Landesabitur 2007
Beispielaufgaben

Mathematik

Grundkurs

Beispielaufgabe A 1

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **180 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

Erlaubte Hilfsmittel:	**Taschenrechner** **Übliche Formelsammlung**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Analysis

Dem menschlichen Körper können Medikamente durch einen Tropf kontinuierlich zugeführt werden. Zu Beginn weist der Körper keine Medikamentenmenge auf, nach In-Gang-Setzen des Tropfes erhöht sich die Medikamentenmenge mit jedem Tropfen, aber zugleich beginnen Nieren und Leber die Substanz wieder auszuscheiden.
Die Funktion m: $t \rightarrow m(t)$, t in Minuten, m in Milligramm gemessen, gebe die Medikamentenmenge im Körper an.

Aufgaben

a. Erläutern Sie die Bedeutung der Ableitungsfunktion m' für oben beschriebenen Wachstumsprozess.

b. Für ein bestimmtes Medikament gelte $m'(t) = e^{-0,02\,t}$. Bestimmen Sie m(t) unter der Voraussetzung, dass der Tropf zur Zeit t = 0 gestartet wird.

Es gilt fortan: $m(t) = 50\,(1 - e^{-0,02\,t})$.

c. Zeichnen Sie die Graphen von m und m' für einen sinnvollen Zeitraum und interpretieren Sie deren Verlauf bezüglich der Medikamentenzufuhr.

d. Erläutern Sie, dass $\lim\limits_{t \rightarrow \infty} m(t) = 50$ gilt.

Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Medikamentenmenge 90% dieses Grenzwertes erreicht und den, von dem ab der Zuwachs des Medikaments weniger als 0,5 mg pro Minute beträgt.

e. Berechnen Sie $\int_0^{10} e^{-0,02\,t}\,dt$. Erläutern Sie die Bedeutung dieser Zahl.

f. Nach 5 Stunden wird der Tropf abgesetzt. Der Abbau des Medikaments erfolgt danach mit einer Halbwertszeit von 6 Stunden.
Bestimmen Sie den Zeitpunkt, von dem ab die Nachweisgrenze des Medikaments von 1 µg (10^{-3} mg) im Körper unterschritten wird.

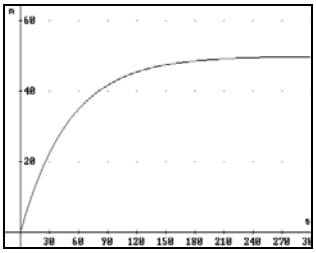
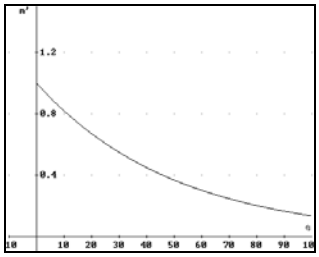
Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

II. Erläuterungen

Zielsetzung

Diese Aufgabe orientiert sich an der Leitidee „Modellieren“. Die Modelle des begrenzten Wachstums und der exponentiellen Abnahme (negatives exponentielles Wachstum) werden am Beispiel der Medikamentenaufnahme durch einen Tropf bzw. des Medikamentenabbaus im Körper benutzt. Dazu sind die Kenntnisse einfacher e-Funktionen, ihrer Eigenschaften und die Beherrschung der Differenziations- und Integrationsregeln notwendig. Wichtig ist neben der Rechnung allerdings die inhaltliche Interpretation.

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösung	I	II	III	Bemerkungen
a.	Die Ableitung einer Funktion beschreibt die momentane Änderung, hier also die Änderung der Medikamentenmenge in der Zeit	2	2		Bedeutung der Ableitung als Änderungsrate (LP 11)
b.	m(t) = $\frac{1}{-0{,}02}e^{-0{,}02t} + C$ Integrationskonstante ist zu bestimmen: m(0) = -50 + C = 0, C = 50 $\Rightarrow$ m(t) = 50(1 - $e^{-0{,}02t}$)		2	2	Begriff der Strammfunktion und unbestimmtes Integral, Bestimmung des Terms durch Integration
c.	  Die Medikamentenmenge nimmt zunächst schnell, mit wachsender Zeit allmählich immer langsamer zu; für t > 180 ist die Medikamentenmenge nahezu konstant. Der Ableitungsgraph (rechts) zeigt, dass die Änderung (Zunahme) mit wachsendem t immer kleiner wird und sich an Null annähert.	4	5		Interpretation der monoton wachsenden bzw. fallenden Graphen bezüglich der Medikamentenmenge
d.	Der Term $e^{-0{,}02t} = \frac{1}{e^{0{,}02t}}$ wird mit wachsendem t immer kleiner, da der Nenner immer größer wird, und hat als Grenzwert 0. Ansatz: m(t) = 50(1 - $e^{-0{,}02t}$) = 0,9·50 liefert t = -50·ln(0,1) = 50·ln(10) ≈115,13 Ansatz m’(t) = $e^{-0{,}02\,t}$ < 0,5 liefert t > ln(0,5)/-0,02 = 50·ln(2) ≈ 34,66	2	3	2	Verständiger Umgang mit Exponentialfunktionen zeichnerische Lösung (für ersten Zeitpunkt) ist gleichwertig Ansatz mit Gleichung statt Ungleichung soll keinen Punktabzug bringen

e.	$\int_0^{10} e^{-0,02\,t}\,dt = 50(1 - e^{-0,02t})\Big\|_0^{10} = 9,06$ das ist die Menge des Medikaments, die nach 10 Minuten im Körper vorhanden ist	3		2	Eigenschaften und Anwendung eines bestimmten Integrals Interpretation des bestimmten Integrals
f.	m(300) = 49,88 g Ansatz für Exponentialfunktion $f(t) = 49,88 \cdot e^{-kt}$ $49,88 \cdot e^{-k \cdot 360} = 0,5 \cdot 49,88$ $\Rightarrow k = \ln(0,5)/(-360) = 0,00193$ $\Rightarrow f(t) = 49,88 \cdot e^{-0,00193t}$ $f(t) < 10^{-3} \quad \Rightarrow t = 5605$ also ist nach 93,4 Std., d. h. nach 3 Tagen und gut 21 Stunden, die Nachweisgrenze unterschritten	2	8		verständiger Umgang mit Exponentialfunktion als Beschreibung eines Zerfallsprozesses Lösung durch systematisches Probieren mit TR nur dann gleichwertig, wenn Weg planvoll und beschrieben ist
	Σ 39	**13**	**20**	**6**	

Landesabitur 2007
Beispielaufgaben

Mathematik

Grundkurs

Beispielaufgabe A 2

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **180 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

Erlaubte Hilfsmittel:	**Taschenrechner** **Übliche Formelsammlung**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Analysis

Aufgaben

a. Der Graph einer ganz-rationalen Funktion 4. Grades ist achsensymmetrisch zur y-Achse, geht durch den Ursprung und den Punkt P = (2 | 0) und schließt im 1. Quadranten mit der x-Achse eine Fläche von 16 Flächeneinheiten ein.
Bestimmen Sie den zugehörigen Funktionsterm.

b. Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = -3{,}75\,x^4 + 15\,x^2$.
Beschreiben und begründen Sie den Verlauf dieses Graphen zunächst ohne Rechnung allein mithilfe des Funktionsterms.
Bestätigen Sie die charakteristischen Punkte des Graphen durch Rechnung.

c. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn das im ersten Quadranten zwischen Funktionsgraph und x-Achse eingeschlossene Flächenstück um die x-Achse rotiert.

d. Beschreiben und erklären Sie, was in den Schritten 1 bis 5 im Text 1 berechnet wird – zu rechnen brauchen Sie selbst nicht!
Welche Eigenschaften hat der so berechnete Rotationskörper?

