiagramm:


Von den bei den Glascontainern mitgenommenen Einkaufswagen stehen an jedem Abend 30% im Eingangsbereich, 70% beim Parkplatz und 0% wieder bei den Glascontainern.</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5b</td><td>$$\vec{v}_1 = M * \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0,3\cdot 200 + 0,2\cdot 100 + 0,3\cdot 100 \\ 0,6\cdot 200 + 0,6\cdot 100 + 0,7\cdot 100 \\ 0,1\cdot 200 + 0,2\cdot 100 + 0,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 250 \\ 40 \end{pmatrix}.$$</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5c</td><td>Es reicht aus zu zeigen, dass
$$M * \vec{v}_s = \begin{pmatrix} 0,3\cdot 95 + 0,2\cdot 246 + 0,3\cdot 59 \\ 0,6\cdot 95 + 0,6\cdot 246 + 0,7\cdot 59 \\ 0,1\cdot 95 + 0,2\cdot 246 + 0,0\cdot 59 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 95 \\ 246 \\ 59 \end{pmatrix}$$ gilt und $95 + 246 + 59 = 400$ ist.</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5d</td><td>Gesucht ist eine Matrix G mit $G * \vec{v} = \vec{v}_s$ für jedes $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit $x + y + z = 400$
Da $\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cdot(x+y+z) \\ b\cdot(x+y+z) \\ c\cdot(x+y+z) \end{pmatrix} = 400 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 95 \\ 246 \\ 59 \end{pmatrix}$ folgt
$a = \frac{95}{400} \approx 0,238 = 23,8\%$, $b = \frac{246}{400} \approx 0,615 = 61,5\%$, $c = \frac{59}{400} \approx 0,148 = 14,8\%$.
a , b und c geben an, welcher Anteil von 400 Einkaufswagen langfristig an dem zugehörigen Platz abgestellt wird.</td><td>2</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>5e</td><td>Aus $\begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 \\ 0,7 & 0,9 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix}$ und $x_s + y_s = 400$ folgt:
$$\begin{bmatrix} -0,7x_s = -0,1y_s \\ x_s = 400 - y_s \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_s = \frac{1}{7} y_s \\ \frac{1}{7} y_s = 400 - y_s \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_s = \frac{1}{7}\cdot 350 = 50 \\ y_s = \frac{400\cdot 7}{8} = 350 \end{bmatrix},$$
also $\vec{u}_s = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 50 \\ 350 \end{pmatrix}$.</td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>5f</td><td>Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x_n + y_n = 400$, daher folgt
1. $x_n = 0,3x_{n-1} + 0,1y_{n-1} = 0,3x_{n-1} + 0,1 \cdot (400 - x_{n-1}) = 0,2x_{n-1} + 40$ für $n \geq 1$ und
2. $y_n = 400 - x_n$ oder analog zu x_n
$y_n = 0,7x_{n-1} + 0,9y_{n-1} = 0,7 \cdot (400 - y_{n-1}) + 0,9y_{n-1} = 0,2y_{n-1} + 280$.
● Entweder Lösungsansatz über Iterationsfolgen:
In beiden Fällen handelt es sich um eine Iterationsfolge an einer linearen Funktion mit der positiven Steigung $0,2 < 1$, daher konvergieren die Folgen gegen den Fixpunkt der jeweiligen Iterationsfunktion, also gegen $x^* = 50$ bzw. $y^* = 350$.
● oder Lösungsansatz über geometrische Reihen:
$x_n = 0,2x_{n-1} + 40 = 0,2(0,2x_{n-2} + 40) + 40 = \ldots$
$= 0,2^n \cdot x_0 + 40 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 0,2^k = 0,2^n \cdot x_0 + 40 \cdot \frac{1-0,2^n}{0,8}$, daher gilt: $\lim_{n\to\infty} x_n = 50$.
Da $y_n = 400 - x_n$, folgt $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}(400 - x_n) = 400 - \lim_{n\to\infty} x_n = 350$,
oder analog zu x_n
$y_n = 0,2y_{n-1} + 280 = \ldots = 0,2^n \cdot y_0 + 280 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 0,2^k = 0,2^n \cdot x_0 + 280 \cdot \frac{1-0,2^n}{0,8}$,
daher gilt $\lim_{n\to\infty} y_n = 350$.
Also ergibt sich $\lim_{n\to\infty} \vec{u}_n = \begin{pmatrix} 50 \\ 350 \end{pmatrix} = \vec{u}_s$.</td><td>1</td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>5g</td><td>Der Ansatz ergibt sich aus den beiden aufeinander folgenden Verteilungen aus e) und f). Mit $S = \begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix}$ ergibt sich
$S * \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200p + 200 - 200q \\ 200 - 200p + 200q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 320 \end{pmatrix}$ und
$S * \begin{pmatrix} 50 \\ 350 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50p + 350 - 350q \\ 50 - 50p + 350q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 95 \\ 305 \end{pmatrix}$, zusammen folgt:
$\begin{bmatrix} 200p - 200q = -120 \\ 50p - 350q = -255 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} p - q = -0,6 \\ p - 7q = -5,1 \end{bmatrix}$,
$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} p - q = -0,6 \\ -6q = -5,1 + 0,6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} p = 0,15 \\ q = 0,75 \end{bmatrix}$
also $S = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,25 \\ 0,85 & 0,75 \end{pmatrix}$.</td><td></td><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>13</td><td>17</td><td>3</td></tr>
</table>

