Landesabitur 2007
Beispielaufgaben

Mathematik

Leistungskurs

Beispielaufgabe A 1

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **240 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

Erlaubte Hilfsmittel:	**Übliche Formelsammlung** **Taschenrechner**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Analysis

Aufgaben

Für jede reelle Zahl t ist eine Funktionenschar f_t gegeben durch

$$f_t(x) = \frac{t + \ln(x)}{x}\ ;\ x > 0$$

a. Weisen Sie nach, dass f_t Null-, Extrem- und Wendestellen besitzt. Untersuchen Sie auch das Verhalten für $x \to 0$ und $x \to \infty$ und zeichnen Sie den Graphen f_2 für $0 < x \le 5$. (1LE $\hat{=}$ 2cm)

b. Erklären Sie, was in den Schritten 1 bis 3 im nebenstehenden Kasten berechnet wird. Was beschreibt y in Zeile 3?
Übertragen Sie die Rechnung auf den Punkt $\left(e^{1-t} \middle| e^{t-1}\right)$ der Funktionenschar $f_t(x)$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

c. Die Funktion f_t, die x-Achse und die zur y-Achse parallele Gerade durch den Hochpunkt von f_t umschließen eine endliche Fläche. Bestimmen Sie deren Inhalt und interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Bestimmung einer besonderen Kurve:

Für $g_t(x) = 2x^4 + tx^3$ ist der Punkt $\left(-\frac{3}{8}t \middle| -\frac{27}{2048}t^4\right)$ Tiefpunkt .

1. $x = -\frac{3}{8}t$
2. $t = -\frac{8}{3}x$
3. $y = -\frac{27}{2048}(-\frac{8}{3}x)^4 = -\frac{2}{3}x^4$

d. Lässt man den Graphen f_2 (siehe a) im Intervall [e^{-2}, h] um die x-Achse rotieren, so entsteht ein Rotationskörper, der einer Rotweinkaraffe ähnelt.
Man kann jetzt das Volumen der Karaffe in Abhängigkeit zur Füllhöhe h berechnen.
Möchte man zu einem gegebenen Volumen V dieser „Karaffe“ die Füllhöhe h bestimmen, so gelangt man nach einigen Umformungsschritten zu folgender Gleichung:

$$z^2 + 6z + 10 = (\frac{-V}{\pi} + 14{,}78)e^z \qquad \text{(mit } z = \ln(h)\text{)}$$

Diese Gleichung ist mit den herkömmlichen Mitteln algebraisch nicht lösbar. Erläutern Sie, wie man zumindest näherungsweise für z eine Lösung bestimmen könnte. Begründen Sie, dass es nicht für jeden Wert von V eine Lösung geben kann.

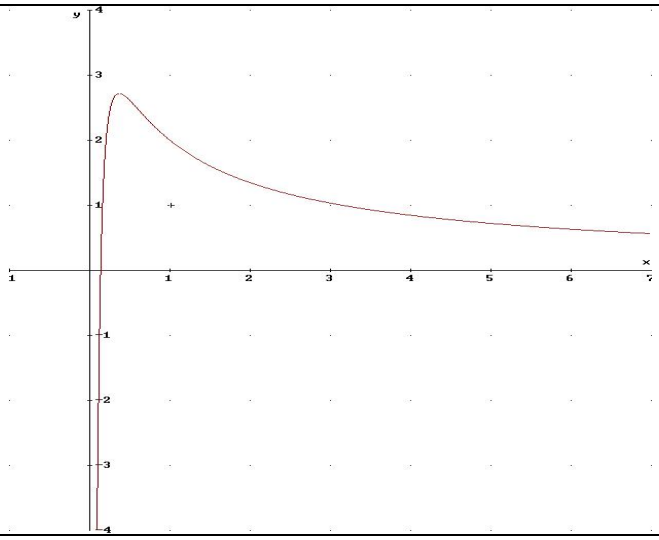
Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

II. Erläuterungen

Zielsetzung:
Im Wesentlichen ist diese Aufgabe an traditionellen Fragestellungen orientiert. Sie erfordert einen sicheren Umgang mit den Kalkülen der Analysis. Dabei müssen gefundene Ergebnisse interpretiert und Rechenwege erläutert werden. Da die Kenntnis des Begriffs der Ortskurve nicht vorausgesetzt werden kann, soll dies im Aufgabenteil b) zunächst an einem Beispiel erläutert und dann auf die „eigentliche“ Funktion übertragen werden. Im weiteren Verlauf der Aufgabe wird erwartet, dass man Lösungsansätze entwickelt, wenn herkömmliche Rechenroutinen nicht zum gewünschten Erfolg führen.

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösungen	I	II	III	Bemerkungen
a.	Nullstellenberechnung, Bedingungen (z. B. $f(x_N)=0$) formulieren. Die entstehenden Gleichungen lösen. Extrema u. Wendepunkte: Bedingungen in Gleichungen fassen (z. B. für Extrema $f_t'(x_E)=0 \wedge f_t''(x_E)\neq 0$), entstehende Gleichungen lösen, Bedingungen überprüfen. Es gibt nur Hochpunkte und keine Tiefpunkte. Asymptoten als Grenzwert formulieren. **Ableitungen:** $f_t'(x)=\frac{1-t-\ln(x)}{x^2}$, $f_t''(x)=\frac{2\ln(x)+2t-3}{x^3}$, $f_t'''(x)=\frac{11-6t-6\ln(x)}{x^4}$ **Nullstelle** $N_t(e^{-t}/0)$; **Extrema** $H_t(e^{1-t}/e^{t-1})$ **Wendestellen:** $W_t(e^{\frac{3}{2}-t}/\frac{3}{2}e^{t-\frac{3}{2}})$ **Asymptoten:** Die x-Achse ist Asymptote für $x\to\infty$. Für $x\to 0$ folgt, dass die y-Achse Asymptote ist.	7	10		Standardstoff des Analysisunterrichtes, sicherer Umgang mit Kurvenscharen

					
b.	Die x-Koordinate des Tiefpunktes wird nach t aufgelöst und mit dieser Umformung der Parameter t aus der y-Koordinate eliminiert. Alle Tiefpunkte der Schar liegen daher auf dem Graphen von y aus Zeile 3 (Fachbegriff: Ortskurve). Übertragung auf das Beispiel: $x = e^{1-t} \Leftrightarrow t = 1 - \ln x$; $y = e^{1-\ln x - 1} \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$. Die Hochpunkte der Schar liegen auf einer Hyperbel.	2	5	1	Erkennen der 3 angegebenen Umformungsschritte bzw. Ergebnisse und ihre Interpretation. Ortskurve erkennen.
c.	Richtiges Formulieren des gesuchten Integrals mit $\int_{e^{-t}}^{e^{1-t}} f_t(x)dx = A$. Ermittlung der passenden Stammfunktion durch z. B. partielle Integration . Flächenberechnung: $A = \int_{e^{-t}}^{e^{1-t}} (\frac{t+\ln(x)}{x})dx = [t\ln(x) + \frac{1}{2}(\ln(x))^2]_{e^{-t}}^{e^{1-t}} = \frac{1}{2}$. Das Ergebnis ist vom gewählten Parameter unabhängig.	2	7	1	Anwendung der partiellen Integration. Im Ergebnis taucht der Parameter t nicht mehr auf.
d.	Interpretiert man die einzelnen Seiten der Gleichung als Funktionen [$n(z) = z^2 + 6z + 10$; $t(z) = (\frac{-V}{\pi} + 14{,}78)e^z$] und zeichnet deren Graphen in ein gemeinsames Koordinatensystem, kann man über den Schnittpunkt der Kurven eine Lösung finden. Ist $V \geq 14{,}78 \cdot \pi$, so gibt es keine Lösung. Der Graph von $t(z)$ verläuft dann nämlich auf bzw. unterhalb der x-Achse, $n(z)$ aber weiterhin immer oberhalb der x-Achse.			5	Erläuterung einer Lösungsstrategie. Vom angegebenen Lösungsweg abweichende, aber dennoch zum Ziel führende Lösungen, sind als gleichwertig anzusehen.
	Σ 40	**11**	**22**	**7**	

Hessisches Kultusministerium

HESSEN

Landesabitur 2007
Beispielaufgaben

Mathematik

Leistungskurs

Beispielaufgabe A 2

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **240 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

Erlaubte Hilfsmittel:	**Übliche Formelsammlung** **Taschenrechner**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Analysis

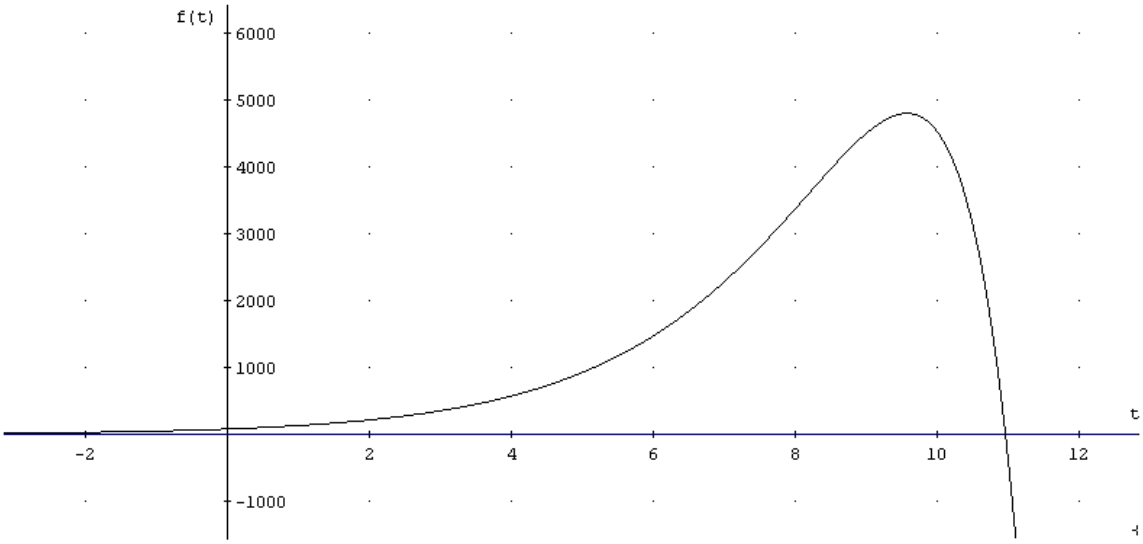
Aufgaben

Zu jedem k > 0 ist eine Funktion f_k gegeben durch

$$f_k(t) = 80e^{k\cdot t} - \tfrac{1}{3}e^{2k\cdot t} = 80e^{k\cdot t} - \tfrac{1}{3}(e^{k\cdot t})^2;\ t \in R$$

a. Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit der t-Achse, die Hoch-, Tief- und Wendepunkte sowie die Asymptoten des Graphen von f_k.

b. Begründen Sie, dass der folgende Graph zu $f_{0,5}$ gehört.



c. Die t-Achse und der Graph von f_k begrenzen eine bis „ins Unendliche reichende“ Fläche. Berechnen Sie die Gleichung der zur t-Achse senkrechten Geraden g, die diese Fläche in zwei Teilflächen einteilt, sodass der Inhalt der linken Teilfläche dreimal so groß ist wie der Inhalt der rechten Teilfläche.

d. Der Graph von $f_{0,5}$ (siehe Aufgabenteil b) zeigt den Verlauf einer Schädlingspopulation in einem Wald während der Bekämpfung mit einem Pestizid, beginnend bei $t_1 = 0$ und endend zu der Zeit t_2, ab der keine Schädlinge im Wald mehr vorhanden sind. Dabei gilt Folgendes:

1 Einheit der Funktionswerte $\hat{=}$ 1000 Schädlinge
1 Einheit der t-Werte $\hat{=}$ 1 Tag

d1. Beschreiben Sie kurz den Verlauf der Population in dem Intervall $[t_1 ; t_2]$. Gehen Sie dabei auf die Größe und auf die Wachstumsgeschwindigkeit der Schädlingspopulation ein.

d2. 18 Stunden bevor die Population am stärksten wuchs, wurde das Pestizid über dem Wald versprüht. Bestimmen Sie den Zeitpunkt und die Anzahl der Schädlinge zu diesem Zeitpunkt.

d3. Jeder Schädling vertilgt pro Tag 3 cm^2 Blattfläche. Wie viel Blattfläche wurde von den Schädlingen insgesamt gefressen?

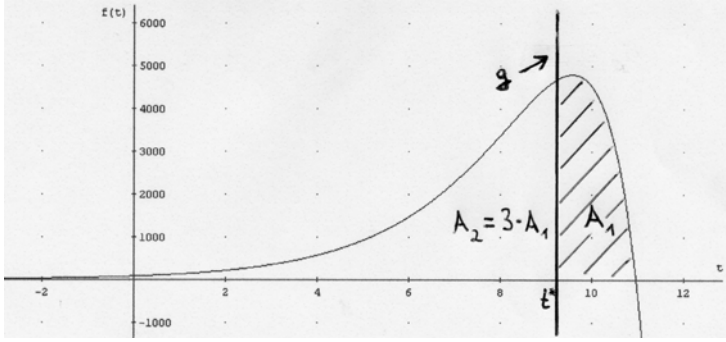
Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

II. Erläuterungen

Zielsetzung
Die Aufgabenteile a und b gehen auf die klassischen Untersuchungsmethoden für Funktionen am Beispiel einer Schar von Exponentialfunktionen ein.
Aufgabenteil c beinhaltet ein komplexeres Flächeninhaltsproblem, was eine strukturierte Lösungsstrategie erfordert. Neben den üblichen Integrationsmethoden werden vor allem Fertigkeiten im Umgang mit Exponentialgleichungen benötigt.
Im Aufgabenteil d wird eine Modellierung eines Anwendungsbeispiels (Beschreibung eines Populationswachstums) aufgegriffen. Dabei geht es im Wesentlichen um die Grundvorstellung der Ableitung als momentane Änderungsgröße und um die des Integrals als verallgemeinertes Größenprodukt.