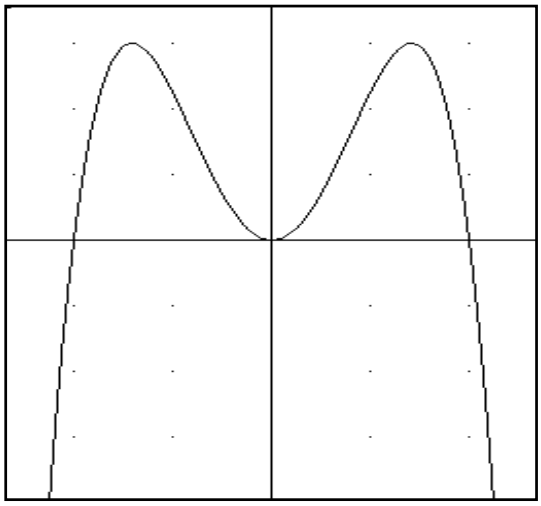


Abbildung 1

Zwischenschritte einer Rechnung

Man will einen Rotationskörper mit einer bestimmten Eigenschaft erzeugen.
Zur Vorbereitung rechnet man wie folgt:

1. $V(k) = \pi \int_k^{k+1} [f(x)]^2\,dx$, $0 \le k \le 1$
2. $V'(k) = 0 \;\Rightarrow\; k \approx 0{,}82$
3. $V''(0{,}82) \approx -2763$
4. $V(0{,}82) \approx 518{,}25$
5. $A = \pi\,[f(0{,}82)]^2 \approx 223{,}65$

Text 1

Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

II. Erläuterungen

Zielsetzung

Die Aufgabe testet – im Wesentlichen in traditioneller Fragestellung – Kenntnisse der Zusammenhänge von Term und Graph einer ganz-rationalen Funktion 4. Grades.
Vor der Funktionsuntersuchung muss der Funktionsterm aufgestellt werden, wobei eine der dazu notwendigen Bedingungen sich aus der Bestimmung eines Flächeninhalts ergibt. Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers sowie das Beschreiben und Erkennen eines Extremwertproblems bilden den weiteren Teil der Aufgabe.

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösung	**I**	**II**	**III**	**Bemerkungen**
a.	Ansatz (wegen Symmetrie): $p(x) = ax^4 + bx^2 + c$ Bedingungen $p(0) = 0$ und $p(2) = 0$ führen zu Gleichungssystem und zu einparametriger Schar $f(x) = ax^4 - 4ax^2$ mit den Nullstellen $x = 0$ und $x = 2$ und $x = -2$ Integral liefert $a = -3{,}75 \Rightarrow f(x) = -3{,}75x^4 + 15x^2$ (auch Ansatz mit 5 Parametern über $p(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ möglich)	3	4	3	LP 12/1, 11/2 Bestimmung des Terms einer ganz-rationalen Funktion 4. Grades – wegen Achsensymmetrie nur drei Bedingungen nötig
b.	Beschreibung mit Begründung nur gerade Potenzen von $x \Rightarrow$ Achsensymmetrie zur y-Achse Grad 4, Koeff. $a = -3{,}75 < 0 \Rightarrow$ Verlauf für $\lvert x \rvert \to \pm\infty$ für betragsgroße x geht f(x) gegen $-\infty$ fehlendes absolutes Glied $\Rightarrow$ y-Achsenschnittpunkt $y = 0$ (Extrempunkt im Ursprung (dopp. Nullst.)) Anzahl von Null- und Extremstellen), **Rechnung** Nullstellen: $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (doppelte), $x = -2$, $x = 2$ Extrempunkte: notwendig $f'(x) = -15x^3 + 30x = 0 \Rightarrow x=0,\ x=\sqrt{2},\ x=-\sqrt{2}$ hinreichende Bedingung ergibt $T = (0 \mid 0)$ ist Tiefpunkt $H_1 \approx (1{,}4 \mid 15)$, $H_2 \approx (-1{,}4 \mid 15)$ sind Hochpunkte Wendepunkte: notw. $f''(x) = -45x^2 + 30 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ und $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ hinr. Bedingung zeigt $W_1 \approx (0{,}8 \mid 8{,}3)$, $W_2 \approx (-0{,}8 \mid 8{,}3)$ sind Wendep.	11	7		Beschreibung und Begründung über Grad des Polynoms, auftretende Exponenten und Koeffizient vor x^4 (LP 11)

c.	$V = \pi \int_0^2 [f(x)]^2 \approx 574{,}46$		6		Bestimmtes Integral Volumenintegral
d.	1. Integral in den Grenzen von k bis k+1 zur Berechnung des Volumens als Funktion in Abhängigkeit von k für k zwischen 0 und 1 2. Nach Bestimmung der ersten Ableitung V' von V wird Gleichung V'(k) = 0 gelöst, man erhält eine mögliche Extremstelle von V, die bei 0,82 liegt 3. Berechnung von V''(0,82), k ist also Extremstelle, es liegt ein Maximum vor, da V''(0,82) < 0 4. Berechnung des Volumens V für k=0,82 5. Berechnung der Standfläche des Körpers Man hat also den Körper mit Höhe 1 berechnet, der durch Rotation des Graphen von f um die x-Achse entsteht und der unter all diesen Körpern ein maximales Volumen besitzt. Sein Volumen beträgt rund 518 Raumeinheiten, seine Grundfläche rund 224 Flächeneinheiten.		3	3	Volumenintegral, Integralbegriff in Anwendungszusammenhängen Erkennen der 5 angegebenen Rechenschritte bzw. Ergebnisse und ihre Interpretation Interpretation der kompletten Rechnung als Extremwertproblem
	∑ 40	**14**	**20**	**6**	

Landesabitur 2007
Beispielaufgaben

Mathematik

Grundkurs

Beispielaufgabe A 3

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **180 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

Erlaubte Hilfsmittel:	**GTR** **Übliche Formelsammlung**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Analysis

Die Sinusfunktion sin(x) soll im Intervall [0, π] durch zwei unterschiedliche quadratische Funktionen f und g angenähert werden.
Die Funktionen f und g sollen dieselben Nullstellen besitzen wie die Sinusfunktion.
Zusätzlich sollen die Funktionen die folgenden Eigenschaften haben:

- f besitzt dasselbe Maximum wie die Sinusfunktion.
- g besitzt in den Nullstellen dieselbe Steigung wie die Sinusfunktion.

Aufgaben

a. Bestimmen Sie die Funktionsterme von f und g.

b. Beurteilen Sie begründet für jede der Funktionen f und g die Güte der Annäherung an die Sinusfunktion, beziehen Sie Flächenuntersuchungen ein.

c. Betrachten Sie die Funktionsterme

$$t_5(x) = \frac{x^5}{5!} - \frac{x^3}{3!} + x \text{ und } t_7(x) = -\frac{x^7}{7!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^3}{3!} + x$$

(*Hinweis: n! = 1·2·3·.....·n*)

Zeichnen Sie die Graphen von t_5 und t_7 und der Sinusfunktion in ein gemeinsames Koordinatensystem und beschreiben Sie deren Verlauf.

Stellen Sie eine Vermutung über den Zusammenhang dieser Funktionsterme mit der Sinusfunktion auf.

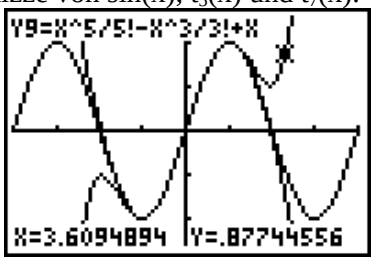
Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

II. Erläuterungen

Zielsetzung
Im Mittelpunkt der Aufgabe steht die Herleitung und Beurteilung unterschiedlicher quadratischer Funktionen, die geeignet sind den Verlauf des Sinusgraphen im Intervall 0 bis π näherungsweise wiederzugeben und die dabei bestimmten Bedingungen genügen (innermathematische Modellierung). Sowohl für den jeweiligen Ansatz zur Bestimmung der Funktionen als auch für die Beurteilung der "Passungsgüte" sind verschiedene Lösungswege möglich.