Aufgabe 6 - zum Themenbereich Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Vertiefung Analytische Geometrie

Kunstraub

Die Abbildung (siehe nächste Seite) zeigt den Entwurf einer Kulisse für einen Spielfilm. Es ist eine Ausstellungshalle mit einem Kunstobjekt dargestellt. Im Spielfilm soll das Kunstobjekt $K(1|7{,}5|0)$ von einem Dieb entwendet werden. Der Kunstgegenstand ist durch eine Barriere von Laserstrahlen geschützt. Der Dieb startet vom Ausgang $A(21|3|0)$. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.

Die Geradengleichungen

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} \text{ und } g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3{,}5 \end{pmatrix},\ r, s \in \mathbb{R}$$

beschreiben den Verlauf zweier sich kreuzender Laserstrahlen.

a) Markieren Sie die beiden Laserstrahlen in der Zeichnung, deren Verlauf durch die Geraden g_1 und g_2 beschrieben wird.
Zeigen Sie, dass diese beiden Laserstrahlen entlang windschiefer Geraden verlaufen.

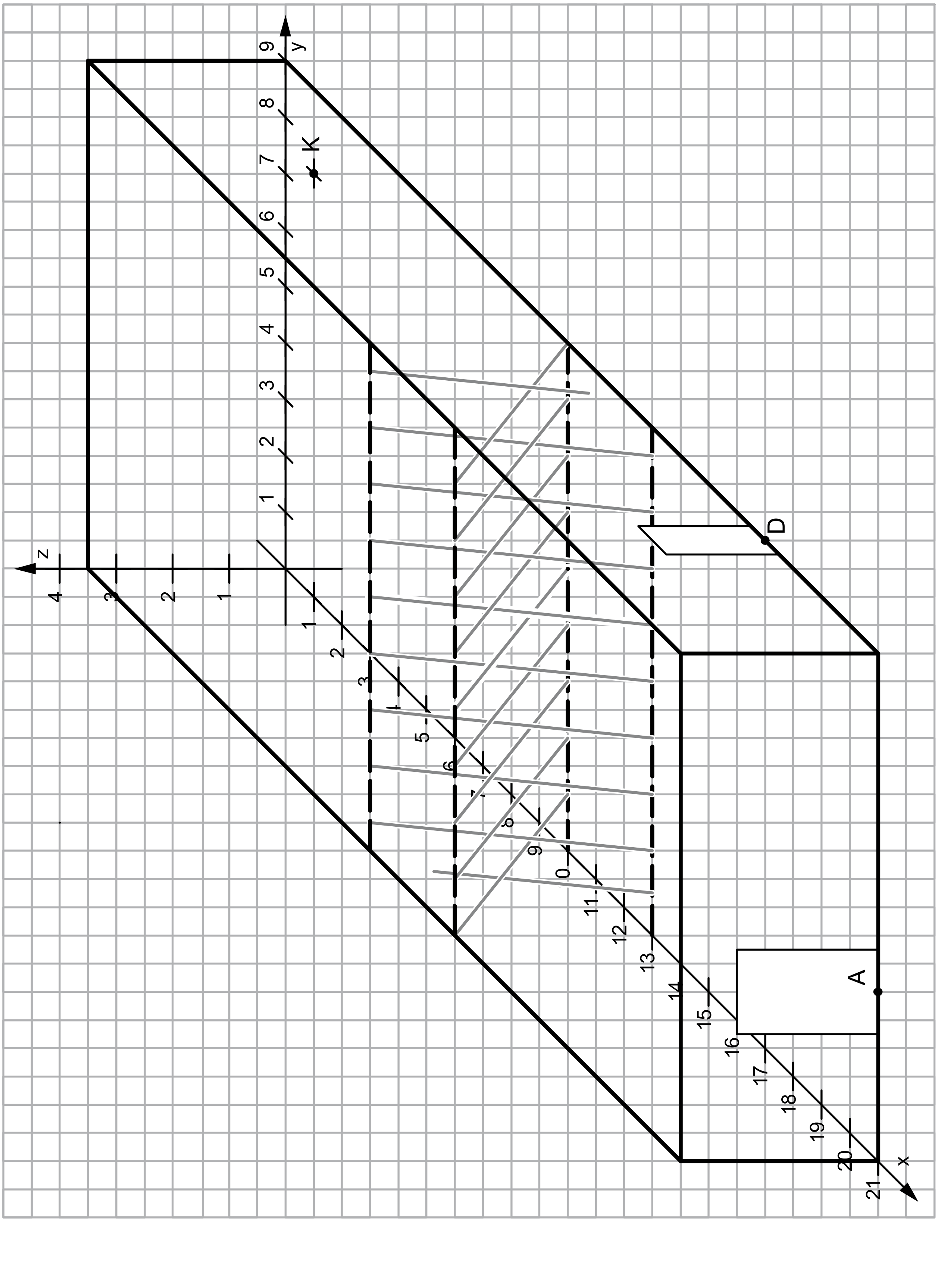
b) In dem Spielfilm prüft der Dieb, ob er sich zwischen den Strahlen hindurchzwängen kann.
Bestimmen Sie zwei parallele Ebenen E_1 und E_2 in Normalenform, wobei die Ebene E_1 die Gerade g_1 und die Ebene E_2 die Gerade g_2 enthalten soll.
Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden.
Ermitteln Sie den Schnittwinkel der Ebenen E_1 und E_2 mit der xy-Ebene.
(Falls Sie für E_1 und E_2 keine Gleichung angeben konnten, verwenden Sie zur Bestimmung des Winkels: $E: 14y + 4z = 77$.)