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösungen	**I**	**II**	**III**	**Bemerkungen**
a.	- <u>Schnittpunkte mit der t-Achse:</u> (Bed.: f(t) = 0), Nullstellen bei $t_k = \frac{\ln(240)}{k}$ → $N_k(\frac{\ln(240)}{k}\|0)$ - <u>Ableitungen:</u> $f_k'(t) = 80k \cdot e^{k\cdot t} - \frac{2}{3}k \cdot e^{2k\cdot t} = k \cdot e^{k\cdot t}(80 - \frac{2}{3}e^{k\cdot t})$ $f_k''(t) = 80k^2 \cdot e^{k\cdot t} - \frac{4}{3}k^2 \cdot e^{2k\cdot t} = k^2 \cdot e^{k\cdot t}(80 - \frac{4}{3}e^{k\cdot t})$ $f_k'''(t) = 80k^3 \cdot e^{k\cdot t} - \frac{8}{3}k^3 \cdot e^{2k\cdot t}$ - <u>Extrempunkte:</u> Notwendige Bed. für Extrempunkte: $f_k'(t) = 0 \Rightarrow t_k = \frac{\ln(120)}{k}$ Hinreichende Bed. führt auf: $H_k(\frac{\ln(120)}{k}, 4800)$ - <u>Wendepunkte:</u> Notwendige Bed. für Wendepunkte: $f_k''(t) = 0 \Rightarrow t_k = \frac{\ln(60)}{k}$ Hinreichende Bed. führt auf: $W_k(\frac{\ln(60)}{k}, 3600)$ - <u>Asymptoten:</u> $\lim_{t\to+\infty} f_k(t) = -\infty$, $\lim_{t\to-\infty} f_k(t) = 0$ → Die t-Achse ist Asymptote für $t \to -\infty$. Für $t \to +\infty$ besitzt f_k keine Asymptote.	7	7		Klassische Methoden der Funktionsuntersuchung Wird die Berechnung mit einem konkreten Wert für k durchgeführt, sind Teilpunkte zu geben

b.	Die wesentlichen Eigenschaften sollen hier für k = 0,5 mithilfe von Teil a für die Begründung des Graphen herangezogen werden.	2	2		Der Graph bestätigt die in a gewonnenen Ergebnisse und hilft für die Umsetzung der Lösungsstrategie bei Teil c.
c.	 Strategie: 1. Bestimmung des Flächeninhalts der bis „ins Unendliche reichenden Fläche“ A_k 2. Bestimmung des Flächeninhalts der Fläche A_1 3. Bestimmung der Grenze t^* zu 1.: Ansatz: $A_k = \lim\limits_{a \to -\infty} \int\limits_a^{\frac{\ln(240)}{k}} f_k(t)dt$ $A_k = \lim\limits_{a \to -\infty} \int\limits_a^{\frac{\ln 240}{k}} f_k(t)dt = \lim\limits_{a \to -\infty} \left[\frac{80 \cdot e^{k \cdot t}}{k} - \frac{e^{2k \cdot t}}{3 \cdot 2k} \right]_a^{\frac{\ln 240}{k}}$ $= \lim\limits_{a \to -\infty} \left(\frac{9600}{k} - \frac{80 \cdot e^{k \cdot a}}{k} + \frac{e^{2k \cdot a}}{6 \cdot k} \right) = \frac{9600}{k}$ zu 2.: $A_1 = \frac{1}{4} \cdot A_k = \frac{2400}{k}$ zu 3.: Ansatz: $A_1 = \int\limits_{t^*}^{\frac{\ln 240}{k}} f_k(t)dt = \frac{9600}{k} - \frac{80 \cdot e^{k \cdot t^*}}{k} + \frac{e^{2k \cdot t^*}}{6 \cdot k} = \frac{2400}{k}$ → $\underline{t_1^* = \frac{\ln(120)}{k}}$, $t_2^* = \frac{\ln(360)}{k}$ Da nur die erste Gerade die angegebene Fläche teilt, lautet die Gleichung für $\underline{g: t = \frac{\ln(120)}{k}}$	1	5	2	Die Hälfte der zu vergebenden Punktzahl sollte bei diesem Aufgabenteil auf die Erläuterung der Strategie und die Ansätze verteilt werden. Lösung durch Substitution $z = e^{k \cdot t^*}$
d. 1.	Die Populationsgröße ist zu Beginn sehr klein und nimmt bis zum Hochpunkt zu. Die Wachstumsgeschwindigkeit steigt ebenfalls, jedoch nur bis zum Wendepunkt. Ab dem Wendepunkt wird das Wachstum geringer, ehe es ab dem Hochpunkt sogar negativ wird, d. h. die Populationsgröße nimmt wieder ab. Nach ca. 11 Tagen ist sie auf Null zurückgegangen, d. h. es sind keine Schädlinge mehr vorhanden.	2	3		

d 2.	18 Stunden entsprechen einem ¾ Tag. Die Population wuchs am stärksten beim Wendepunkt. → $\hat{t} = \frac{\ln(60)}{\frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \approx 7{,}439$ → $f_{0,5}(\hat{t}) \approx 2732$ Das Pestizid wurde etwa nach 7 Tagen und 10,5 Stunden versprüht. Die Anzahl der Schädlinge betrug zu diesem Zeitpunkt etwa 2,73 Millionen.		2	2	
d 3.	$A = 1000 \cdot 3\,\text{cm}^2 \cdot \int_0^{\frac{\ln(240)}{\frac{1}{2}}} f_{0,5}(t)dt = 57121000\,\text{cm}^2$ Die insgesamt gefressene Blattfläche der Schädlinge betrug etwa 5700 m^2.		3	2	
	Σ 40	**12**	**22**	**6**	

Landesabitur 2007
Beispielaufgaben

Mathematik

Leistungskurs

Beispielaufgabe A 3

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **240 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

Erlaubte Hilfsmittel:	**Übliche Formelsammlung** **GTR**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Analysis

Aufgaben

a. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$

- Lassen Sie den Graphen von f plotten und übertragen Sie ihn in ein geeignetes Koordinatensystem auf Papier.
- Beweisen Sie die vermutete Symmetrieeigenschaft von f.
- Zeigen Sie, dass F mit $F(x) = \frac{e^x - 1}{2(e^x + 1)}$ eine Stammfunktion von f ist und berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse im Intervall [-1,3 | 1,3].
- Begründen Sie folgenden Grenzwert: $A = \lim_{t \to \infty} \left(\int_{-t}^{t} f(x)\,dx \right) = 1$

b. Skizzieren Sie in dasselbe Koordinatensystem den Graphen der Gaußschen phi-Funktion φ mit $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-0,5x^2}$.

Vergleichen Sie die Graphen der beiden Funktionen f und φ miteinander, indem Sie mindestens zwei wesentliche Übereinstimmungen und zwei wichtige Unterschiede auffinden und rechnerisch begründen.

c. Beide Graphen sind Glockenkurven.

- Durch Streckung und Stauchung lässt sich der Graph von f dem von φ anpassen. Führen Sie dies durch und geben Sie einen Term für die Näherungsfunktion $\overline{f}$ an.
- Als Maß für die Güte der Anpassung wird das Integral $\Im(k) = \int_{-k}^{k} \left(\varphi(x) - \overline{f}(x) \right) dx$ vorgeschlagen. Mit einer geeigneten Näherung für $\overline{f}$ erhält man nebenstehende Werte:

k	1	2	3
$\Im$	0,0187	0,0328	0,0136

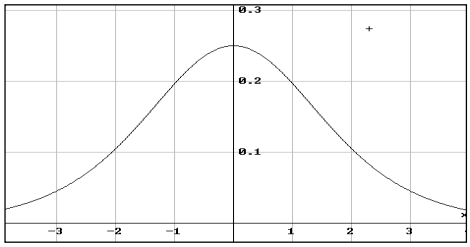
Nehmen Sie Stellung zu diesem Gütemaß und machen Sie Verbesserungsvorschläge (die Sie mit Rechnungen begründen sollen).

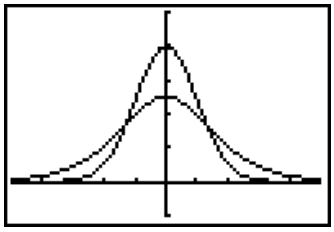
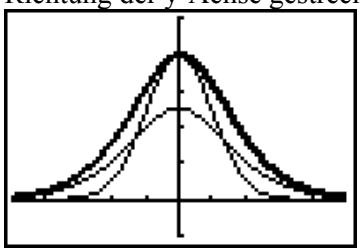
Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

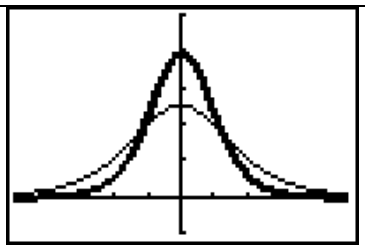
II. Erläuterungen

Zielsetzung
In der Aufgabe geht es darum, zwei verschiedene Glockenkurven zu vergleichen und die eine an die andere anzupassen.
In Teil a wird die erste Glockenkurve näher untersucht. In Teil b soll diese Funktion mit der Gaußschen φ-Funktion verglichen und in Teil c an diese angepasst werden. Abschließend muss die Güte der Anpassung diskutiert werden.

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösung	I	II	III	Bemerkungen
a.	**Zeichnung** 				
	Achsensymmetrie zur y-Achse $f(-x)=\frac{e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2}=\frac{e^{-x}\cdot e^{2x}}{(e^{-x}+1)^2\cdot e^{2x}}=\frac{e^{x}}{(1+e^{x})^2}=f(x)$				Untersuchung einer komplexeren Funktion auf ausgewählte Eigenschaften hin
	Die Ableitung der Funktion F ergibt den Funktionsterm von f. $F'(x)=\frac{2e^x(e^x+1)-(e^x-1)\cdot 2e^x}{4(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$				Stammfunktion
	Flächeninhalt: $\int_{-1,3}^{1,3}\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\,dx \approx 0{,}572$				Flächeninhalt
	Uneigentliches Integral: $\frac{1}{2}A=\lim_{t\to\infty}\left(\int_0^t f(t)dt\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{e^t-1}{2(e^t+1)}\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1-e^{-t}}{2(1+e^{-t})}\right)=\frac{1}{2}$ weil $\lim_{t\to\infty}e^{-t}=0$	6	9	2	Uneigentliches Integral

b.	 Übereinstimmungen: • Graphen achsensymm. zur y-Achse • Hochpunkt bei x=0, • x-Achse Asymptote • Fläche unter den Graphen beträgt 1 Flächeneinheit Unterschiede: • phi-Funktion hat höheren Hochpunkt $H_f = (0 \mid 0{,}25)$, $H_\varphi \approx (0 \mid 0{,}4)$ • Wendepunkte von φ bei $x = \pm 1$, von f bei $x_{W1,2} = \ln(2 \pm \sqrt{3}) \approx \pm 1{,}32$ • Flächeninhalt unter Graph stärker um Achse konzentriert, z.B. $\int_{-1}^{1} \varphi(x)dx \approx 0{,}68$ und $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx 0{,}46$ • auch der Inhalt der Fläche unter den Graphen zwischen den beiden Wendepunkten (bei der φ-Funktion entspricht das der 1σ-Umgebung) ist bei f kleiner: $\int_{-1}^{1} \varphi(x)dx = 0{,}68$ *und* $\int_{\ln(2-\sqrt{3})}^{\ln(2+\sqrt{3})} f(x)dx = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}577$	3	9		hier muss auf Kenntnisse über die Gaußsche φ-Funktion zurückgegriffen werden bewusst offene Formulierung; je zwei wesentliche Übereinstimmungen bzw. Unterschiede müssen selbstständig ausgewählt werden andere Eigenschaften sind entsprechend zu werten
c.	Graph von f muss in Richtung der y-Achse gestreckt werden,  Streckfaktor ≈ 0,4/0,25 = 1,6 dann Stauchung in Richtung der x-Achse notwendig, damit Flächeninhalt 1 bleibt, muss – da x in f(x) linear - der gleiche Faktor verwendet werden				Dieser Vorgang der zweifachen Abbildung mit Streckung und Stauchung ist bei der Herleitung der Normalverteilung üblich.