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösung	**I**	**II**	**III**	**Bezug zum Lehrplan / Bemerkungen**
a.	Bedingungen: $f(0)=0$, $f(\pi)=0$, $f(\pi/2)=1$, $f'(\pi/2)=0$ mögliche Ansätze: $f(x) = a\cdot x^2+b\cdot x +c$ oder $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x$ oder $f(x) = a (x-\pi/2)^2 + 1$ Lösung: $f(x)= -4/\pi^2 (x -\pi/2)^2 +1$	5	6		Es werden einfache Funktionstypen behandelt, deren Verhalten z. T. schon aus dem Mittelstufenunterricht vertraut ist. Je nach gewähltem Ansatz sind einige der Bedingungen zur Bestimmung der Parameter nicht mehr notwendig. Alternativ kann auch bei beiden Funktionen mit dem Ansatz: $f(x) = a \cdot x^2 - a \cdot \pi \cdot x$ weiter gearbeitet werden.
	Bedingungen: $g(0)=0$, $g(\pi)=0$, $g'(0)=\cos(0)$, $g'(\pi)=\cos(\pi)$ $g(x)=a\cdot x^2+b\cdot x +c$ oder $g(x)=a\cdot x^2+b\cdot x$ Lösung: $g(x)=-1/\pi\cdot x^2 +x$	5	6		Lösung eines linearen Gleichungssystems.
b.	Auswahl eines geeigneten Beurteilungskriteriums: Vergleich durch Berechnung der Flächeninhalte zwischen Graph und x-Achse oder des Integrals $\int_0^{\pi} (s(x) - f(x))^2 dx$ Entscheidung : f(x) passt besser.	3	3	4	Visuelle Betrachtung der Graphen allein reicht nicht aus. Falls Differenzen oder prozentuale Abweichungen der Funktionswerte an verschiedenen Stellen betrachtet werden, sollten Teilpunkte gegeben werden.

c.	Skizze von sin(x), $t_5(x)$ und $t_7(x)$.  Die Funktionen nähern die Sinusfunktion in der Umgebung des Nullpunktes an, t_7 besser als t_5 , Vermutung : zusätzliche Terme $\frac{x^9}{9!}$, $\frac{x^{11}}{11!}$ verbessern die Annäherung.	3	4	1	Interpretation von Graphen, die Behandlung von Taylorreihen wird nicht vorausgesetzt.
	∑ 40	**16**	**19**	**5**	

Landesabitur 2007
Beispielaufgaben

Mathematik

Grundkurs

Beispielaufgabe A 4

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **180 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

Erlaubte Hilfsmittel:	**Übliche Formelsammlung** **GTR oder CAS**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Analysis

Aufgaben

Ein Naturschutzgebiet hat in idealisierter Weise den dargestellten Küstenverlauf.
Im Scheitel der Bucht zwischen den zwei Kaps – diese entsprechen den Punkten C und D - befindet sich ein Hafen (Punkt B).
Zur näherungsweisen Beschreibung des Gebietes wird ein rechtwinkliges Koordinatensystem so gelegt, dass der Punkt A im Nullpunkt liegt und die x-Achse das Naturschutzgebiet begrenzt.
Die Koordinaten der Punkte B und C sind gegeben: B=(1|2) und C=(2|4).
Eine Einheit soll 10 km in der Realität entsprechen.

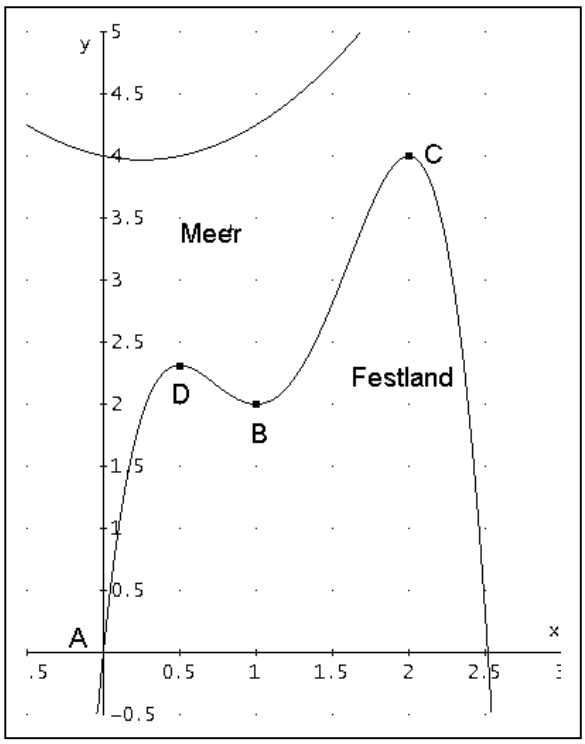


Abb. 1

a. Bestimmen Sie mit Hilfe der Punkte A, B und C eine geeignete Polynomfunktion 4. Grades, die den Küstenverlauf beschreibt. Begründen Sie diesen Ansatz sowie die verwendeten Bedingungen.

b. Zwischen den Spitzen der beiden Kaps C und D soll eine Richtfunkstrecke eingerichtet werden. Verwenden Sie für den Küstenverlauf die Funktion f mit $f(x)=-3x^4+14x^3-21x^2+12x$ und berechnen Sie die Entfernung zwischen C und D.

c. Vom Hafen B startet ein Ausflugsboot zum *nächstgelegenen* Punkt der gegenüberliegenden Küste. Diese Küstenlinie wird beschrieben durch die Funktion
$k(x) = 0{,}5x^2 - 0{,}25x + 4$.
Berechnen Sie die Länge der Fahrtstrecke.

d. Bestimmen Sie den Kurs (Winkel zur Nordrichtung) den das Boot einschlagen muss, um von B zum Punkt P=(0,5|4) zu gelangen.

e. Aus historischen Landkarten geht hervor, dass in früheren Jahrhunderten die Küstenlinie einen anderen Verlauf hatte. Diese alte Küstenlinie ging durch B und C und lässt sich durch eine Funktion g mit $g(x) = 0{,}5x^2 + 0{,}5x + 1$ mit $x \geq 0$ beschreiben.
Berechnen Sie den Landgewinn, der durch die Veränderung des Meeresspiegels entstanden ist, für das Gebiet zwischen A und C und begründen Sie Ihr Vorgehen.

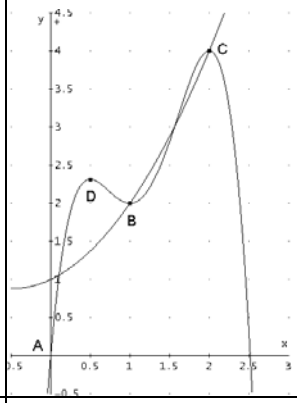
Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

II. Erläuterungen

Zielsetzung
Modellierung von Sachverhalten – Auswertung von Informationen – Darstellung und Erläuterung mathematischer Verfahren – Vernetzung von Teilgebieten (Analysis und Geometrie)
Die Aufgabe kann mit einem GTR oder CAS bearbeitet werden. Der Schwierigkeitsgrad ist in beiden Fällen vergleichbar.

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösungen	**I**	**II**	**III**	**Bezug zum Lehrplan, Bemerkungen**
a.	Ansatz: $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, d.h. es sind 5 Bedingungen notwendig: $f(0)=0$, $f(1)=2$, $f(2)=4$, $f'(1)=0$, $f'(2)=0$ Das LGS kann mit SOLVE (CAS) oder mit der erweiterten Koeffizientenmatrix gelöst werden. Begründung: 3 Extrema, also Grad 4, Bedingungen formulieren.	6	5		Aufstellen eines Funktionsterms aus vorgegebenen Bedingungen. Lösen eines linearen Gleichungssystems.
b.	D wird als rel. Maximum von f bestimmt: (0,5|2,3125) bzw. $(0.5\|\frac{37}{16})$. $\|CD\| = \sqrt{(2-0.5)^2+(4-\frac{37}{16})^2} \approx 2,2578$, also 22,578km	3	2		Die Berechnung der Streckenlänge erfordert eine Abstandsbestimmung (Analyt. Geometrie oder Satz des Pythagoras).
c.	Es gibt mehrere Lösungsmöglichkeiten: Minimierung der Abstandsfunktion: $ab(x)=\sqrt{(1-x)^2+(2-k(x))^2}$. Das Minimum kann algebraisch über die Ableitungsfunktion oder grafisch/numerisch gefunden werden: x=0,5 und k(0,5)=4 als Koordinaten von P.	2	3	4	Verallgemeinerung des Abstandsbegriffes. Die Bearbeitung der Wurzelfunktion mit Rechner stellt keine Schwierigkeit dar. Minimierung der Abstandsfunktion mit algebraischer oder numerischer Lösung.
d.	Der gesuchte Winkel kann als Tangens im rechtwinkligen Dreieck oder mit der Kosinus-Formel berechnet werden. Lösung: 14,04°.	5			Die Winkelberechnung kann elementargeometrisch oder über die Kosinus-Formel (Analyt. Geometrie) erfolgen.

e.	$\int_0^2 (f(x)-g(x))dx \approx 0,4667$, also beträgt der Landgewinn ca. 46,7km^2 .  Begründung: Da nach dem Land*gewinn* gefragt ist, kann das Integral von 0 bis 2 berechnet werden. Für die Bereiche des Landverlusts ergeben sich Flächeninhalte mit negativem Vorzeichen. Abb.2	3	3		Anwendung der Integralrechnung. Die Begründung erfordert Grundlagenwissen zur Flächenberechnung mithilfe von Integralen.
	∑ 36	**19**	**13**	**4**	

Hessisches Kultusministerium

HESSEN

Landesabitur 2007
Beispielaufgaben

Mathematik

Grundkurs

Beispielaufgabe A 5

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **180 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