c) Der Dieb interessiert sich für die Stelle, an der die Laserstrahlen den geringsten Abstand haben.
F bezeichne die Ebene , die g_1 enthält und die senkrecht auf den parallelen Ebenen E_1 und E_2 steht.
Erläutern Sie ohne Rechnung, wie mit Hilfe der Ebene F die Punkte minimalen Abstands P_1 auf der Geraden g_1 und P_2 auf der Geraden g_2 bestimmt werden können.

d) In dem Spielfilm wird der Kunstdieb die Laserbarriere überwinden und bei der Berührung des Kunstgegenstandes K zum Zeitpunkt $t = 0$ die akustische Alarmanlage auslösen (Zeit t in Sekunden). Nach dem ersten Schreck befindet sich der Dieb zum Zeitpunkt $t = 2$ im Punkt K und bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit ohne Beachtung der Laserstrahlen auf den Ausgang A zu. Er erreicht den Ausgang zum Zeitpunkt $t = 4{,}5$. Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit der Dieb läuft, d.h. welchen Weg er pro Sekunde zurücklegt.

Der Wachmann war bei Auslösung des Alarms im Nachbarraum, läuft zum Zeitpunkt $t = 3$ durch den Durchgang $D(17|9|0)$ und anschließend mit konstanter Geschwindigkeit von 4 Metern pro Sekunde ebenfalls direkt auf den Ausgang A zu.
Entscheiden Sie, ob der Dieb entkommen wird.
Begründen Sie ihre Entscheidung mit einer geeigneten Rechnung.

Material zur Aufgabe Kunstraub



Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 6**

Lösungsskizze		Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
6a	Einzeichnen der Laserstrahlen. Nachweis der linearen Unabhängigkeit der Richtungsvektoren. Daher sind die Geraden nicht parallel. Der Ansatz $\begin{pmatrix}10\\5\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\3{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\5{,}5\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-3\\-1\\3{,}5\end{pmatrix}$ führt mit den ersten beiden Zeilen zu $r=\frac{1}{4}$ und $s=\frac{3}{4}$, was zum Widerspruch mit der dritten Zeile führt. Es gibt also keinen Schnittpunkt und die Geraden sind windschief.	3	3	
6b	Ein Normalenvektor $\vec{n}$ der parallelen Ebenen steht senkrecht auf den Richtungsvektoren der beiden Geraden. Dies liefert: $3x_n-y_n+3{,}5z_n=0$ und $-3x_n-y_n+3{,}5z_n=0$. Ein möglicher Normalenvektor ist $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\7\\2\end{pmatrix}$. Einsetzen der Koordinaten der Stützvektoren der Geraden in den Ansatz $7y+2z=d$ liefert die Ebenen $E_1: 7y+2z=35$ und $E_2: 7y+2z=\frac{77}{2}$ bzw. in Normalenform wie z.B. $E_1: \frac{1}{\sqrt{53}}\begin{pmatrix}0\\7\\2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\frac{35}{\sqrt{53}}=0$ bzw. $E_2: \frac{1}{\sqrt{53}}\begin{pmatrix}0\\7\\2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\frac{77}{2\sqrt{53}}=0$. Der Abstand berechnet sich z.B. mit E_2 und Punkt $P_1(10\|5\|0)$: $Abst(E_2;P_1)=\left\|\frac{1}{\sqrt{53}}\begin{pmatrix}0\\7\\2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}10\\5\\0\end{pmatrix}-\frac{77}{2\sqrt{53}}\right\|=\frac{7}{2\sqrt{53}}\approx 0{,}48$, also ca. 48 cm. Schnittwinkelberechnung mittels Normalenvektoren der Ebenen: $\cos(\alpha)=\frac{\left\|\begin{pmatrix}0\\7\\2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix}0\\7\\2\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|}=\frac{2}{\sqrt{53}}$, $\alpha\approx 74°$.	6	5	2
6c	Die Punkte minimalen Abstands heißen P_1 auf g_1 und P_2 auf g_2. Den Punkt P_2 erhält man als Schnittpunkt von g_2 und F. Wenn man eine Geradengleichung mit P_2 als Stützpunkt und dem Normalenvektor der parallelen Ebenen E_1 und E_2 als Richtungsvektor aufstellt, ergibt sich der Punkt P_1 als Schnittpunkt zwischen dieser neuen Geraden und der Ebene E_1.		3	1