	 $\overline{f} = 1{,}6 \cdot f(1{,}6 \cdot x)$ nach Augenmaß liegt gute Anpassung vor Die berechneten Werte für k = 1, 2, 3 geben den orientierten Flächeninhalt der von beiden Graphen eingeschlossenen Fläche an. Da $\mathfrak{I}(1) < \mathfrak{I}(2)$ und $\mathfrak{I}(2) > \mathfrak{I}(3)$ ist, müssen sich beide Graphen in [1, 3] mindestens einmal schneiden. Das wird durch Rechnung auch bestätigt (Schnittstelle bei $x \approx 1{,}74$) Daher könnte bei diesem Maß der Wert von $\mathfrak{I}(k)$ für $k \to \infty$ sich auch Null nähern, obwohl die Graphen gar nicht nahe beieinander liegen. Ein Maß, das dieses Nachteil vermeidet, ist das Integral des Betrags der Differenz beider Funktionen $I(k) = \int_{-k}^{k} \left\lvert \varphi(x) - \overline{f}(x) \right\rvert dx$ Hier erhält man die Werte k: 1, 2, 3 I(k): 0.0190, 0.0366, 0,0558		6	5	Integralbegriff im Anwendungszusammenhang
	Σ 40	**9**	**24**	**7**	

Landesabitur 2007
Beispielaufgaben

Mathematik

Leistungskurs

Beispielaufgabe A 4

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **240 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

Erlaubte Hilfsmittel:	**Übliche Formelsammlung** **GTR oder CAS**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Analysis

Aufgaben

Nach der Fällung einer 200 Jahre alten Rotbuche wurde anhand der Jahresringe der Stammdurchmesser bestimmt. Die folgende Tabelle gibt einen Auszug aus den Messdaten:

Alter in Jahren	0	25	50	75	100	125	150	175	200
Durchmesser in Metern	0.05	0.26	0.40	0.85	1.05	1.20	1.23	1.24	1.26

a. Zeichnen Sie die Messpunkte in ein geeignetes Koordinatensystem ein. Skizzieren Sie eine Kurve, die auch den weiteren Verlauf des Durchmessers prognostizieren könnte, und beschreiben Sie den Wachstumsprozess in Worten.
Modellieren Sie die Entwicklung des Durchmessers während der ersten 75 Jahre als exponentielles Wachstum. In welcher Zeitspanne verdoppelt sich die Dicke des Baumes nach Ihrem Modell? Beurteilen Sie dieses Modell.

b. Die Funktion $d(x) = \frac{5}{100 \cdot e^{-0.05 \cdot x} + 4}$ für $x \in [0;200]$
ist ein weiteres Modell, um das Wachstum des Baumdurchmessers zu beschreiben.
Zu welchem Zeitpunkt hatte nach diesem Modell der Baum eine Dicke von 1 m?
Wann wächst der Baum nach diesem Modell am schnellsten und wie schnell wächst er dann?

c. Max hat ein anderes Modell gewählt:
„Eine kubische Regression führt doch zu einem wesentlich einfacheren Funktionstyp:
$n(x) = -2{,}08 \cdot 10^{-7} \cdot x^3 + 2{,}48 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 + 9{,}34 \cdot 10^{-3} \cdot x + 2{,}04 \cdot 10^{-2}$,
Damit erhalte ich folgende Tabellenwerte - gerundet auf zwei Nachkommastellen – und die sind doch nicht schlechter als die Werte von Funktion d.“

x	0	25	50	75	100	125	150	175	200
n(x)	0.02	0.26	0.52	0.77	0.99	1.17	1.28	1.30	1.22
d(x)	0.05	0.15	0.41	0.79	1.07	1.19	1.23	1.25	1.25

Vergleichen Sie die beiden Anpassungen. Welche ist besser? Geben Sie eine quantitative und qualitative Begründung.

d. Durch Untersuchungsergebnisse an weiteren Buchen hat man festgestellt, dass sich allgemein das Wachstum der Durchmesser durch die folgende Funktion beschreiben lässt:

$$d_p(x) = \frac{5}{p \cdot e^{-0.05 \cdot x} + 4}$$

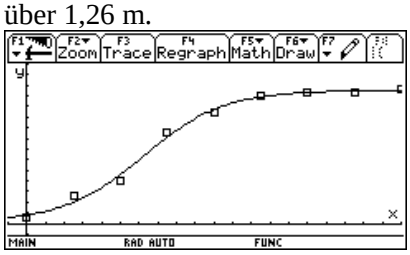
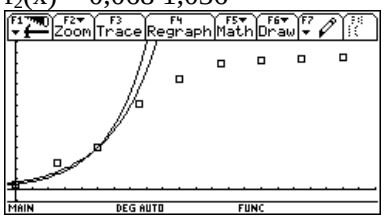
Betrachten Sie für verschiedene Werte für p den jeweiligen Graphen. Welchen Einfluss übt der Faktor p auf den Verlauf des Graphen aus? Wie verändert sich demnach das Wachstum des Baumdurchmessers in Abhängigkeit von p?

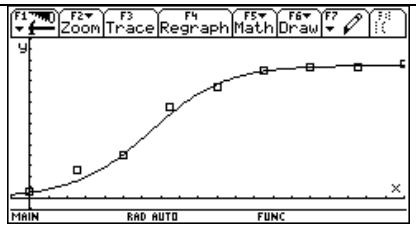
Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

II. Erläuterungen

Zielsetzung
Schwerpunkt ist die mathematische Modellierung eines Wachstumsprozesses. Zunächst soll das Modell eines exponentiellen Wachstums erstellt und kritisch bewertet werden. Ein zweites, verbessertes Modell erlaubt die Bearbeitung spezieller Fragestellungen. Eine qualitative und quantitative Beurteilung der Passungsgüte sowie eine Parametervariation schließen die Aufgabe ab.

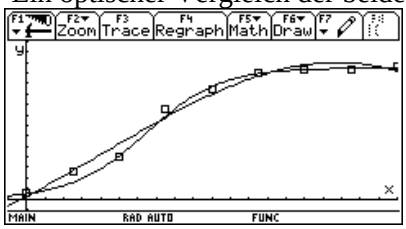
III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

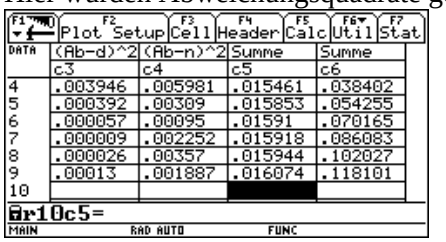
	Erwartete Lösungen	**I**	**II**	**III**	**Bezug zum Lehrplan / Bemerkungen**
a	Der Durchmesser wächst zunächst langsam, dann zwischen dem 50. und 100.Jahr schneller. Danach je älter der Baum wird, desto langsamer. Die maximale Dicke liegt laut den Messdaten wohl knapp über 1,26 m.  . Es sind verschiedene Ausgangswerte denkbar, z. B.: $f_1(x)=0.05\cdot(1{,}0425)^x$ (1. und 3. Punkt) **oder** Verwenden der Regressionsmoduls für Exponentialfunktionen. Man erhält bei 4 Punkten: $f_2(x) = 0{,}068\cdot 1{,}036^x$  Verdopplung des Durchmessers: Bei f_1: nach 16.6 Jahren Bei f_2: nach 11 Jahren Das Modell kann lediglich für die ersten Jahre herangezogen werden, ansonsten ist die Modellierung unrealistisch.	**7**	**5**		Neben dem Modellbildungsprozess und dessen Beurteilung werden Methoden der Differenzialrechnung eingesetzt. Hier: Grafische Darstellung und Interpretation von Daten. Die Rechnungen können mit oder ohne Rechner ausgeführt werden.

<table>
<tr>
<td>b</td>
<td>


Dies ist ein deutlich besseres Modell, was für den gesamten Zeitraum brauchbar ist.

Aus der Gleichung d(t) = 1 ergibt sich
t ≈ 92,103; d. h., nach ca. 92 Jahren hat der Baum einen Durchmesser von 1 m.
Der Graph hat einen Wendepunkt bei (40·ln(5) |0.625), demnach wächst der Baum nach ca. 64.4 Jahren am schnellsten. Die Wachstumsrate im 65. Jahr ergibt sich aus d´(64) = 0,0156, also ca.1,6 cm in diesem Jahr.
</td>
<td>3</td>
<td>4</td>
<td>1</td>
<td>Eine vorangegangene Behandlung von logistischem Wachstum im Unterricht ist nicht notwendig.

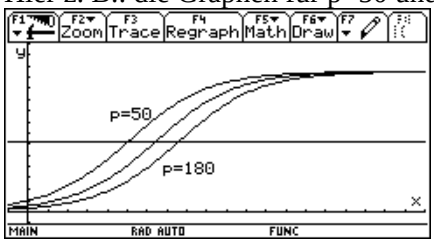
Anwendung von Methoden der Differenzialrechnung, Berechnung des Wendepunktes und von Änderungsraten.</td>
</tr>
<tr>
<td>c</td>
<td>
Ein optischer Vergleich der beiden Funktionen:


Um einen quantitativen Vergleich durchführen zu können, muss ein „Gütemaß“ eingeführt werden, z. B. die Summe der Abweichungen der beiden Funktionen von den Messwerten. Dabei sind die Beträge zu wählen.
Hier wurden Abweichungsquadrate gebildet:


DATA	(Ab-d)^2	(Ab-n)^2	Summe	Summe
	c3	c4	c5	c6
4	.003946	.005981	.015461	.038402
5	.000392	.00309	.015853	.054255
6	.000057	.00095	.01591	.070165
7	.000009	.002252	.015918	.086083
8	.000026	.00357	.015944	.102027
9	.00013	.001887	.016074	.118101
10				

ar10c5=
Die Aufsummierung ergibt mit 0.0161für d(x) einen kleineren Wert als 0.1181 für n(x).

d(x) „passt“ demnach besser. Zudem fällt der Graph von n(x) nach 200 Jahren wieder ab. Dieses Modell passt demnach nicht für langfristige Prognosen.
</td>
<td>3</td>
<td>8</td>
<td>3</td>
<td>Beurteilung der Passungsgüte</td>
</tr>
</table>

d	Durch p wird der Wendepunkt horizontal verschoben, Anfangswert und „Sättigungswert“ bleiben gleich. Der Faktor p beeinflusst also lediglich den Zeitpunkt, wann der Durchmesser den „Wachstumsschub“ macht. Hier z. B.: die Graphen für p=50 und p=180.  Der Parameter p könnte als „biologischer“ Faktor gedeutet werden.	**2**	**3**	**1**	Betrachtung einer Kurvenschar, Variation des Parameters und Interpretation im Aufgabenkontext.
	∑ 40	**15**	**20**	**5**	

Landesabitur 2007
Beispielaufgaben

Mathematik

Leistungskurs

Beispielaufgabe A 5

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **240 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

Erlaubte Hilfsmittel:	**Übliche Formelsammlung** **CAS**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Analysis

Aufgaben

a. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$.

- Lassen Sie den Graphen von f plotten und übertragen Sie ihn in ein geeignetes Koordinatensystem auf Papier.
- Beweisen Sie die vermutete Symmetrieeigenschaft von f.
- Berechnen Sie die Wendepunkte und bestimmen Sie den Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der x-Achse im Intervall zwischen den Wendestellen.
- Begründen Sie folgenden Grenzwert: $A = \lim\limits_{t \to \infty} \left(\int_{-t}^{t} f(x)\,dx \right) = 1$.

b. Skizzieren Sie in dasselbe Koordinatensystem den Graphen der Gaußschen phi-Funktion φ mit $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-0,5x^2}$.

Vergleichen Sie die Graphen der beiden Funktionen f und φ miteinander, indem Sie mindestens zwei wesentliche Übereinstimmungen und zwei wichtige Unterschiede auffinden und rechnerisch begründen.

c. Beide Graphen sind Glockenkurven.

- Durch Streckung und Stauchung lässt sich der Graph von f dem von φ anpassen. Führen Sie dies durch und geben Sie einen Term für die Näherungsfunktion $\overline{f}$ an.
- Als Maß für die Güte der Anpassung wird das Integral $\Im(k) = \int_{-k}^{k} \left(\varphi(x) - \overline{f}(x) \right) dx$ vorgeschlagen. Mit einer geeigneten Näherung.

für $\overline{f}$ erhält man nebenstehende Werte:

k	1	2	3
$\Im$	0,0187	0,0328	0,0136

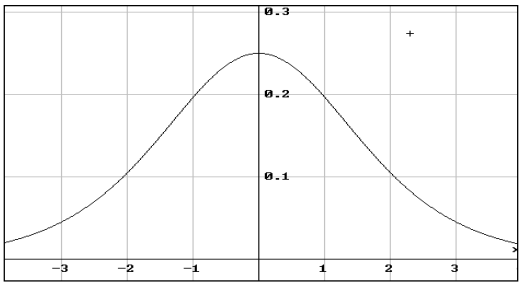
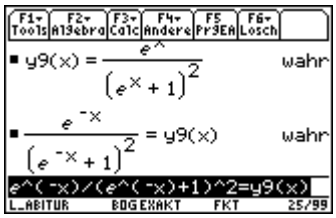
Nehmen Sie Stellung zu diesem Gütemaß und machen Sie Verbesserungsvorschläge (die Sie mit Rechnungen begründen sollen).

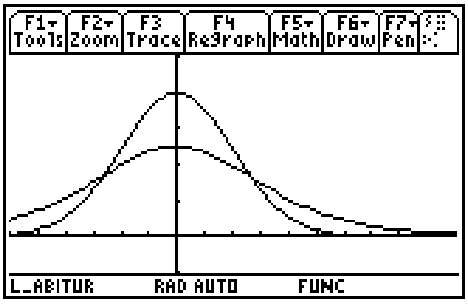
Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

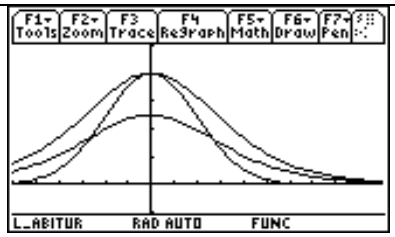
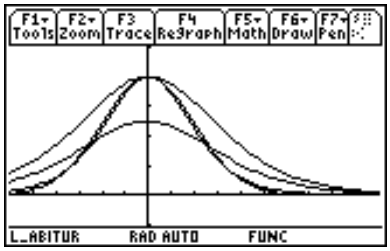
II. Erläuterungen

Zielsetzung
In der Aufgabe geht es darum, zwei verschiedene Glockenkurven zu vergleichen und die eine an die andere anzupassen.
In Teil a wird die erste Glockenkurve näher untersucht. In Teil b soll diese Funktion mit der Gaußschen φ-Funktion verglichen und in Teil c an diese angepasst werden. Abschließend muss die Güte der Anpassung diskutiert werden.