Erlaubte Hilfsmittel:	**Übliche Formelsammlung** **CAS**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Analysis

Aufgaben

Die Sinusfunktion sin(x) soll im Intervall [0, π] durch drei unterschiedliche quadratische Funktionen f, g und h angenähert werden.
Die Funktionen f, g und h sollen dieselben Nullstellen besitzen wie die Sinusfunktion.
Zusätzlich sollen die Funktionen die folgenden Eigenschaften haben:

- f besitzt dasselbe Maximum wie die Sinusfunktion.
- g besitzt in den Nullstellen dieselbe Steigung wie die Sinusfunktion.
- Die Graphen von h und der Sinusfunktion schließen beide den selben Flächeninhalt mit der x-Achse ein.

a. Bestimmen Sie die Funktionsterme von f, g und h.

b. Beurteilen Sie für jede der Funktionen f, g und h die Güte der Annäherung an die Sinusfunktion und begründen Sie Ihr Vorgehen.

c. Betrachten Sie die Funktionsterme

$$t_5(x) = \frac{x^5}{5!} - \frac{x^3}{3!} + x \text{ und } t_7(x) = -\frac{x^7}{7!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^3}{3!} + x$$

(*Hinweis: n! = 1·2·3·.....·n*)

Zeichnen Sie die Graphen von t_5 und t_7 und der Sinusfunktion in ein gemeinsames Koordinatensytem und beschreiben Sie deren Verlauf.
Stellen Sie eine Vermutung über den Zusammenhang mit der Sinusfunktion auf.

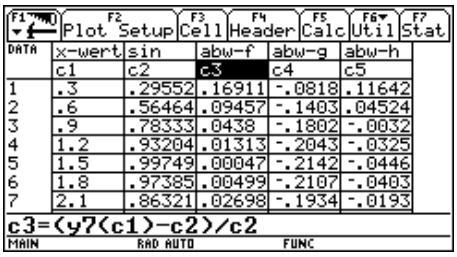
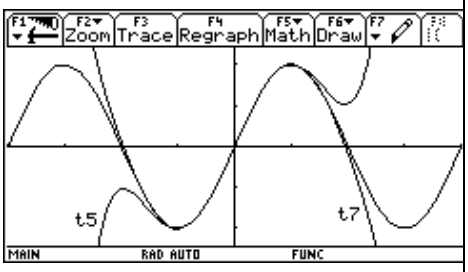
Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

II. Erläuterungen

Zielsetzung
Im Mittelpunkt der Aufgabe steht die Herleitung und Beurteilung unterschiedlicher quadratischer Funktionen, die geeignet sind den Verlauf des Sinusgraphen im Intervall 0 bis π näherungsweise wiederzugeben und dabei bestimmten Bedingungen genügen.
Sowohl für den jeweiligen Ansatz zur Bestimmung der Funktionen als auch für die Beurteilung der "Passungsgüte" sind verschiedene Lösungswege möglich.

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösung	**I**	**II**	**III**	**Bezug zum Lehrplan / Bemerkungen**
a.	Bedingungen: $f(0)=0$, $f(\pi)=0$, $f(\pi/2)=1$, $f'(\pi/2)=0$ mögliche Ansätze: $f(x) = a\cdot x^2+b\cdot x +c$ oder $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x$ oder $f(x) = a (x-\pi/2)^2 + 1$ Lösung: $f(x)= -4/\pi^2 (x -\pi/2)^2 +1$	4	4		Es geht es um die Ermittlung von Funktionstermen nach vorgegeben Bedingungen. Je nach gewähltem Ansatz sind einige der Bedingungen zur Bestimmung der Parameter nicht mehr notwendig. Alternativer Ansatz für f, g und h: $f(x) = a\cdot x^2 - a\cdot\pi\cdot x$
	Bedingungen: $g(0)=0$, $g(\pi)=0$, $g'(0)=\cos(0)$, $g'(\pi)=\cos(\pi)$ $g(x)=a\cdot x^2+b\cdot x +c$ oder $g(x)=a\cdot x^2+b\cdot x$ Lösung: $g(x)=-1/\pi\cdot x^2 +x$	3	3		Wenn die Reihenfolge der Funktionen geändert wird, bzw. wenn f(x) nicht berechnet wird, können die Punkte entsprechend angepasst werden.
	Bedingungen: $h(0)=0$, $h(\pi)=0$, SOLVE(h(0)=0 and $a/3\cdot\pi^3+b/2\cdot\pi^2=2$,{a,b}) Lösung: $h(x)=-12/\pi^3\cdot x^2 + 12/\pi^2\cdot x$	2	6		Das Integral sowie das Gleichungssystem werden mit dem Rechner gelöst.

b.	Auswahl eines geeigneten Beurteilungskriteriums, z. B. Differenz oder prozentuale Abweichung der Funktionswerte.  Alternative: Betrachtung des Integrals $\int_0^{\pi} (s(x) - f(x))^2 dx$ für f, g und h. Entscheidung: h(x) passt am besten.	3	3	4	Die rein visuelle Betrachtung der Graphen allein reicht nicht aus. Das Arbeiten mit Tabellen bietet sich an.
c.	Skizze von s(x) = sin(x), t_5(x) und t_7(x).  Die Funktionen nähern die Sinusfunktion in der Umgebung des Nullpunktes an, t_7 besser als t_5 , Vermutung : zusätzliche Terme $\frac{x^9}{9!}$, $\frac{x^{11}}{11!}$, ... verbessern die Annäherung.	4	3	1	Die Behandlung von Taylorreihen wird nicht vorausgesetzt. Beschreibung und Interpretation von Graphen.
	∑ 40	**16**	**19**	**5**	

Landesabitur 2007
Beispielaufgaben

Mathematik

Grundkurs

Beispielaufgabe A 6

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **180 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

Erlaubte Hilfsmittel:	**Übliche Formelsammlung** **Taschenrechner**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Lineare Algebra / Analytische Geometrie

Aufgaben

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & -4 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & -3 \\ -3x_1 & + & 9x_2 & + & tx_3 & = & 15 \end{array}$$

a. Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem für $t \neq 6$ eindeutig lösbar ist.

b. Bestimmen Sie für $t = 6$ die Lösungsmenge.

c. Berechnen Sie die Schnittpunkte S_{12}, S_{13} und S_{23} der Geraden mit der Gleichung g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $r \in R$ mit den drei Koordinatenebenen und zeichnen Sie die Gerade in ein geeignetes Koordinatensystem ein. Die Lage bezüglich der drei Koordinatenachsen muss dabei eindeutig zu erkennen sein.

d. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das durch die drei Punkte S_{13}, S_{23} und den Nullpunkt gebildet wird. Beschreiben Sie Ihren Lösungsweg.

e. Unter welchem Winkel schneidet die Gerade die 1-2-Ebene? Erläutern Sie Ihren Lösungsweg.

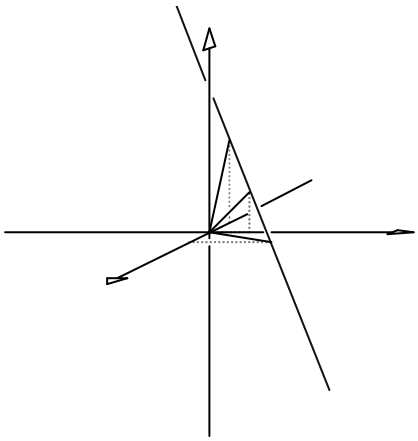
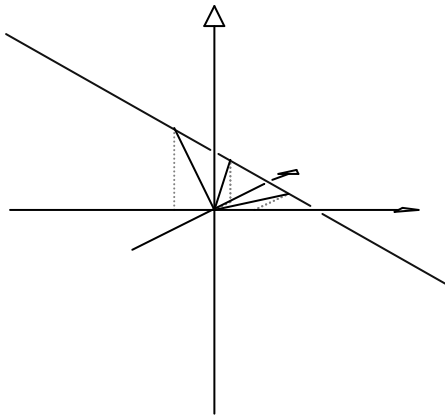
Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

II. Erläuterungen

Zielsetzung
Die Aufgabe verlangt neben der Beherrschung grundlegender Rechenverfahren der Linearen Algebra räumliches Vorstellungsvermögen im Zusammenhang mit der Lage einer Geraden im Raum bezüglich der Ebenen eines Koordinatensystems.