Lösungsskizze		**Bewertung**		
		I	**II**	**III**
6d	Der Dieb legt die Strecke $\overline{KA}$ mit einer Länge von $\left\lvert\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OK}\right\rvert = \left\lVert\begin{pmatrix}20\\-4{,}5\\0\end{pmatrix}\right\rVert = 20{,}5$ Metern in $2{,}5$ Sekunden zurück und läuft damit mit einer Geschwindigkeit von $8{,}2$ Metern pro Sekunde. Der Wärter läuft die Strecke $\overline{DA}$ mit einer Länge von $\left\lvert\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}\right\rvert = \left\lVert\begin{pmatrix}4\\-6\\0\end{pmatrix}\right\rVert = 2\sqrt{13} \approx 7{,}21$ Metern mit einer Geschwindigkeit von 4 Metern pro Sekunde, benötigt dafür also $\frac{2\sqrt{13}m}{4\frac{m}{s}} \approx 1{,}8s$. Er ist zum Zeitpunkt $t \approx 4{,}8$ am Ausgang, ist also erst knapp nach dem Dieb am Ausgang. Da der Dieb schneller ist als der Wachmann, wird er entkommen.	4	6	
Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**13**	**17**	**3**

Protokollbogen zur Auswahl der Aufgaben für die Prüfungsakten der Schule

Auswahl der Aufgaben:

- Fach: **Mathematik**
- Schule: ____
- Schulinterne Kursbezeichnung: ______________________________
- **Fachlehrerin / Fachlehrer** (Name, Vorname):

  ____

  Ich wähle für die Bearbeitung durch die Prüflinge die 3 Aufgaben Nr. __________ aus.

  Bremen / Bremerhaven, den ___.5.2008

  ____
  (Unterschrift Fachlehrerin / Fachlehrer)

- **Korreferentin / Korreferent** (Name, Vorname):

  ____

  Ich schließe mich der Auswahl an / nicht an (bitte Unzutreffendes streichen). Im Falle der Nichtzustimmung füge ich eine kurze schriftliche Begründung auf der Rückseite des Protokolls bei.

  Bremen / Bremerhaven, den ___.5.2008

  ____
  (Unterschrift Korreferentin / Korreferent)

- **Auswahl durch die Vorsitzende / den Vorsitzenden des Fachprüfungsausschusses** (im Falle der Nichtübereinstimmung zwischen Fachprüferin/Fachprüfer und Korreferentin / Korreferenten)

  Ich wähle die 3 Aufgaben Nr. __________ zur Bearbeitung durch die Prüflinge aus und füge eine kurze schriftliche Begründung auf der Rückseite des Protokolls bei.

  Bremen / Bremerhaven, den ___.5.2008

  ____
  (Unterschrift Vorsitzende(r) Fachprüfungsausschuss)

Rückmeldebogen für die Zentralabiturkommission Mathematik zur Auswahl der Aufgaben

Auswahl der Aufgaben:

- Fach: **Mathematik**
- Schule: ______________________________
- Schulinterne Kursbezeichnung: ______________________________
- Anzahl der Schülerinnen und Schüler: ______________________________
- Der Fachprüfungsausschuss hat für die Bearbeitung durch die Prüflinge die drei Aufgaben

  Nr. ________ , ________ und ________ ausgewählt.

Bremen / Bremerhaven, den ___.5.2008

____
(Unterschrift)

Schicken Sie diesen Bogen bitte möglichst umgehend per FAX an folgende Adresse:

Landesinstitut für Schule, Herrn Löwer

FAX 0421-361-6451

Die Rückmeldebögen werden im LIS gesammelt und den Zentralabiturkommissionen zur Verfügung gestellt. Sie sind eine Grundlage für die Auswertungsgespräche mit den Schulen und die Erstellung neuer Aufgaben.