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösung	I	II	III	Bemerkungen
a.	**Zeichnung** 				Untersuchung einer komplexeren Funktion auf ausgewählte Eigenschaften hin
	Achsensymmetrie zur y-Achse „händisch“: $f(-x)=\frac{e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2}=\frac{e^{-x}\cdot e^{2x}}{(e^{-x}+1)^2\cdot e^{2x}}=\frac{e^{x}}{(1+e^{x})^2}=f(x)$ oder mit CAS: 				
	Wendepunkte f’’(x)=0 und f’’’(x)≠0, $f''(x)=\frac{e^{x}(e^{2x}-4e^{x}+1)}{(e^{x}+1)^4}$ Wendestellen $x_{W1,2}=\ln(2\pm\sqrt{3})$; $f(x_{W1,2})=\frac{1}{6}$ also $W_1\approx(-1{,}32\ \vert\ 0{,}17)$, $W_2\approx(1{,}32\ \vert\ 0{,}17)$				
	Flächeninhalt: $\int_{\ln(2-\sqrt{3})}^{\ln(2+\sqrt{3})}\frac{e^{x}}{(e^{x}+1)^2}\,dx=\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 0{,}578$ Uneigentliches Integral:				Stammfunktion Uneigentliches Integral

	$\frac{1}{2}A = \lim\limits_{t\to\infty}\left(\int\limits_0^t f(t)dt\right) = \lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{e^t-1}{2(e^t+1)}\right) = \lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{1-e^{-t}}{2(1+e^{-t})}\right) = \frac{1}{2}$ weil $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-t} = 0$	6	9	2	Grenzwertberechnung mit CAS wird nicht bepunktet, 1 BE, wenn nur mit speziellen großen Werten t gerechnet
b.	 <u>Übereinstimmungen:</u> • Graphen achsensymm. zur y-Achse • Hochpunkt bei x=0, • x-Achse Asymptote • Fläche unter den Graphen beträgt 1 Flächeneinheit <u>Unterschiede:</u> • phi-Funktion hat höheren Hochpunkt $H_f = (0 \mid 0{,}25)$, $H_\varphi \approx (0 \mid 0{,}4)$ • Wendepunkte von φ bei $x = \pm 1$, von f bei $x_{W1,2} = \ln(2 \pm \sqrt{3}) \approx \pm 1{,}32$ • Flächeninhalt unter Graph stärker um Achse konzentriert, z.B. $\int\limits_{-1}^{1} \varphi(x)dx \approx 0{,}68$ und $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx \approx 0{,}46$ • auch der Inhalt der Fläche unter den Graphen zwischen den beiden Wendepunkten (bei der φ-Funktion entspricht das der 1σ-Umgebung) ist bei f kleiner: $\int\limits_{-1}^{1} \varphi(x)dx = 0{,}68$ *und* $\int\limits_{\ln(2-\sqrt{3})}^{\ln(2+\sqrt{3})} f(x)dx = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}577$	3	9		hier muss auf Kenntnisse über die Gausssche φ-Funktion zurückgegriffen werden bewusst offene Formulierung; je zwei wesentliche Übereinstimmungen bzw. Unterschiede müssen selbstständig ausgewählt werden andere Eigenschaften sind entsprechend zu werten

c.	Graph von f muss in Richtung der y-Achse gestreckt werden, Streckfaktor ≈ 0,4/0,25 = 1,6  dann Stauchung in Richtung der x-Achse notwendig, damit Flächeninhalt 1 bleibt, muss – da x in f(x) linear - der gleiche Faktor verwendet werden  $\overline{f} = 1{,}6 \cdot f(1{,}6 \cdot x)$ nach Augenmaß liegt gute Anpassung vor Die berechneten Werte für k = 1, 2, 3 geben den orientierten Flächeninhalt der von beiden Graphen eingeschlossenen Fläche an. Da $\Im(1) < \Im(2)$ und $\Im(2) > \Im(3)$ ist, müssen sich beide Graphen in [1, 3] mindestens einmal schneiden. Das wird durch Rechnung auch bestätigt (Schnittstelle bei x ≈ 1,74) Daher könnte bei diesem Maß der Wert von $\Im(k)$ für $k \to \infty$ sich auch Null nähern, obwohl die Graphen gar nicht nahe beieinander liegen. Ein Maß, das dieses Nachteil vermeidet, ist das Integral des Betrags der Differenz beider Funktionen $I(k) = \int_{-k}^{k} \left\lvert \varphi(x) - \overline{f}(x) \right\rvert dx$ Hier erhält man die Werte k: 1, 2, 3 I(k): 0.0190, 0.0366, 0,0558		6	5	Dieser Vorgang der zweifachen Abbildung mit Streckung und Stauchung ist bei der Herleitung der Normalverteilung üblich. Integralbegriff im Anwendungszusammenhang TI erlaubt keine Berechnung des Grenzwerts $k \to \infty$ bei der φ-Funktion, (Derive sehr wohl),
	Σ 40	**9**	**24**	**7**	

Landesabitur 2007
Beispielaufgaben

Mathematik

Leistungskurs

Beispielaufgabe A 6

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **240 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

Erlaubte Hilfsmittel:	**Übliche Formelsammlung** **TR, GTR oder CAS**
Sonstige Hinweise:	**keine**

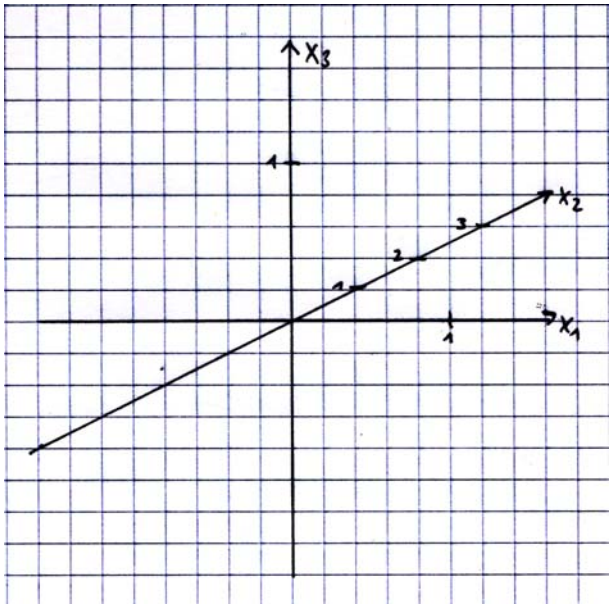
I. Thema und Aufgabenstellung

Lineare Algebra / Analytische

Aufgaben

a. Die Eckpunkte A(1|1|0), B(1|-1|2), C(-1|-1|0) und D(-1|1|2) bilden einen räumlichen Körper. Zeichnen Sie diese Punkte in ein der Vorgabe entsprechendes Koordinatensystem ein.

b. Zeigen Sie, dass dieser Körper ein regelmäßiges Tetraeder ist. Erläutern Sie Ihre Überlegungen bei der Lösung.



c. Zeigen Sie, dass die Punkte A, C und D in der Ebene E mit der Gleichung $E: x_1 - x_2 + x_3 = 0$ liegen.
Berechnen Sie den Schnittpunkt dieser Ebene mit derjenigen Geraden, die durch den Punkt B geht und die senkrecht auf der Ebene E steht.
Welchen Abstand hat der Punkt B von der gegenüberliegenden Tetraederfläche?

d. **(Diese Teilaufgabe ist nur dann zu bearbeiten, falls in 12 II die Lehrplanvariante „Fortführung der Analytischen Geometrie“ im Unterricht behandelt wurde.)**

Auf der 1-2-Ebene liegt auf dem Punkt P(10|-10|0) eine Kugel mit dem Radius r=1. Diese rollt nun geradlinig auf dieser Ebene auf den Ursprung des Koordinatensystems zu, bis sie die von den Eckpunkten A, B und C gebildete Seitenfläche F des Tetraeders berührt. Bestimmen Sie für diese Endlage der Kugel die Koordinaten des Kugelmittelpunktes M und des Berührpunktes G der Kugel mit der Seitenfläche F des Tetraeders.

e. **(Diese Teilaufgabe ist nur dann zu bearbeiten, falls in 12 II die Lehrplanvariante „Matrizen und lineare Abbildungen“ im Unterricht behandelt wurde.)**

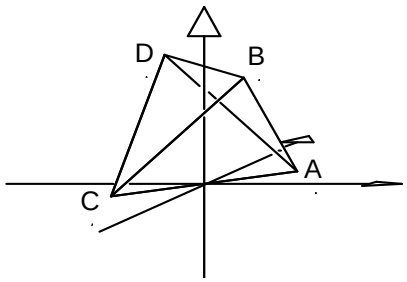
Eine Abbildung $\alpha : \Re^3 \to \Re^3$ heißt lineare Abbildung, wenn α die Linearitätseigenschaften (L1) $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha(\vec{x}) + \alpha(\vec{y})$ und (L2) $\alpha(r \cdot \vec{x}) = r \cdot \alpha(\vec{x})$ erfüllt.
Begründen Sie mit einer kurzen Rechnung, dass bei einer solchen Abbildung der Nullpunkt fest bleibt, d. h. $\alpha(\vec{0}) = \vec{0}$ ist.
Symmetrieabbildungen des Tetraeders sind Abbildungen, bei denen die Bilder der vier Eckpunkte wieder vier Eckpunkte des Tetraeders sind, z. B. eine Abbildung, bei der die Punkte A und C fest bleiben und die Punkte B und D vertauscht werden. Geben Sie alle Symmetrieabbildungen des Tetraeders an, die gleichzeitig lineare Abbildungen sind. Beschreiben Sie die Abbildungen anschaulich und geben Sie die zugehörigen Matrizen an.

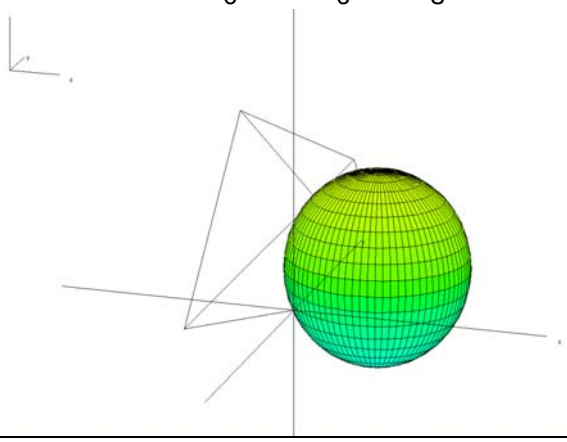
Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

II. Erläuterungen

Zielsetzung:
Die Aufgabe erfordert neben einer gut ausgebildeten Raumanschauung und der Fähigkeit, Körper geeignet in einem räumlichen Koordinatensystem darzustellen, eine sichere Anwendung der analytischen Methoden der Vektorgeometrie auf konkrete Körper. Bei der Lösung des Problems ist ein ständiger Wechsel zwischen den Darstellungsebenen (grafisch und symbolisch) erforderlich, was ein gutes räumliches Vorstellungsvermögen voraussetzt.
Im Teil d bzw. Teil e der Aufgabe wird alternativ (je nach Lehrplanvariante) der Einbezug eines Parameters (rollende Kugel) unumgänglich und es soll die Beherrschung von Verfahren zur Beschreibung von Kugeln und Ebenen nachgewiesen werden oder es müssen Matrizen im Zusammenhang mit geometrischen Abbildungen betrachtet werden, wobei die angegebene Definition von Symmetrieabbildungen aufgegriffen und verarbeitet werden muss.

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösungen	Anf.-Bereich			Bezug zum Lehrplan/ Bemerkungen
		I	II	III	
a.	 Die räumliche Lage muss eindeutig zu erkennen sein.	3	2		Zeichnerische Darstellung von räumlichen Gebilden. Lagebeziehung von Punkten und Geraden im Raum. Die Entscheidung, welche der Linien vorne und hinten sind, erfordert eigenständige Überlegungen
b.	Nachweis, dass $\left\lvert\vec{b}-\vec{a}\right\rvert=\left\lvert\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}\right\rvert=\left\lvert\vec{b}-\vec{c}\right\rvert=\left\lvert\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}\right\rvert=\left\lvert\vec{c}-\vec{a}\right\rvert=\left\lvert\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}\right\rvert=$ $=\left\lvert\vec{d}-\vec{a}\right\rvert=\left\lvert\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}\right\rvert=\left\lvert\vec{d}-\vec{c}\right\rvert=\left\lvert\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\right\rvert=\left\lvert\vec{d}-\vec{b}\right\rvert=\left\lvert\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}\right\rvert=$ $=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$ und die entsprechenden Erläuterungen	2	2	1	Abstandsbestimmungen zwischen Punkten können zur Beantwortung der Frage herangezogen werden, müssen aber selbstständig erschlossen werden.

c.	Punkte A, C und D in gegebene Ebenengleichung einsetzen und verifizieren oder Gleichung der Ebene E in Parameterform aufstellen: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit der Koordinatengleichung $E: x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Schnittpunkte der Geraden $g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, die durch B geht und deren Richtungsvektor senkrecht ist zur Ebene E mit der Ebene E $S(-\frac{1}{3} \mid \frac{1}{3} \mid \frac{2}{3})$. Für den Abstand der Punkte S und B erhält man d(S, B)=$\frac{4}{3}\sqrt{3}$.	2	7	1	Umgang mit Koordinaten- und Parameterform von Ebenen und Geraden, Orthogonalität und Abstandsbestimmung.
d. oder alternativ Teil e.	Gleichung der von Punkt P(10|-10|0) auf den Ursprung zu rollenden Kugel ist $k: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} s \\ -s \\ 1 \end{pmatrix}\right]^2 = 1$. Sie rollt auf die Ebene F mit $F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (in Koordinatenform $F: x_1 - x_2 - x_3 = 0$) zu. Wenn die Kugel k die Ebene F berührt, gilt für diesen besonderen Mittelpunkt M, dass d(M,F)=1. Aus der Rechnung folgt $M(\frac{\sqrt{3}+1}{2} \mid -\frac{\sqrt{3}+1}{2} \mid 1)$ und für den Berührpunkt $G(\frac{\sqrt{3}+3}{6} \mid -\frac{\sqrt{3}+3}{6} \mid \frac{\sqrt{3}+3}{3})$ 	3	4	3	Lagebeziehungen zwischen Kugel und Ebene sind mittels geeigneter Gleichungen für Kugel (mit Mittelpunktsparameter) und Berührebene F zu ermitteln und die Punkte M und G zu bestimmen

e. oder alternativ Teil d.	$\alpha(\vec{0}) = \alpha(0 \cdot \vec{0})$ $= 0 \cdot \alpha(\vec{0})$ $= \vec{0}$ Anschauliche Beschreibung der Abbildungen und Angabe der 4 Matrizen $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	3	4	3	Matrizen als lineare Abbildungen Anwendungen von Matrizen in der Geometrie
	Σ 30	**10**	**15**	**5**	

Landesabitur 2007
Beispielaufgaben

Mathematik

Leistungskurs

Beispielaufgabe A 7

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **240 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