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösungen	**I**	**II**	**III**	**Bezug zum Lehrplan / Bemerkungen**
a.	Gauß-Algorithmus $\begin{array}{rrr\|r l} 1 & -2 & -1 & -3 & \\ 2 & -3 & -1 & -4 & (2)-2\cdot(1) \\ -3 & 9 & t & 15 & (3)\cdot 3\cdot(1) \\ \hline 1 & -2 & -1 & -3 & \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \\ 0 & 3 & t-3 & 6 & (3)-3\cdot(2) \\ \hline 1 & -2 & -1 & -3 & \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \\ 0 & 0 & t-6 & 0 & \end{array}$ Eindeutig lösbar nur für $t \neq 6$. Bei $t = 6$ entsteht eine Nullzeile, also nicht eindeutig lösbar.	4	2		Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme (Gauß-Algorithmus)
b.	Für t = 6: $\begin{array}{rrr\|r l} 1 & -2 & -1 & -3 & (1)+2\cdot(2) \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$ Lösung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, r \in R.$	2			

c.	1-2-Ebene: $x_3 = 0$ für $r = 0$, also $\vec{x}_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 1-3-Ebene: $x_2 = 0$ für $r = 2$, also $\vec{x}_{13} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 2-3-Ebene: $x_1 = 0$ für $r = 1$, also $\vec{x}_{23} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	4	5		Geometrische Interpretation von Lösungsmengen, Umgang mit Parameterdarstellung von Geraden.
	 oder  Der räumliche Eindruck muss eindeutig zu erkennen sein.				Lagebeziehung von Punkten, Geraden und Ebenen im Raum. Die Entscheidung, welche Linien vorne und welche hinten sind, erfordert eigenständige Überlegungen.

d.	$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} = 0$, also $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, d. h., die drei Punkte bilden ein rechtwinkliges Dreieck. $\left\lvert \vec{x}_{13} - \vec{x}_{23} \right\rvert = \sqrt{3}$ und $\left\lvert \vec{x}_{23} \right\rvert = \sqrt{2}$ Damit A = $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \approx 1{,}22$ Der Lösungsweg muss nachvollziehbar beschrieben werden.		8		Skalarprodukt, Länge eines Vektors und Orthogonalität
e.	Senkrechte Projektion der Geraden in die 1-2-Ebene: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}, s \in R$ Gesucht: Winkel α zwischen den Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$: $\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}}{\left\lvert\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rvert \cdot \left\lvert\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\rvert} = \frac{2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} \approx 0{,}816$ $\alpha \approx 35{,}3°$			5	Winkel zwischen Vektoren Die Berechnung eines Schnittwinkels zwischen einer Geraden und einer Ebene im Raum ist im Lehrplan nicht verbindlich vorgeschrieben. Hier sind eigene Überlegungen notwendig.
	Σ 30	**10**	**15**	**5**	

Landesabitur 2007
Beispielaufgaben

Mathematik

Grundkurs

Beispielaufgabe A 7

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

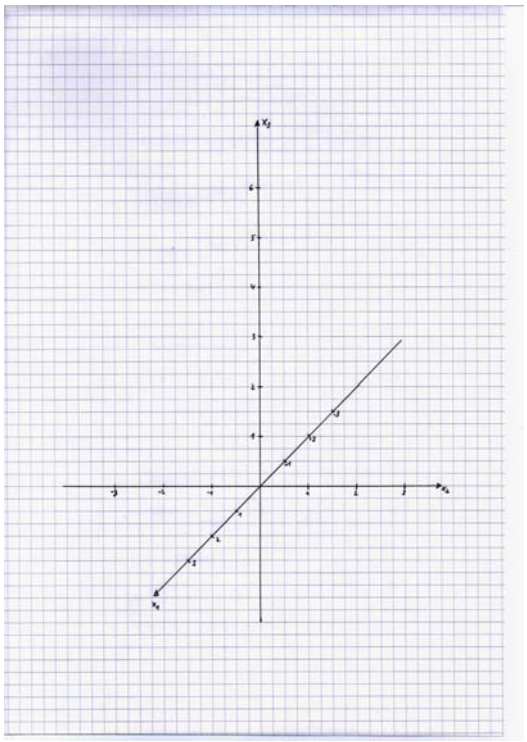
Bearbeitungszeit: **180 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

Erlaubte Hilfsmittel:	**Übliche Formelsammlung** **TR, GTR oder CAS**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Lineare Algebra / Analytische Geometrie

Aufgaben



Das Dach eines Turmes hat die Eckpunkte A(3|-3|0), B(3|3|0), C(-3|3|0), D(-3|-3|0) und S(0|0|6).

a. Zeichnen Sie diese Punkte in ein der Vorgabe entsprechendes Koordinatensystem ein und benennen Sie die geometrische Form des Daches.

b. Die Dachfläche BCS liegt in der Ebene E. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E. (Mögliches Ergebnis: $2x_2 + x_3 = 6$)

c. Zur Verstärkung des Dachstuhls wird ein Stab eingezogen, der von C ausgeht und die Kante AS senkrecht im Punkt F abstützt. Berechnen Sie die Koordinaten von F sowie die Länge dieses Stützstabes. Beschreiben Sie den Lösungsweg.

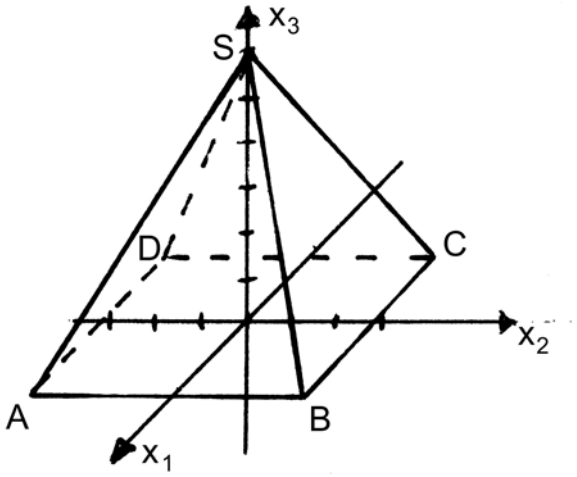
d. Durch eine quadratische Öffnung A'B'C'D' mit A'(0,5|–0,5|0) und B'(0,5|0,5|0) soll der Dachboden mit Hilfe einer Leiter, die mittig an eine der vier Kanten der Öffnung angelehnt wird, betreten werden können. Beurteilen Sie, ob die beiden Stützstäbe, die zwischen den Punkten G(0|–3|0) und H(0|1,8|2,4) bzw. zwischen den Punkten C(-3|3|0) und F(1|–1|4) eingezogen wurden, das Betreten des Dachbodens mittels der Leiter behindern. (1 LE entspricht 1 m.)

Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

II. Erläuterungen

Zielsetzung
Die Lösung der Aufgabe erfordert ein gutes räumliches Vorstellungsvermögen. Neben dem sachgerechten Umgehen mit grundlegenden Begriffen und Verfahren sowie dem angemessenen Verwenden der Fachsprache muss das Gelernte selbstständig auf den neuen Sachverhalt „Dach“ übertragen werden. Die Frage in Teil d. soll zu selbstständigem Argumentieren und Begründen anregen.

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösung	**I**	**II**	**III**	**Bezug zum Lehrplan / Bemerkungen**
a.	 Erkennen, dass eine quadratische Pyramide vorliegt.	4	3		Körper
b.	Aufstellen einer Ebenengleichung in Parameterform. $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ Umwandeln in Koordinatenform. $E: 2x_2 + x_3 = 6$	2	2		Ebenen in Parameter- und Koordinatendarstellung
c.	Erkennen, dass die Berechnung der Stablänge l gleichbedeutend mit der Berechnung der Länge des Lotes von C auf AS ist. Beschreibung des Lösungsweges. Berechnung der Koordinaten des Fußpunktes F dieses Lotes: F(1|-1|4). Berechnung der Länge des Lotes als Stablänge $l = \sqrt{48}$ LE.	4	8		Abstandsbestimmungen

d.	Aufstellen von Gleichungen der Geraden, auf denen die Stützstäbe liegen. $CF: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $GH: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Erkennen, dass der Stützstab CF in C'(-0,5|0,5|0) die geringste Höhe von 2,5 m bezüglich der Öffnung hat. Erkennen, dass der Stützstab GH den Mittelpunkt der Kante A'D' in 1,25 m Höhe und den Mittelpunkt der Kante B'C' in 1,75 m Höhe überquert. Urteilen.		3	4	Geraden und ihre räumliche Lage
	Σ 30	**10**	**16**	**4**	

Landesabitur 2007
Beispielaufgaben

Mathematik

Grundkurs

Beispielaufgabe A 8

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **180 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

Erlaubte Hilfsmittel:	**Übliche Formelsammlung** **GTR oder CAS**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Lineare Algebra / Analytische Geometrie

Aufgaben

a. Gegeben ist eine Gerade g mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $r \in R$.

Berechnen Sie die Schnittpunkte S_{12}, S_{13} und S_{23} der Geraden g mit den drei Koordinatenebenen und zeichnen Sie die Gerade in ein geeignetes Koordinatensystem ein. Die Lage bezüglich der drei Koordinatenachsen muss dabei eindeutig zu erkennen sein.

b. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das durch die drei Punkte S_{13}, S_{23} und den Nullpunkt gebildet wird. Beschreiben Sie Ihren Lösungsweg.

c. Unter welchem Winkel schneidet die Gerade g die 1-2-Ebene?

d. Die durch das Dreieck in Aufgabenteil b festgelegte Ebene wird von einer zweiten Ebene $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $s, k \in R$, geschnitten.

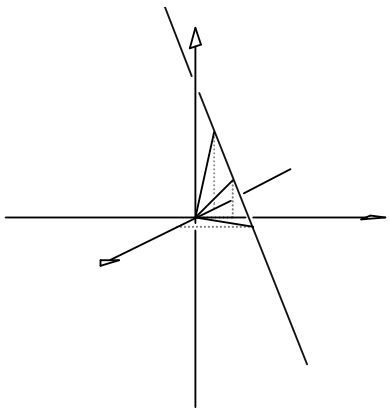
Berechnen Sie die Schnittgerade.

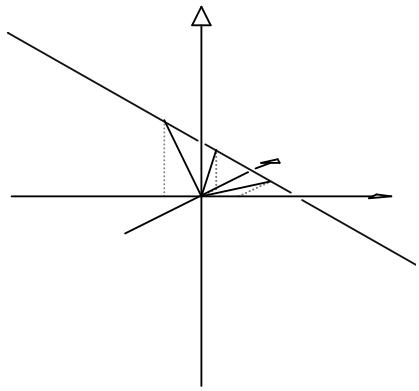
Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

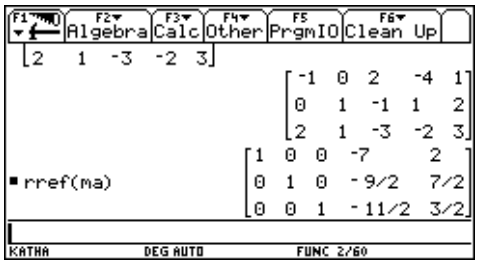
II. Erläuterungen

Zielsetzung
Die Aufgabe verlangt neben der Beherrschung grundlegender Rechenverfahren der Linearen Algebra räumliches Vorstellungsvermögen im Zusammenhang mit der Lage einer Geraden im Raum bezüglich der Ebenen eines Koordinatensystems.

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösungen	**I**	**II**	**III**	**Bezug zum Lehrplan / Bemerkungen**
a.	1-2-Ebene: $x_3 = 0$ für r = 0, also $\vec{x}_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 1-3-Ebene: $x_2 = 0$ für r = 2, also $\vec{x}_{13} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 2-3-Ebene: $x_1 = 0$ für r = 1, also $\vec{x}_{23} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 	4	5		Geometrische Interpretation von Lösungsmengen, Umgang mit Parameterdarstellung von Geraden. Lagebeziehung von Punkten, Geraden und Ebenen im Raum.

	oder  Der räumliche Eindruck muss eindeutig zu erkennen sein.				
b.	$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} = 0$, also $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, d. h., die drei Punkte bilden ein rechtwinkliges Dreieck. $\left\lvert \vec{x}_{13} - \vec{x}_{23} \right\rvert = \sqrt{3}$ und $\left\lvert \vec{x}_{23} \right\rvert = \sqrt{2}$ Damit A = $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \approx 1{,}22$ Alternativ kann eine Dreieckshöhe als kürzester Abstand eines Eckpunktes von der gegenüberliegenden Seite berechnet werden. Der Lösungsweg muss nachvollziehbar beschrieben werden.		8		Skalarprodukt, Länge eines Vektors und Ortogonalität oder Extremwertberechnung
c.	Senkrechte Projektion der Geraden in die 1-2-Ebene: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$, s ∈ R Gesucht: Winkel α zwischen den Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$: $\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}}{\left\lvert\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rvert \cdot \left\lvert\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\rvert} = \frac{2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} \approx 0{,}816$ $\alpha \approx 35{,}3°$			5	Winkel zwischen Vektoren

d.	Gleichung der 1. Ebene: $\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, erweiterte Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems kann mit dem Befehl rref bearbeitet werden:  Schnittgerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3.5 \\ 7.5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -14 \\ 9 \\ 37 \end{pmatrix}$	6	2		Schnitt zweier Ebenen und Bestimmung der Schnittgerade.
	Σ 30	**10**	**15**	**5**	

Landesabitur 2007
Beispielaufgaben

Mathematik

Grundkurs

Beispielaufgabe A 9

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **180 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

Erlaubte Hilfsmittel:	**Übliche Formelsammlung, Tabellen der Binomialverteilung, Taschenrechner**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Stochastik

Aufgaben

Zur Premiere eines Films bringt eine Schokoladenfirma Überraschungseier mit Filmfiguren auf den Markt. Die Firma wirbt damit, dass sich in jedem 5. Überraschungsei eine Filmfigur befindet.

a. Für einen Kindergeburtstag werden 20 Überraschungseier gekauft, wobei man davon ausgehen kann, dass die Verteilung der Figuren zufällig ist.

Erklären Sie, welche Bedeutung in diesem Zusammenhang die folgende Rechnung hat: $\binom{20}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{18} \approx 0{,}13691$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten P(A) und P(B) der Ereignisse:
A: In keinem Ei ist eine Figur aus dem Film.
B: Es befinden sich in höchstens 2 Eiern Figuren aus dem Film.

b. Ein Käufer möchte unbedingt eine Filmfigur bekommen. Berechnen Sie, wie viele Überraschungseier er mindestens kaufen muss, um mit 99,9 %iger Sicherheit mindestens ein Überraschungsei mit einer Filmfigur zu erhalten?

c. Bei der Produktion der Überraschungseier treten nur die beiden Fehler

F_1: falsches Gewicht der Schokoladenhülle und
F_2: fehlerhafte Verpackung auf.

F_1 und F_2 treten unabhängig voneinander auf. Ein Ei ist einwandfrei, wenn es keinen der beiden Fehler aufweist, was erfahrungsgemäß bei 90 % der Eier der Fall ist. Erfahrungsgemäß haben 7,5 % der Schokohüllen ein falsches Gewicht.

Veranschaulichen Sie die Zusammenhänge mit einem Baumdiagramm und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der Fehler F_2 auftritt.

d. Ein Kunde vermutet, dass die Firma mit der Werbung betrügt, d. h. in Wirklichkeit wird die Behauptung „In jedem fünften Ei … “ nicht eingehalten.
Er beauftragt ein Kontrollinstitut, dies zu untersuchen. Das Institut kauft 100 Überraschungseier.

d1. Erklären Sie, warum aus Sicht des Kunden die Behauptung nur abzulehnen ist, wenn zu wenige Figuren gefunden werden.

Das Institut entschließt sich, die Behauptung der Firma abzulehnen, wenn bei 100 gekauften Überraschungseiern höchstens 11 Figuren gefunden werden.

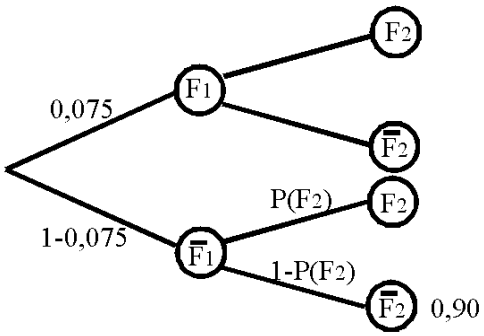
d2. Erklären Sie, was hier ein Fehler 1. Art ist und begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art hier kleiner als 2,5 % ist.

Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

II. Erläuterungen / IV. Bewertung und Beurteilung

III. Lösungshinweise

	Erwartete Lösungen	I	II	III	Bemerkungen
a.	Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der Überraschungseier mit einer Filmfigur, wenn man zufällig 20 Eier erwirbt. X ist binomialverteilt. $(n = 20; \quad p = \frac{1}{5})$ Der Term $\binom{20}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{18} \approx 0{,}13691$ berechnet die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis: „Genau zwei Eier enthalten Figuren aus dem Film“. $P(A) = \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{20} \approx 0{,}0115$ $P(B) = \sum_{k=0}^{2} \binom{20}{k} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{20-k} \approx 0{,}2061$	6	4		Zufallsgröße Bernoullikette, Binomial-verteilung, Binomialsummenfunktion
b.	$P(X \geq 1) \geq 0{,}999 \Leftrightarrow P(X=0) < 0{,}001$ $\left(\frac{4}{5}\right)^n < 0{,}001$ $n > \frac{\ln 0{,}001}{\ln 4 - \ln 5}$ $n > 30{,}96$ Text: mindestens 31 Eier müssen gekauft werden, ...	2	3		Bernoullikette, Berechnung der Kettenlänge Rechnung mit Gleichheit möglich Lösung durch Probieren möglich, ein Punkt Abzug

c.	 Aus einem Baumdiagramm ergibt sich: $P(\text{"}Ei\ ist\ einwandfrei\text{"}) = 0{,}9 = P(\overline{F}_1)\cdot P(\overline{F}_2) \Leftrightarrow$ $0{,}9 = (1-0{,}075)\cdot(1-P(F_2)) \Leftrightarrow$ $P(F_2) = \frac{1}{37} = 0{,}\overline{027} \approx 2{,}70\%$	2	3		Unabhängigkeit von zwei Ereignissen, Pfadregeln
d.	d1. Aus Sicht des Kunden liegt nur ein Betrug vor, wenn sich zu wenige Figuren in den Überraschungseiern befinden. Ein höherer Anteil würde (gerne) akzeptiert. Es liegt hier also ein linksseitiger Signifikanztest vor. d2. Ein Fehler 1. Art bedeutet, dass eine richtige Hypothese abgelehnt wird. Hier: Obwohl jedes 5. Ei eine Figur enthält, wird dem Hersteller Betrug vorgeworfen. Für $p = \frac{1}{5}$ (Behauptung) beschreibe die Zufallsvariable X die Anzahl der Überraschungseier mit einer Filmfigur unter den 100 erworbenen Eiern. X ist binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = \frac{1}{5}$. Damit beträgt: $\mu = 100\cdot 1/5 = 20$ und $\sigma = \sqrt{100\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}} = 4$ Getestet wird hier die Hypothese H_0: $p \geq 1/5$ (linksseitiger Signifikanztest) Entscheidungsregel des Instituts: Verwirf $H_0 \Leftrightarrow$ Testergebnis ≤ 11. Der Ablehnungsbereich liegt außerhalb der 2σ-Umgebung um den Erwartungswert, weil $11 < \mu - 2\sigma = 20 - 8 = 12$.				Einseitiger Hypothesentest, Fehler 1. Art Erwartungswert, Standardabweichung, σ-Umgebungen,

	Da die Wahrscheinlichkeit für alle Ergebnisse innerhalb der 2σ-Umgebung ca. 95,5 % beträgt, ergibt die Wahrscheinlichkeit für Ergebnisse außerhalb dieser Umgebung nur ca. 4,5 %. Das Ereignis $X \leq 11$ (auf der linken Seite) hat also eine Wahrscheinlichkeit von maximal 2,25 % (<2,5 %).	2	5	3	Neben der Berechnung der Wahrscheinlichkeit mit der Tabelle ist auch (wie hier beschrieben) eine Abschätzung des Fehlers 1. Art über σ-Umgebungen möglich
	Σ 30	**12**	**15**	**3**	

HESSEN

Landesabitur 2007
Beispielaufgaben

Mathematik

Grundkurs

Beispielaufgabe A 10

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **180 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

Erlaubte Hilfsmittel:	**Übliche Formelsammlung** **Tabellen zur Binomialverteilung** **TR, GTR, CAS**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Stochastik

Eine Bierbrauerei stellt sich beim Verkauf von Flaschenbier vollständig um. Der bisher übliche Kronkorken wird durch einen Bügelverschluss ersetzt. Leider ergeben sich bei der Produktion Probleme mit der neuen Verschlusstechnik. Nicht alle Flaschen sind absolut luftdicht verschlossen.

a. In einem Getränkehandel steht ein Kasten mit 20 Flaschen Bier, von denen sechs Flaschen nicht korrekt verschlossen sind. Ein Kunde entnimmt dem Kasten drei Flaschen. Stellen Sie den Vorgang in einem Baumdiagramm dar. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind mindestens zwei Flaschen undicht?

b. Ein Kunde entnimmt dem Kasten fünf Flaschen Bier. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind alle fünf Flaschen nicht richtig verschlossen?

Es zeigt sich, dass ungefähr 5 % aller abgefüllten Flaschen nicht vollständig luftdicht verschlossen sind. Aus diesem Grund werden verschlossene Flaschen vom Förderband genommen und einem Dichtheitstest unterzogen.

c. Bei einer Kontrolle werden 20 Flaschen entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
   - c1. keine der Flaschen undicht ist.
   - c2. höchstens drei Flaschen fehlerhaft sind.
   - c3. zwei bis fünf Flaschen (einschließlich) als Ausschuss betrachtet werden müssen.

d. Stündlich werden 100 Flaschen kontrolliert. Steigt der Anteil der undichten Flaschen, so muss der Produktionsprozess gestoppt werden, um entsprechende Korrekturen an den Maschinen vornehmen zu können.

   Die Produktion soll angehalten werden, wenn mehr als 7 undichte Flaschen entdeckt werden. Beurteilen Sie diese Entscheidungsregel anhand eines Hypothesentests und beschreiben Sie, welche Fehler man bei dieser Entscheidung begehen kann.

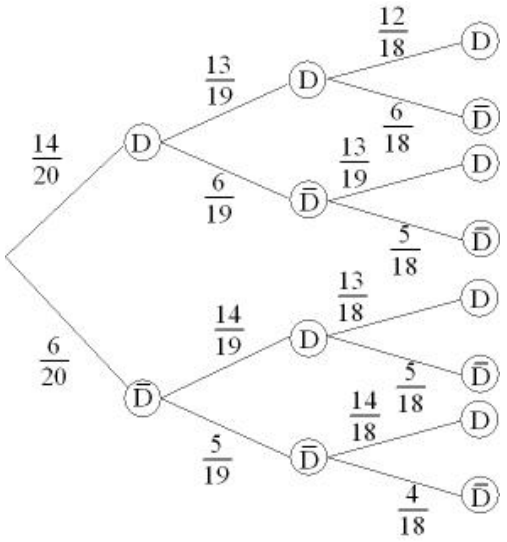
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Vermehrung des Ausschusses unentdeckt bleibt, obwohl sich die Wahrscheinlichkeit für eine undichte Flasche tatsächlich verdoppelt hat?

Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

II. Erläuterungen

Zielsetzung
Die Aufgabe orientiert sich an den Leitideen Zufall, Messen und Modellieren. Sowohl ein Baumdiagramm als auch einfache kombinatorische Überlegungen werden gefordert. Darstellungsformen und Methoden aus dem Themenfeld Binomialverteilung und Hypothesentest müssen angewendet und in einem Sachkontext interpretiert werden. Die Aufgabe erfordert die Erläuterung des mathematischen Modells bezüglich möglicher Entscheidungsfehler.

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösungen	I	II	III	Bemerkungen
a.	 $P_{(E)} = \frac{6\cdot5\cdot4}{20\cdot19\cdot18} + 3\cdot\frac{6\cdot5\cdot14}{20\cdot19\cdot18} \approx 0{,}2018$	5	3		Baumdiagramm. Ziehen ohne Zurücklegen Produktregel. Summenregel.
b.	$P(x=5) = \frac{\binom{6}{5}}{\binom{20}{5}} \approx 0{,}04\%$	1	2		Kombinatorik. Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen.