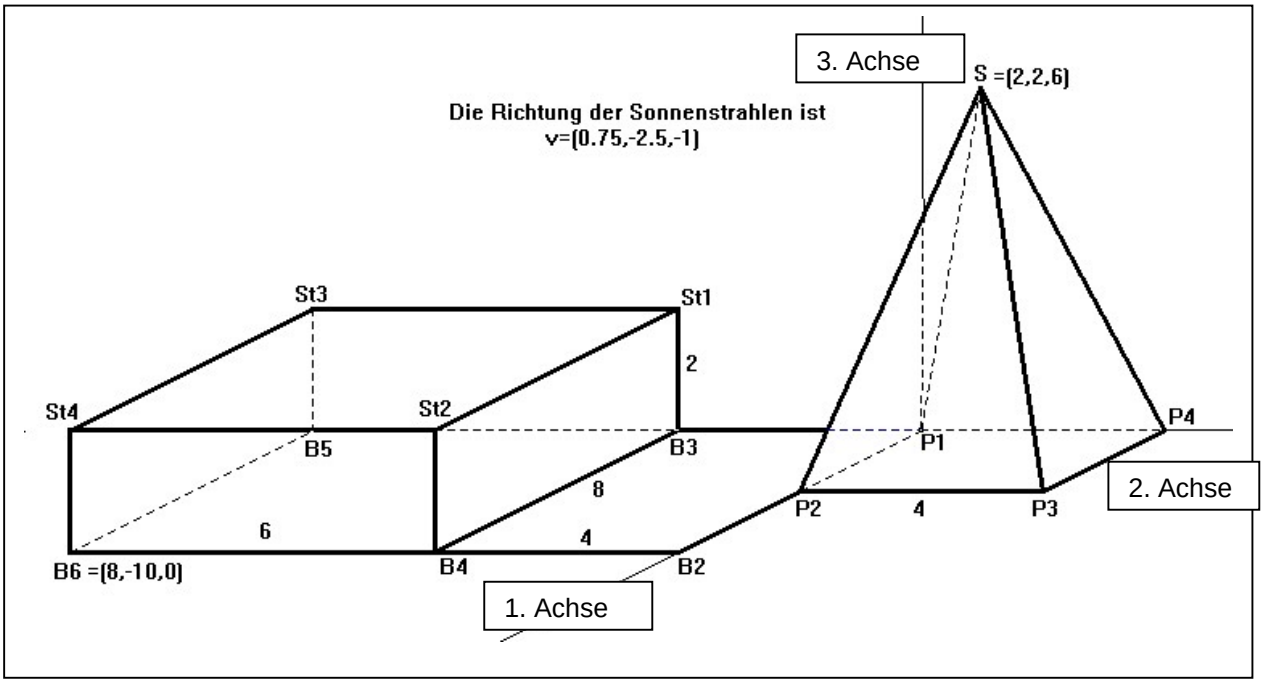
Erlaubte Hilfsmittel:	**Übliche Formelsammlung** **Taschenrechner**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Lineare Algebra / Analytische Geometrie

Aufgaben

Eine quadratische Pyramide (Grundkante 4 und Höhe 6) steht neben einer Stufe.



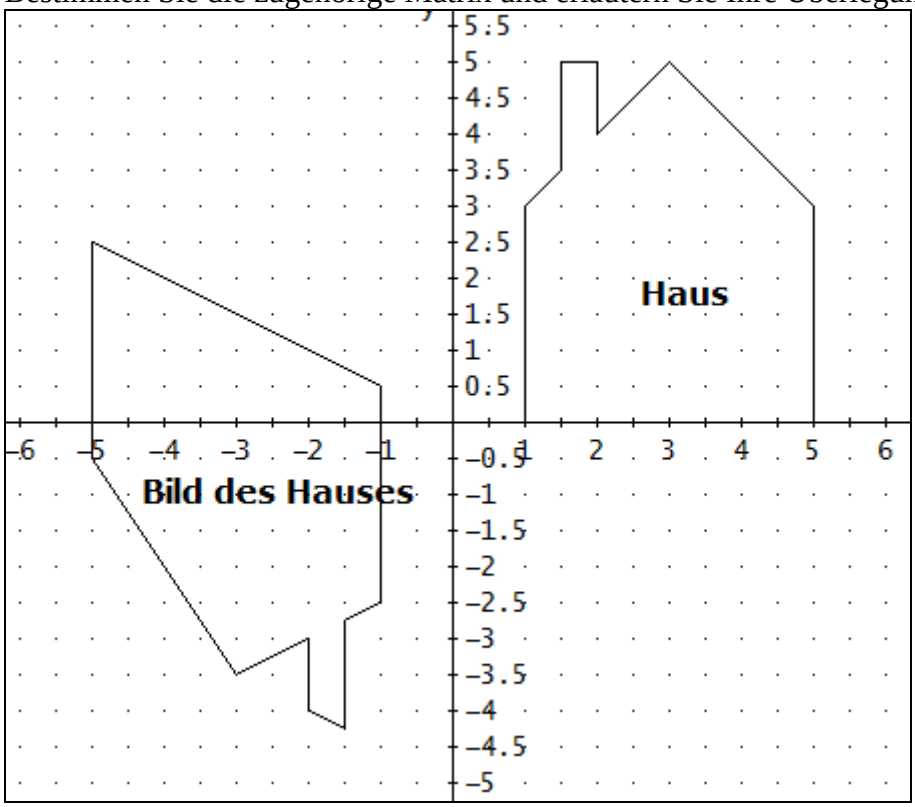
Die Sonne scheint und wirft einen Schatten der Pyramide auf der Stufe. Die Richtung der Sonnenstrahlen ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ -2.5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden durch die Spitze, die den Richtungsvektor $\vec{v}$ hat (Sonnenstrahl durch die Spitze der Pyramide). Zeigen Sie, dass die Punkte $P = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} 6.5 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf dieser Geraden liegen, und erklären Sie, wie man mit Hilfe des Punktes Q entscheiden kann, welche Pyramidenflächen in der Sonne liegen.

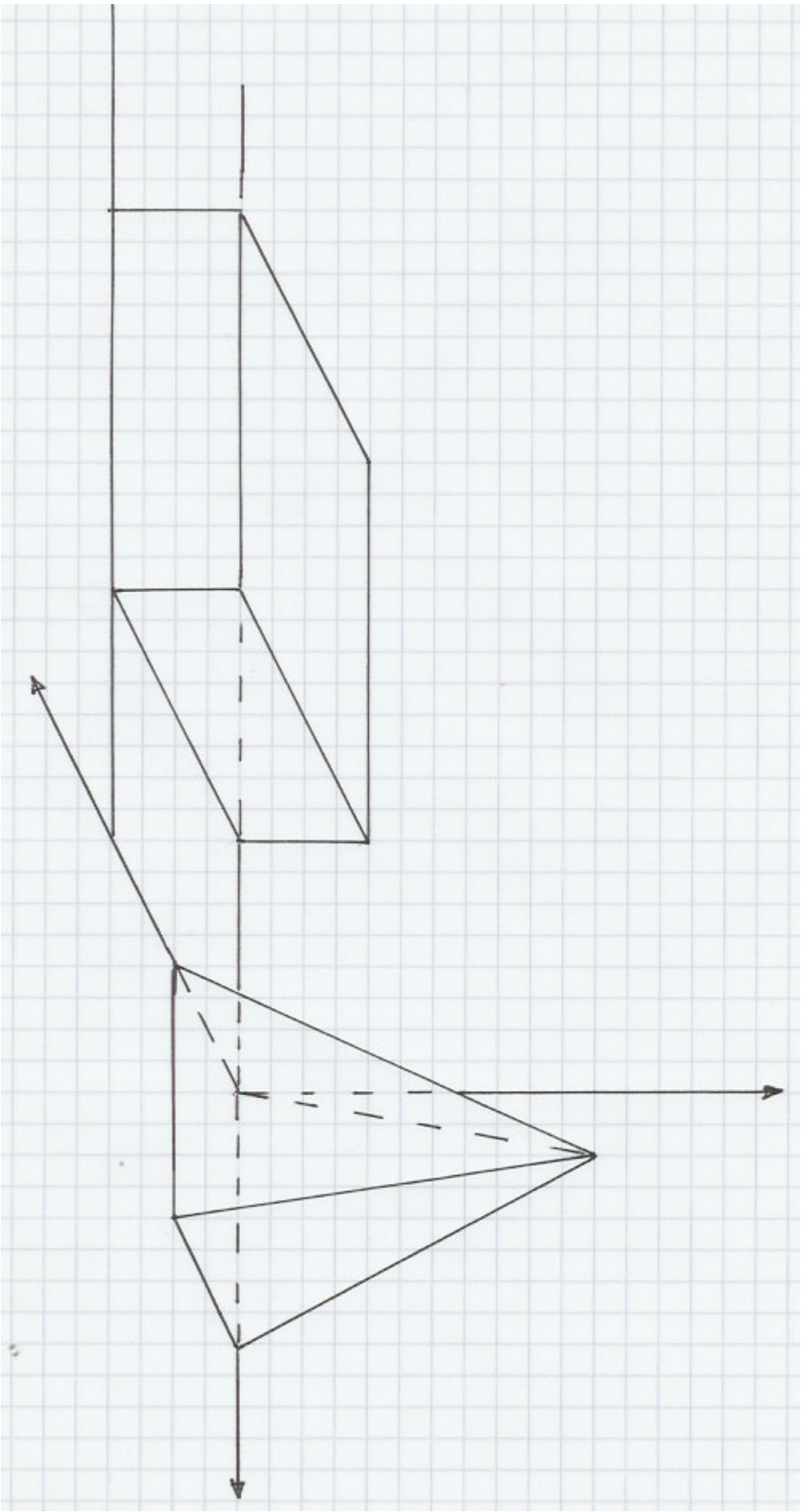
b. Die Punkte $\begin{pmatrix} 5.2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4.4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ liegen auf dem Schattenrand. Zeichnen Sie den Schatten der Pyramide, nachdem Sie die noch fehlenden Punkte berechnet haben. Erläutern Sie Ihren Lösungsweg.

c. Beschreiben Sie, wie man den Winkel berechnen kann, unter dem die Sonnenstrahlen auf eine Pyramidenfläche auftreffen. Bestimmen Sie diesen Winkel für eine der beiden Pyramidenflächen, die in der Sonne liegen.

d. Die Darstellung eines räumlichen Objekts auf dem Bildschirm ist eine lineare Abbildung des 3D-Raums in den 2D-Raum.
Im Bild unten ist eine lineare Abbildung des zweidimensionalen Raums dargestellt.
Bestimmen Sie die zugehörige Matrix und erläutern Sie Ihre Überlegungen.



Material



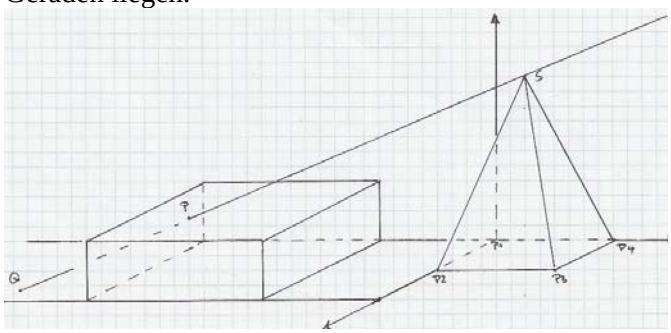
Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

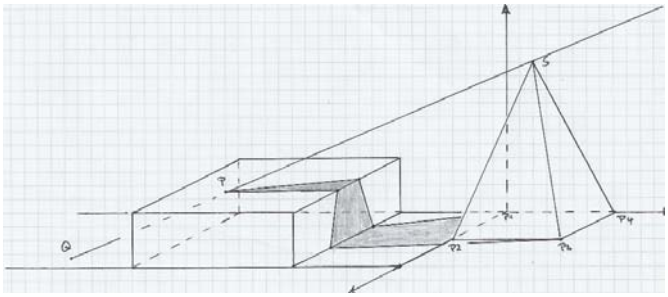
II. Erläuterungen

Zielsetzung
Die Aufgabe orientiert sich an den Leitideen Räumliches Strukturieren/Koordinatisieren und Modellieren. Die Aufgabe überprüft die Fähigkeit, sich in ein räumliches Problem hinein zu denken und dieses zu strukturieren. Bei der Lösung des Problems ist ein ständiger Wechsel zwischen den Darstellungsebenen (grafisch und symbolisch) erforderlich, was ein gutes räumliches Vorstellungsvermögen voraussetzt. Es wird die Darstellung der Situation auf einem Blatt eingefordert. Diese verlangt konzentriertes Arbeiten und präzise Zeichnungen.

Bezug zum Lehrplan
Die üblichen Verfahren zur Untersuchung von Geraden und Ebenen (Punkt-Richtungsform und Koordinatengleichung), der Normalenvektor, das Skalarprodukt und die Berechnung von Längen und Winkeln (12 II) werden benötigt. Die offene Aufgabenstellung an einem realen Objekt ermöglicht unterschiedliche Lösungswege, die aber zum gleichen Ergebnis führen. Im letzten Teil wird die Matrix der zugrunde liegenden linearen Abbildung ermittelt (12 II *).

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösungen	I	II	III	Bezug zum Lehrplan
a.	Zunächst müssen die Daten (Koordinaten der Pyramidenpunkte und Abmessungen der Stufe) der Zeichnung entnommen und die entsprechenden Punkte definiert werden. Die Gleichung der Gerade durch die Spitze wird ermittelt und nachgeprüft, dass die Punkte P und Q auf der Geraden liegen.  Mit dem Lineal lässt sich begründen, dass die Dreiecke P3P4S und P1P4S in der Sonne liegen.	2	4	0	Vektoren Parameterdarstellung einer Geraden Lagebeziehung von Punkt und Gerade
b.	Um den Schatten zeichnen zu können, müssen die Schnittpunkte mit den Kanten berechnet werden. Dazu wird die Ebene, die durch den Sonnenstrahl SP und die Pyramidenkante SP3 gebildet wird betrachtet und ihre Gleichung in Punkt-Richtungsform bestimmt. Die Stufenkanten werden durch einfache Gleichungen (z.B.x2 = -4 und x3=2) beschrieben.				Parameterdarstellung einer Ebene

	Die Schnittpunkte der Stufenkanten mit der Ebene werden berechnet und gezeichnet. Die übrigen Punkte $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ werden als Schnittpunkte der Stufenkanten mit der durch SP und der Pyramidenkante SP1 aufgespannten Ebene berechnet und eingezeichnet. 	4	6	0	Lagebeziehung von Geraden und einer Ebene Parameterdarstellung einer Ebene Lagebeziehung von Geraden und einer Ebene
c.	Die Schüler müssen erkennen, dass z. B. die Fläche P3P4S „in der Sonne liegt“. Sie beschreiben das Verfahren der Winkelberechnung. Um den Winkel zu berechnen, wird zunächst ein Normalenvektor der Ebene bestimmt, der „nach innen“ gerichtet ist. Mit diesem Vektor und dem Richtungsvektor v der Sonnenstrahlen wird der eingeschlossene Winkel berechnet (15.9°). Der gesuchte Winkel ist dann 74.1° $n := [0, -3, -1]$ $\frac{n \cdot v}{\lvert n \rvert \cdot \lvert v \rvert} = \frac{17 \cdot \sqrt{2}}{25}$ $\alpha := \mathrm{ACOS}\left(\frac{17 \cdot \sqrt{2}}{25}\right)$	0	4	2	Skalarprodukt Orthogonalität von Vektoren Winkel zwischen zwei Vektoren Interpretation der Lösung
d.	Die Sch. entnehmen zu zwei beliebigen Punkten die zugehörigen Bildpunkte aus der Zeichnung (z.B. zu (1,0) gehört der Bildpunkt (-1,0.5) und zu (3,5) der Punkt (-3,-3.5) und berechnen durch Matrizenmultiplikation oder durch Lösen eines LGS die Werte der zugehörigen Abbildungsmatrix. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a1 & a2 \\ a3 & a4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ -3 & -3.5 \end{bmatrix}$ $a1 = -1 \wedge a2 = 0.5 \wedge a3 = 0 \wedge a4 = -1$	1	4	3	Matrix und Matrizenprodukt Anwendung in der Geometrie
	∑ 30	**7**	**18**	**5**	

Landesabitur 2007
Beispielaufgaben

Mathematik

Leistungskurs

Beispielaufgabe A 8

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **240 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

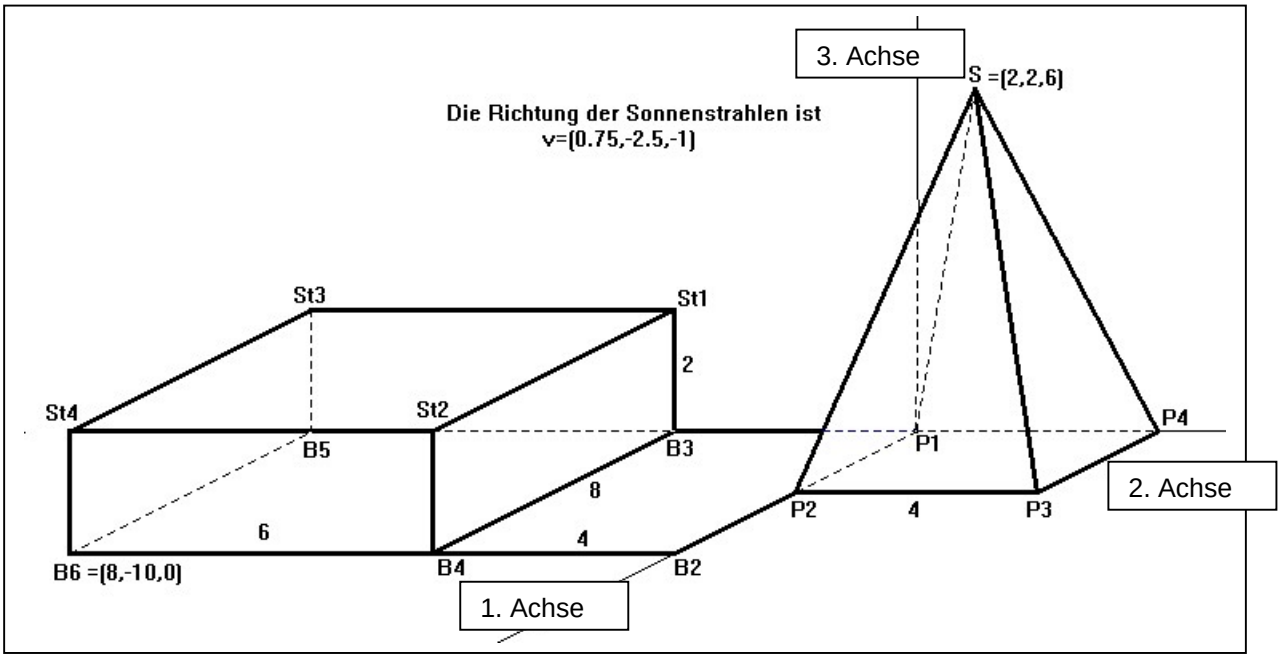
Erlaubte Hilfsmittel:	**Übliche Formelsammlung** **Taschenrechner oder CAS**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Lineare Algebra / Analytische Geometrie

Aufgaben

Eine quadratische Pyramide (Grundkante 4 und Höhe 6) steht neben einer Stufe.



Die Sonne scheint und wirft einen Schatten der Pyramide auf der Stufe. Die Richtung der Sonnenstrahlen ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ -2.5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

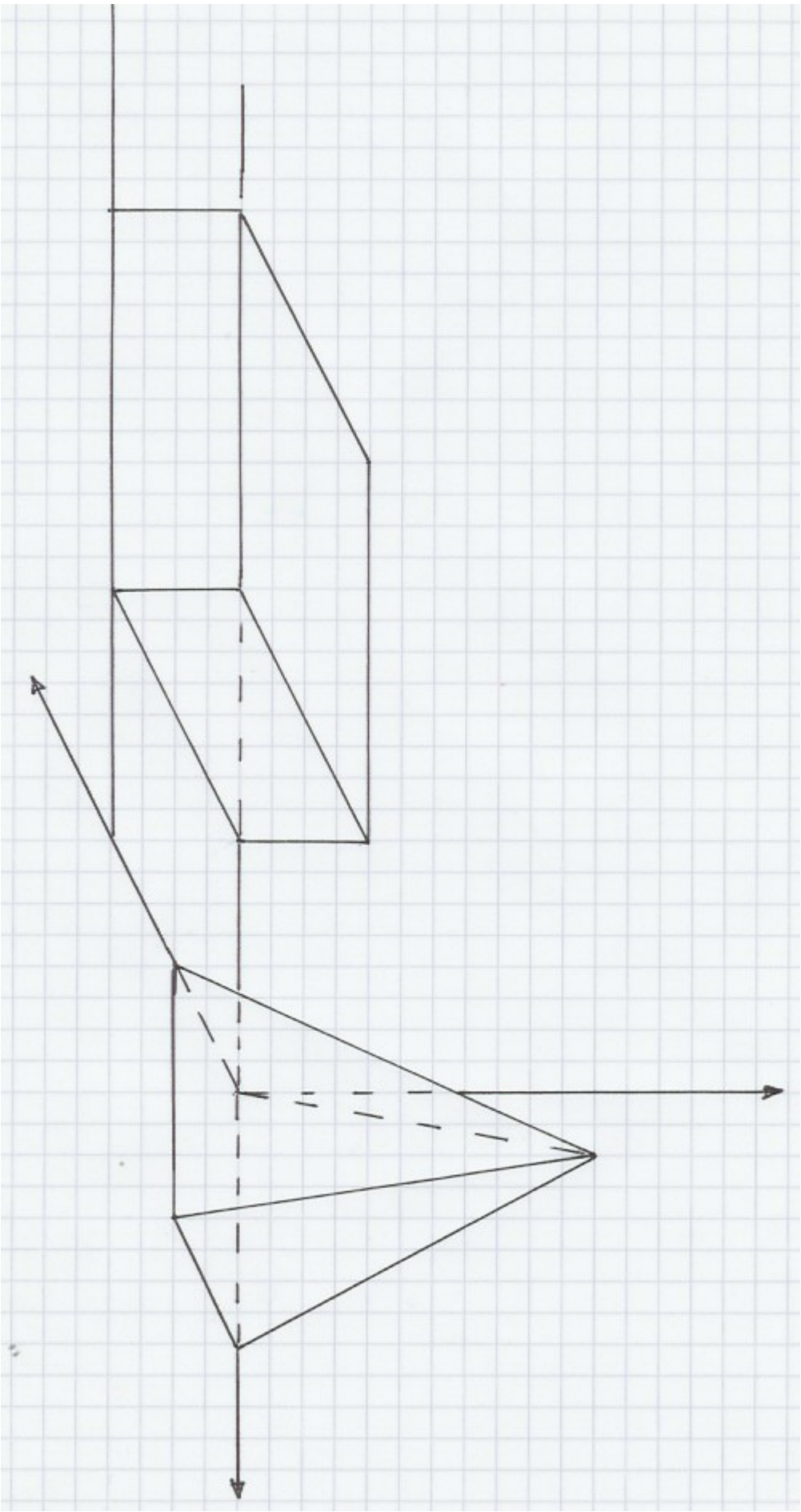
a. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden durch die Spitze, die den Richtungsvektor $\vec{v}$ hat (Sonnenstrahl durch die Spitze der Pyramide). Zeigen Sie, dass die Punkte $P = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} 6.5 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf dieser Geraden liegen, und erklären Sie, wie man mit Hilfe des Punktes Q entscheiden kann, welche Pyramidenflächen in der Sonne liegen.

b. Die Punkte $\begin{pmatrix} 5.2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4.4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ liegen auf dem Schattenrand. Zeichnen Sie den Schatten der Pyramide, nachdem Sie die noch fehlenden Punkte berechnet haben. Erläutern Sie Ihren Lösungsweg.

c. Beschreiben Sie, wie man den Winkel berechnen kann, unter dem die Sonnenstrahlen auf eine Pyramidenfläche auftreffen. Bestimmen Sie diesen Winkel für eine der beiden Pyramidenflächen, die in der Sonne liegen.

d. In die Pyramide wird eine möglichst große Halbkugel einbeschrieben. Deren flache Seite liegt in der x_1-x_2-Ebene. Berechnen Sie den Radius der Kugel, geben Sie die Koordinaten eines Berührpunktes an und erläutern Sie Ihren Lösungsweg.

Material



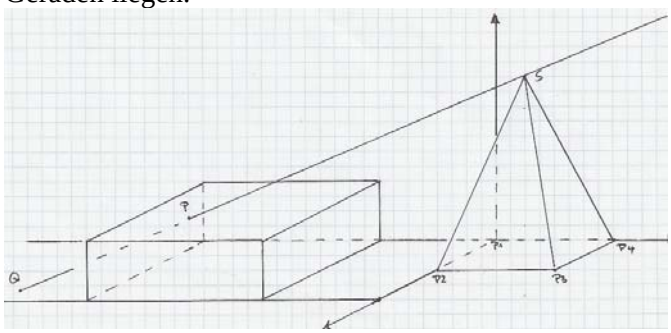
Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

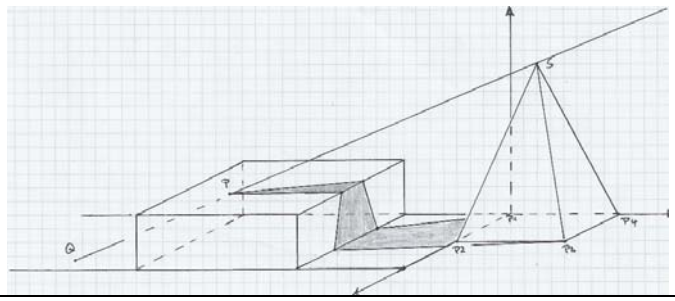
II. Erläuterungen

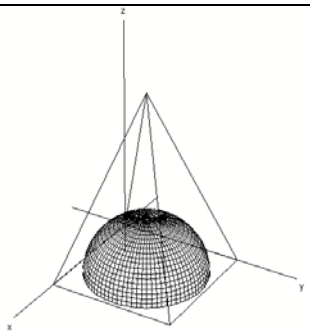
Zielsetzung
Die Aufgabe orientiert sich an den Leitideen Räumliches Strukturieren/Koordinatisieren und Modellieren. Die Aufgabe überprüft die Fähigkeit, sich in ein räumliches Problem hinein zu denken und dieses zu strukturieren. Bei der Lösung des Problems ist ein ständiger Wechsel zwischen den Darstellungsebenen (grafisch und symbolisch) erforderlich, was ein gutes räumliches Vorstellungsvermögen voraussetzt. Es wird die Darstellung der Situation auf einem Blatt eingefordert. Diese verlangt konzentriertes Arbeiten und präzise Zeichnungen.

Bezug zum Lehrplan
Die üblichen Verfahren zur Untersuchung von Geraden und Ebenen (Punkt-Richtungsform und Koordinatengleichung), der Normalenvektor, das Skalarprodukt und die Berechnung von Längen und Winkeln (12 II) werden benötigt. Die offene Aufgabenstellung an einem realen Objekt ermöglicht unterschiedliche Lösungswege, die aber zum gleichen Ergebnis führen. Im letzten Teil wird die Lagebeziehung zwischen Kugel und Ebene untersucht (12II**).