c.	Binomialverteilung mit n = 20 und p = 0,05. c1. $B(x = 0) = (1 - 0{,}05)^{20} = 0{,}3585$ c2. $B(x \le 3) = \sum_{k=0}^{3} \binom{20}{k} \cdot 0{,}05^k \cdot 0{,}95^{20-k} = 0{,}9841$ c3. $B(3 \le x \le 6) = \sum_{k=0}^{5} \binom{20}{k} \cdot 0{,}05^k \cdot 0{,}95^{20-k}$ $- \sum_{k=0}^{1} \binom{20}{k} \cdot 0{,}05^k \cdot 0{,}95^{20-k} = 0{,}2639$	6	2		Bernoullikette. Binomialverteilung. Binomialsummenfunktion. Arbeiten mit Tabellen.
d.	Fehler 1. Art: $\alpha = P(\text{„mehr als 7 Flaschen undicht“})$ $= 1 - P(x \le g) = 1 - P(x \le 7) = 1 - 0{,}8720 = 0{,}128$ Die Wahrscheinlichkeit, sich hierbei zu irren, liegt bei 12,8 %. Diese Wahrscheinlichkeit erscheint zu groß. In der Regel wird mit einem Signifikanzniveau von 5 % oder sogar weniger gerechnet. Es empfiehlt sich, die Grenze zu erhöhen. Allerdings vermindert sich der Fehler 2. Art, wenn die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art steigt. Der Fehler 1. Art besteht darin, den Prozess zu stoppen, obwohl kein Grund dazu besteht. Dieser Fehler hat keine Auswirkung auf die Qualität der ausgelieferten Ware. Der Fehler 2. Art bedeutet, dass die Produktion weiterläuft, obwohl zu viele Flaschen undicht sind.. Berechnet wird die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 9 undichte Flaschen entdeckt werden, wenn p = 0,1 beträgt (Fehler 2. Art). $\beta = P(\text{„max. 9 Flaschen undicht“}) = P(x \le 9) = 0{,}4513$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 45 % wird der vermehrte Anteil an undichten Flaschen nicht entdeckt, obwohl sich die Quote verdoppelt hat.		7	4	Einseitiger Hypothesentest. Berechnung des Fehlers 1. Art. Beurteilung des Rechenergebnisses.. Erläuterung des Fehlers 1. Art und 2. Art. Berechnung des Fehlers 2. Art.
	Σ 30	**12**	**14**	**4**	

Landesabitur 2007
Beispielaufgaben

Mathematik

Grundkurs

Beispielaufgabe A 11

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **180 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

Erlaubte Hilfsmittel:	**Übliche Formelsammlung** **GTR, CAS**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Stochastik

Aufgaben

Zur Premiere eines Films bringt eine Schokoladenfirma Überraschungseier mit Filmfiguren auf den Markt. Die Firma wirbt damit, dass sich in jedem 5. Überraschungsei eine Filmfigur befindet.

a. Für einen Kindergeburtstag werden 20 Überraschungseier gekauft, wobei man davon ausgehen kann, dass die Verteilung der Figuren zufällig ist.

Erklären Sie, welche Bedeutung in diesem Zusammenhang die folgende Rechnung hat: $\binom{20}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{18} \approx 0{,}13691$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten P(A) und P(B) der Ereignisse:
A: In keinem Ei ist eine Figur aus dem Film.
B: Es befinden sich in höchstens 2 Eiern Figuren aus dem Film.

b. Ein Käufer möchte unbedingt eine Filmfigur bekommen. Berechnen Sie, wie viele Überraschungseier er mindestens kaufen muss, um mit 99,9 %iger Sicherheit mindestens ein Überraschungsei mit einer Filmfigur zu erhalten?

c. Bei der Produktion der Überraschungseier treten nur die beiden Fehler

F_1: falsches Gewicht der Schokoladenhülle und
F_2: fehlerhafte Verpackung auf.

F_1 und F_2 treten unabhängig voneinander auf. Ein Ei ist einwandfrei, wenn es keinen der beiden Fehler aufweist, was erfahrungsgemäß bei 90 % der Eier der Fall ist. Erfahrungsgemäß haben 7,5 % der Schokohüllen ein falsches Gewicht.

Veranschaulichen Sie die Zusammenhänge mit einem Baumdiagramm und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der Fehler F_2 auftritt.

d. Ein Kunde vermutet, dass die Firma mit der Werbung betrügt, d. h. in Wirklichkeit wird die Behauptung „In jedem fünften Ei … “ nicht eingehalten.
Er beauftragt ein Kontrollinstitut, dies zu untersuchen. Das Institut kauft 160 Überraschungseier.

d1. Erklären Sie, warum aus Sicht des Kunden die Behauptung nur abzulehnen ist, wenn zu wenige Figuren gefunden werden.

Das Institut entschließt sich, die Behauptung der Firma abzulehnen, wenn nicht mehr als 25 Figuren gefunden werden.

d2. Erklären Sie, was hier der Fehler 1. Art ist und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für diesen.

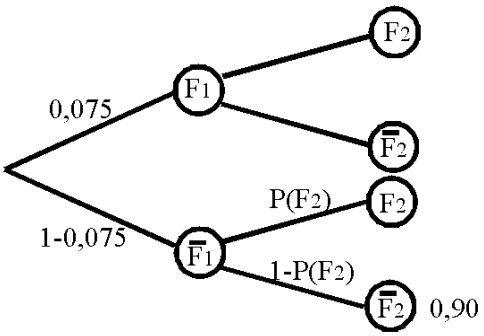
d3. Verändern Sie die Entscheidungsregel so, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1.Art kleiner als 2,5 % ist.

Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

II. Erläuterungen

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösungen	I	II	III	Bemerkungen
a.	Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der Überraschungseier mit einer Filmfigur, wenn man zufällig 20 Eier erwirbt. X ist binomialverteilt. $(n = 20; \quad p = \frac{1}{5})$ Der Term $\binom{20}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{18} \approx 0{,}13691$ berechnet die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis: „Genau zwei Eier enthalten Figuren aus dem Film“. $P(A) = \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{20} \approx 0{,}0115$ $P(B) = \sum_{k=0}^{2} \binom{20}{k} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{20-k} \approx 0{,}2061$	6	4		Zufallsgröße Bernoullikette, Binomialverteilung, Binomialsummenfunktion
b.	$P(X \geq 1) \geq 0{,}999 \Leftrightarrow P(X=0) < 0{,}001$ $\left(\frac{4}{5}\right)^n < 0{,}001$ $n > \frac{\ln 0{,}001}{\ln 4 - \ln 5}$ $n > 30{,}96$ Text: mindestens 31 Eier müssen gekauft werden, ...	2	3		Bernoullikette, Berechnung der Kettenlänge Rechnung mit Gleichheit möglich Lösung durch Probieren möglich, ein Punkt Abzug

c.	 Aus einem Baumdiagramm ergibt sich: $P(\text{"}Ei\ ist\ einwandfrei\text{"}) = 0{,}9 = P(\overline{F}_1)\cdot P(\overline{F}_2) \Leftrightarrow$ $0{,}9 = (1-0{,}075)\cdot(1-P(F_2)) \Leftrightarrow$ $P(F_2) = \frac{1}{37} = 0{,}\overline{027} \approx 2{,}70\%$	2	3		Unabhängigkeit von zwei Ereignissen, Pfadregeln
d.	d1. Aus Sicht des Kunden liegt nur ein Betrug vor, wenn sich zu wenige Figuren in den Überraschungseiern befinden. Ein höherer Anteil würde (gerne) akzeptiert. Es liegt hier also ein linksseitiger Signifikanztest vor. d2. Ein Fehler 1. Art bedeutet, dass eine richtige Hypothese abgelehnt wird. Hier: Obwohl jedes 5. Ei eine Figur enthält, wird dem Hersteller Betrug vorgeworfen. Für $p = \frac{1}{5}$ (Behauptung) beschreibe die Zufallsvariable X die Anzahl der Überraschungseier mit einer Filmfigur unter den 160 erworbenen Eiern. X ist binomialverteilt mit $n = 160$ und $p = \frac{1}{5}$. Damit beträgt: $\mu = 160\cdot 1/5 = 32$ und $\sigma = \sqrt{160\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}} \approx 5{,}06$ Getestet wird hier die Hypothese H_0: $p \geq 1/5$ (linksseitiger Signifikanztest) Verwirf $H_0 \Leftrightarrow$ Testergebnis ≤ 25. Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art:				Einseitiger Hypothesentest, Fehler 1. Art Erwartungswert, Standardabweichung, σ-Umgebungen, Abschätzung des Fehlers 1. Art

	$P(X \le 25) = \sum_{k=0}^{25} \binom{160}{k} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{160-k} \approx 0{,}0969$ $P(X \le 25) \approx 9{,}69\%$ Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art beträgt hier 9,69 %. d3. $P(X \le g) = \sum_{k=0}^{g} \binom{160}{k} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{160-k} < 0{,}025$ $P(X \le 22) \approx 2{,}64\%$ $P(X \le 21) \approx 1{,}56\%$ Neue Entscheidungsregel: Verwirf $H_0 \Leftrightarrow$ Testergebnis ≤ 21 Der Fehler 1. Art beträgt dann höchstens 1,56 %.	2	5	3	Berechnung der Wahrscheinlichkeiten für g kleiner als 25 bis das Kriterium erfüllt ist
	Σ 30	**12**	**15**	**3**	