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösungen	I	II	III	Bezug zum Lehrplan
a.	Zunächst müssen die Daten (Koordinaten der Pyramidenpunkte und Abmessungen der Stufe) der Zeichnung entnommen und die entsprechenden Punkte definiert werden. Die Gleichung der Gerade durch die Spitze wird ermittelt und nachgeprüft, dass die Punkte P und Q auf der Geraden liegen.  Mit dem Lineal lässt sich begründen, dass die Dreiecke P3P4S und P1P4S in der Sonne liegen.	2	4	0	Vektoren Parameterdarstellung einer Geraden Lagebeziehung von Punkt und Gerade
b.	Um den Schatten zeichnen zu können, müssen die Schnittpunkte mit den Kanten berechnet werden. Dazu wird die Ebene, die durch den Sonnenstrahl SP und die Pyramidenkante SP3 gebildet wird betrachtet und ihre Gleichung in Punkt-Richtungsform bestimmt. Die Stufenkanten werden durch einfache Gleichungen (z. B.x_2 = -4 und x_3=2) beschrieben.				Parameterdarstellung einer Ebene Lagebeziehung von Geraden und einer Ebene

	Die Schnittpunkte der Stufenkanten mit der Ebene werden berechnet und gezeichnet. Die übrigen Punkte $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ werden als Schnittpunkte der Stufenkanten mit der durch SP und der Pyramidenkante SP1 aufgespannten Ebene berechnet und eingezeichnet. 	4	6	0	Parameterdarstellung einer Ebene Lagebeziehung von Geraden und einer Ebene
c.	Die Schüler müssen erkennen, dass z. B. die Fläche P3P4S „in der Sonne liegt“. Sie beschreiben das Verfahren der Winkelberechnung. Um den Winkel zu berechnen, wird zunächst ein Normalenvektor der Ebene bestimmt, der „nach innen“ gerichtet ist. Mit diesem Vektor und dem Richtungsvektor v der Sonnenstrahlen wird der eingeschlossene Winkel berechnet (15.9°). Der gesuchte Winkel ist dann 74.1° $n := [0, -3, -1]$ $\frac{n \cdot v}{\lvert n \rvert \cdot \lvert v \rvert} = \frac{17 \cdot \sqrt{2}}{25}$ $\alpha := \mathrm{ACOS}\left(\frac{17 \cdot \sqrt{2}}{25}\right)$	0	4	2	Skalarprodukt Orthogonalität von Vektoren Winkel zwischen zwei Vektoren Interpretation der Lösung
d.	Die Sch. erkennen, dass der Mittelpunkt der Kugel im Punkt M = $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt und dass die Gerade durch diesen Punkt und den Berührpunkt senkrecht auf der Fläche steht. Mit der Geraden durch M und Richtungsvektor n wird der Schnittpunkt T1 mit der Pyramidenfläche berechnet. $T1 := \left[2, \frac{19}{5}, \frac{3}{5}\right]$ Der Abstand von T1 und M liefert den gesuchten Radius.				Lagebeziehung zwischen Kugel und Ebene Abstandsberechnung

		1	4	3	
	∑ 30	**7**	**18**	**5**	

Landesabitur 2007
Beispielaufgaben

Mathematik

Leistungskurs

Beispielaufgabe A 9

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **240 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

Erlaubte Hilfsmittel:	**Übliche Formelsammlung** **CAS**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Lineare Algebra / Analytische Geometrie

Aufgaben

Eine quadratische Pyramide (Grundkante 4 und Höhe 6) steht neben einer Treppe.
(Siehe Anlage 1)
Die Sonne scheint und wirft einen Schatten der Pyramide auf der Treppe. Die Richtung der Sonnenstrahlen ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ -2.5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

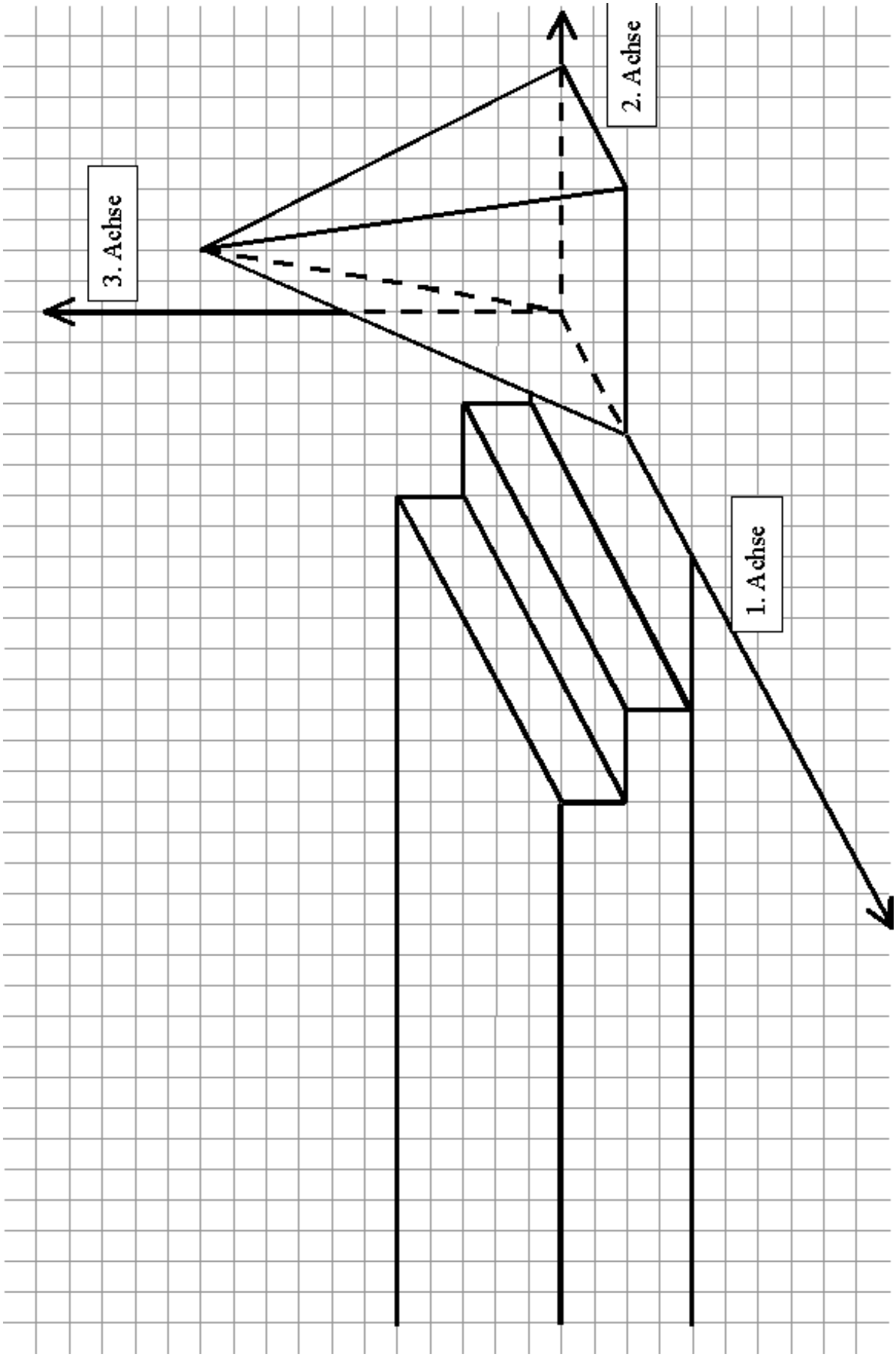
a. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden durch die Spitze, die den Richtungsvektor $\vec{v}$ hat (Sonnenstrahl durch die Spitze der Pyramide). Zeigen Sie, dass die Punkte $P = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} 6.5 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf dieser Geraden liegen und erklären Sie, wie man mit Hilfe des Punktes Q entscheiden kann, welche Pyramidenflächen in der Sonne liegen.

b. Zeichnen Sie den Schatten der Pyramide und berechnen Sie dazu notwendige Punkte. Erläutern Sie Ihren Lösungsweg.

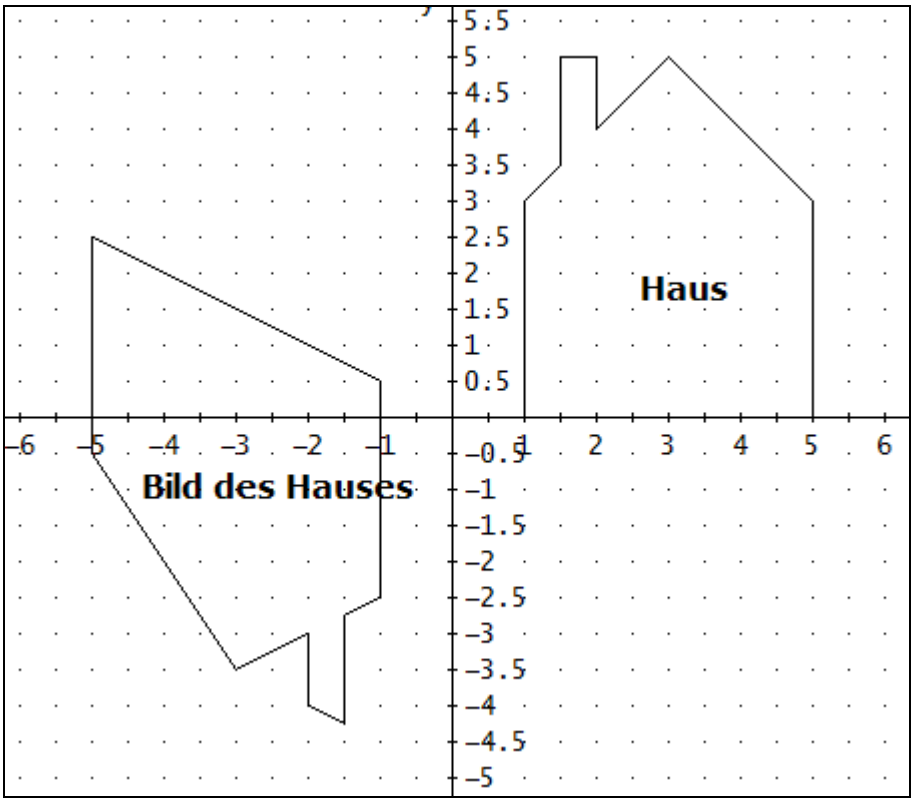
c. Beschreiben Sie, wie man den Winkel, unter dem die Sonnenstrahlen auf eine Pyramidenfläche auftreffen, berechnen kann. Bestimmen Sie diesen Winkel für eine der beiden Pyramidenflächen, die in der Sonne liegen.

d. Die Darstellung eines räumlichen Objekts auf dem Bildschirm ist eine lineare Abbildung des 3D-Raums in den 2D-Raum.
Im Bild unten ist eine lineare Abbildung des zweidimensionalen Raums dargestellt. Bestimmen Sie die zugehörige Matrix und erläutern Sie Ihre Überlegungen.

Material 1



Material 2



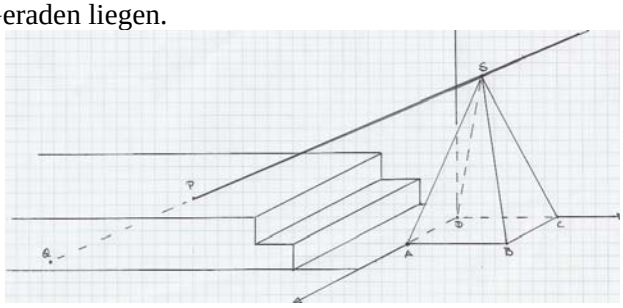
Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

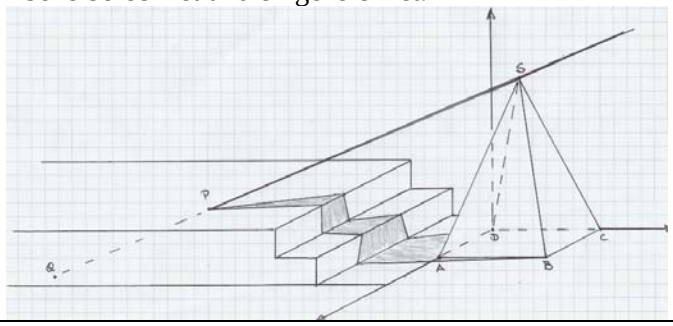
II. Erläuterungen

Zielsetzung
Die Aufgabe orientiert sich an den Leitideen Räumliches Strukturieren/Koordinatisieren und Modellieren. Die Aufgabe überprüft die Fähigkeit, sich in ein räumliches Problem hinein zu denken und dieses zu strukturieren. Bei der Lösung des Problems ist ein ständiger Wechsel zwischen den Darstellungsebenen (grafisch und symbolisch) erforderlich, was ein gutes räumliches Vorstellungsvermögen voraussetzt. Es wird die Darstellung der Situation auf einem Blatt eingefordert. Diese verlangt konzentriertes Arbeiten und präzise Zeichnungen. Die Darstellung der Situation mit dem CAS als Projektion des dreidimensionalen Raums in den zweidimensionalen Raum sollten die Schüler kennen und sie sollten mit Matrizen zur Beschreibung linearer Abbildungen vertraut sein.

Bezug zum Lehrplan
Die üblichen Verfahren zur Untersuchung von Geraden und Ebenen (Punkt-Richtungsform und Koordinatengleichung), der Normalenvektor, das Skalarprodukt und die Berechnung von Längen und Winkeln (12 II) werden benötigt. Die offene Aufgabenstellung an einem realen Objekt ermöglicht unterschiedliche Lösungswege, die aber zum gleichen Ergebnis führen. Die Darstellung der Körper im 2-dimensionalen Raum wird als lineare Abbildung gedeutet, und es werden Matrizen (12 II *) genutzt. Für die umfangreichen Berechnungen ist die Nutzung eines CAS sinnvoll.

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösungen	I	II	III	Bezug zum Lehrplan
a.	Zunächst müssen die Daten (Koordinaten der Pyramidenpunkte und Abmessungen der Treppe) der Zeichnung entnommen und die entsprechenden Punkte definiert werden. A := [4, 0, 0] B := [4, 4, 0] C := [0, 4, 0] D := [0, 0, 0] S := [2, 2, 6]				Vektoren
	Die Gleichung der Gerade durch die Spitze wird ermittelt und nachgeprüft, dass die Punkte P und Q auf der Geraden liegen.				Parameterdarstellung einer Geraden
					Lagebeziehung von Punkt und Gerade
	Mit dem Lineal lässt sich begründen, dass die Dreiecke BCS und CDS in der Sonne liegen.	2	5	0	

b.	Um den Schatten zeichnen zu können, müssen die Schnittpunkte mit den Kanten berechnet werden. Dazu wird die Ebene, die durch den Sonnenstrahl SP und die Kante SB gebildet wird, betrachtet und ihre Gleichung in Punkt-Richtungsform bestimmt. Die Kanten werden durch einfache Gleichungen (z. B. y = -2.5 und z = 1) beschrieben. Die Schnittpunkte der Kanten mit der Ebene werden berechnet und gezeichnet. Die übrigen Punkte werden als Schnittpunkte der Kanten mit der durch SP und der Kante SD aufgespannten Ebene berechnet und eingezeichnet.  	4	6	0	Parameterdarstellung einer Ebene Lagebeziehung von Geraden und einer Ebene
c.	Die Schüler haben erkannt, dass z. B. die Fläche BCS „in der Sonne liegt“. Sie beschreiben das Verfahren der Winkelberechnung. Um den Winkel zu berechnen, wird zunächst ein Normalenvektor der Ebene bestimmt, der „nach innen“ gerichtet ist. Mit diesem Vektor und dem Richtungsvektor v der Sonnenstrahlen wird der eingeschlossene Winkel berechnet (15.9°). Der gesuchte Winkel ist dann 74.1° $n := [0, -3, -1]$ $\frac{n \cdot v}{\lvert n \rvert \cdot \lvert v \rvert} = \frac{17 \cdot \sqrt{2}}{25}$ $\alpha := \mathrm{ACOS}\left(\frac{17 \cdot \sqrt{2}}{25}\right)$	0	3	2	Skalarprodukt Orthogonalität von Vektoren Winkel zwischen zwei Vektoren Interpretation der Lösung
d.	Die Sch. entnehmen zu zwei beliebigen Punkten die zugehörigen Bildpunkte aus der Zeichnung (z.B. zu (1,0) gehört der Bildpunkt (-1,0.5) und zu (3,5) der Punkt (-3,-3.5) und berechnen durch Matrizenmultiplikation oder durch Lösen eines LGS die Werte der zugehörigen Abbildungsmatrix. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a1 & a2 \\ a3 & a4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ -3 & -3.5 \end{bmatrix}$ $a1 = -1 \wedge a2 = 0.5 \wedge a3 = 0 \wedge a4 = -1$	1	4	3	Matrix und Matrizenprodukt Anwendung in der Geometrie
	∑ 30	**7**	**18**	**5**	

Landesabitur 2007
Beispielaufgaben

Mathematik

Leistungskurs

Beispielaufgabe A 10

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **240 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

Erlaubte Hilfsmittel:	**Übliche Formelsammlung** **TR und Binomialverteilung, GTR oder CAS**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Stochastik

Aufgaben

a. In einer Gruppe von 30 Personen sind 10 Wählerinnen und Wähler der Partei ABC und 20 Wähler und Wählerinnen der Partei XYZ. Es werden für Interviews 5 Personen zufällig ausgewählt.

a1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden nur Wählerinnen und Wähler der Partei XYZ ausgewählt?

a2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelangen genau 2 Wählerinnen oder Wähler der Partei ABC in die Stichprobe? Erläutern Sie Ihren Lösungsweg.

b. Eine zufällig ausgewählte Person aus der Bevölkerung gibt ihre Stimme mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}3$ der Partei ABC.

b1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 100 befragten Wählern mehr als 60 und weniger als 78 ihre Stimme einer anderen Partei geben?

b2. Für Berechnungen von Wahrscheinlichkeiten bei großen Stichproben hat die Gaußsche φ-Funktion eine wichtige Bedeutung. Beschreiben Sie den Zusammenhang einer Binomialverteilung und der Gaußschen φ-Funktion. Bestimmen Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Anzahl der ABC-Wähler bei 2100 befragten Wählern mehr als 661 beträgt.

c. Die Umfrageergebnisse der Partei XYZ lagen bisher bei 54 %. Die Strategen im Wahlkampfbüro vermuten, dass nach einer Werbekampagne der Wähleranteil größer geworden ist.

Entwickeln Sie einen Hypothesentest für einen Stichprobenumfang von 150, mit dem die Vermutung des Wahlkampfbüros bei einem Signifikanzniveau von 10 % untersucht werden kann.

Erläutern Sie an diesem Beispiel die möglichen Fehler bei der Entscheidung.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art, wenn der Wähleranteil nach der Werbekampagne tatsächlich 60 % beträgt.

Welchen Einfluss hat der Stichprobenumfang auf die Größe des Fehlers 2. Art?

Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

II. Erläuterungen

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösungen	I	II	III	Bemerkungen
a.	Es handelt sich um ungeordnete Stichproben. Sei X die Zufallsvariable, die angibt wie viele Personen der Partei XYZ ausgewählt werden. günstige Kombinationen: 5 aus 20 mögliche Kombinationen: 5 aus 30 a1. $P(X=5)=\frac{\binom{20}{5}}{\binom{30}{5}}\approx 0{,}1088=10{,}88\%$	2			Kombinatorische Zählprobleme, ungeordnete Stichproben ohne Zurücklegen. Auch andere Lösungswege (z. B. Baumdiagramm) sind möglich
	a2. $P(X=3)=\frac{\binom{20}{3}\binom{10}{2}}{\binom{30}{5}}\approx 0{,}3600=36{,}00\%$ Aus der Gruppe der 20 WählerInnen der Partei XYZ werden (ungeordnet) 3 Personen ausgewählt und entsprechend 2 Personen aus den 10 WählerInnen der Partei ABC, was auf $\binom{20}{3}\cdot\binom{10}{2}$ verschiedene Arten möglich ist. Entsprechend handelt es sich bei dem Term im Nenner um die Anzahl der ungeordneten Stichproben vom Umfang 5 aus einer Gesamtheit von 30 Personen. Da alle Ausgänge gleich wahrscheinlich sind, ergibt der Quotient die gesuchte Wahrscheinlichkeit.		5		Zusätzlich Produktregel Berechnung von Wahrscheinlichkeiten. Auch andere Lösungswege (z. B. Baumdiagramm) sind möglich
b.	Sei Y die Anzahl derer, die ihre Stimme der Partei ABC geben und X die Anzahl derer, die ihre Stimme einer anderen Partei geben. b1. CAS-Version: $P(60<X<78)=\sum_{k=61}^{77}\binom{100}{k}\cdot 0{,}7^k\cdot 0{,}3^{100-k}\approx 0{,}931146$ $=93{,}1146\%$ TR-Version: $P(60<X<78)=F_{100;0,7}(77)-F_{100;0,7}(60)\approx$ $(1-0{,}0479)-(1-0{,}9790)=0{,}9311=93{,}11\%$	3	1		Zufallsgröße Bernoullikette, Binomialverteilung, Summenfunktion

	b2. Eine Binomialverteilung kann durch Verschiebung des Erwartungswertes μ an die Stelle 0, durch Stauchung in x-Richtung um den Faktor σ und gleichzeitige Streckung in y-Richtung mit dem gleichen Faktor flächengleich transformiert werden. Für genügend große Werte von n und eine Varianz von mehr als 9 wird das so entstandene Schaubild gut durch den Graphen der Gaußschen φ-Funktion genähert. $E(Y) = \mu = n \cdot p = 2100 \cdot 0{,}3 = 630$ $\sigma = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{441} = 21$ Damit ergibt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit: $P(Y \geq 662) = 1 - P(Y \leq 661) \approx 1 - \Phi(\frac{661+0{,}5-\mu}{\sigma}) =$ $1 - \Phi(1{,}5) \approx 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668 = 6{,}68\%$	2	5		Zusammenhang zwischen Binomialverteilung und Normalverteilung Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit der Normalverteilung
c.	Die Hypothese H lautet: Der Wähleranteil ist größer als 54 %. H: p>0,54 Die Nullhypothese H_0 lautet: Der Wähleranteil beträgt nach wie vor 54 %. H_0: p=0,54 Bestimmt wird der Ablehnungsbereich A für H_0 unter der Annahme, dass p=0,54 gilt. $E(X) = \mu = n \cdot p = 150 \cdot 0{,}54 = 81$ $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{150 \cdot 0{,}54 \cdot 0{,}46} \approx 6{,}1041$ $P(X > g_r) < 0{,}1 \Leftrightarrow P(X \leq g_r - 1) > 0{,}9$ Näherung durch Gaußsche Summenfunktion: $\Phi(\frac{g_r-1+0{,}5-\mu}{\sigma}) > 0{,}9 \Leftrightarrow \frac{g_r-0{,}5-\mu}{\sigma} > 1{,}2816 \Leftrightarrow g_r > 89{,}3$ $\Rightarrow g_r \geq 90 \Rightarrow A = \{90; 91; ...; 150\}$ Bei einem Stichprobenergebnis von 90 oder mehr WählerInnen der Partei XYZ wird H_0 verworfen. Der Fehler 1. Art beträgt dabei weniger als 10 %. Wenn die Nullhypothese beibehalten wird, kann man einen Fehler 2. Art machen, nämlich dann, wenn der Wähleranteil wirklich größer geworden ist, man dies jedoch nicht erkannt hat. Die Größe des Fehlers 2. Art kann nur angegeben werden, wenn der wahre Wähleranteil p_1 bekannt ist. Fehler 2. Art bei p_1=0,60:				Entwickeln eines Hypothesentests (einseitig) Fehler beim Testen, Fehler 1. Art und Fehler 2. Art Berechnung des Fehlers 2. Art

	$E(X) = \mu = n \cdot p_1 = 150 \cdot 0{,}60 = 90$ $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n \cdot p_1 \cdot (1 - p_1)} = \sqrt{150 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4} = 6$ $P(0 \le X \le 89) \approx \Phi(\frac{89+0{,}5-\mu}{\sigma}) = \Phi(-\frac{1}{6}) =$ $1 - \Phi(\frac{1}{6}) \approx 1 - 0{,}5332 = 0{,}4668 = 46{,}68\%$ Das Risiko 2. Art beträgt bei p_1=0,60 und 90 WählerInnen der Partei XYZ in der Stichprobe 46,68 %. Der Fehler 2. Art ist sehr groß, da die Wahrscheinlichkeiten p und p_1 dicht nebeneinander liegen und der Stichprobenumfang recht klein ist. Würde man den Stichprobenumfang noch kleiner wählen, so würde die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art noch größer. Sinnvoll wäre es hier, den Stichprobenumfang deutlich zu vergrößern, damit das Risiko 2. Art wesentlich kleiner wird.	4	4	4	Einfluss der Stichprobengröße auf den Fehler 2. Art
	Σ 30	**11**	**15**	**4**	

Landesabitur 2007
Beispielaufgaben

Mathematik

Leistungskurs

Beispielaufgabe A 11

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **240 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

Erlaubte Hilfsmittel:	**Übliche Formelsammlung** **Tabellen zur Binomial- und Normalverteilung** **Taschenrechner**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Stochastik

Aufgaben

Rauchen ist das größte vermeidbare Gesundheitsrisiko unserer Zeit, über 110.000 tabakbedingte Todesfälle sind pro Jahr in Deutschland zu verzeichnen. Umso wichtiger ist es, bereits Jugendliche vom Tabakkonsum fernzuhalten.

Der Drogen- und Suchtbericht im Jahr 2004 der Drogenbeauftragten der Bundesregierung, Frau Marion Caspers-Merk, kommt zu dem Ergebnis, dass ca. ein Drittel aller Schüler, die eine 9. oder 10. Klasse besuchen, täglich Zigaretten rauchen. Befragt wurden mehr als 11.000 Schülerinnen und Schüler an verschiedenen Schulformen.

a. Mit welchem mathematischen Modell lässt sich eine Stichprobe von 100 Schülern beschreiben?

b. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 100 Schülern
   b1. höchstens 20 rauchen,
   b2. mindestens 27 rauchen.

c. Wie viele Schülerinnen und Schüler müsste man befragen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,99 mindestens einen Raucher zu finden?

d. Bei der Prävention nehmen laut der Bundeszentrale für gesundheitliche Aufklärung (BZgA) die Sportvereine eine wichtige Rolle ein. Als Beispiel sei die Kampagne „Kinder stark machen“ genannt, die bereits seit den 90er Jahren läuft.

   In einer aktuellen Umfrage an einer Schule ist erfasst worden, wie viele Schülerinnen und Schüler der 9. und 10. Klassen regelmäßig rauchen und Mitglied in Sportvereinen sind. 43 Raucher gaben an, Mitglied in einem Sportverein zu sein, 65 Raucher hingegen zählen zu den Nichtmitgliedern. Bei den Nichtrauchern waren 77 Schüler im Sportverein und wiederum 65 nicht.

   Zeigen Sie, dass die Ereignisse „Mitgliedschaft im Sportverein“ und „Raucher“ nicht unabhängig sind.

e. Die BZgA ergreift verschiedene Maßnahmen zur Suchtprävention. Zum Beispiel muss eine Zigarettenpackung mittlerweile mindestens 17 Zigaretten enthalten. Durch Kleinpackungen, bezeichnenderweise „Kiddy Packs“ genannt, sollen keine erschwinglichen Alternativen für Kinder und Jugendliche geschaffen werden. In einer anderen Kampagne wurde eine fünfteilige Anzeigenserie in Jugendzeitschriften geschaltet.

Die von der BZgA beauftragte Werbeagentur behauptet, dass die präventiven Kampagnen bereits Erfolg hatten. Die BZgA möchte dies überprüfen und lässt dazu 1200 zufällig ausgewählte Schülerinnen und Schüler befragen. Erläutern Sie, warum sich ein einseitiger Hypothesentest anbietet und geben Sie eine ausführlich begründete Entscheidungshilfe: Bis zu welcher Anzahl von Rauchern kann die Raucherprävention als gelungen angesehen werden? Welche Fehler können bei der Interpretation der Daten unterlaufen?

Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

II. Erläuterungen

Zielsetzung
Die Aufgabe ist gekennzeichnet durch einen Sachverhalt, der in einem aktuellen Kontext steht. Die Modellierung dieses Sachverhaltes befindet im Mittelpunkt. Bei der letzten Teilaufgabe erfordern die notwendige numerische Auswertung und die Interpretation der Ergebnisse Einblick in die Komplexität des Sachverhaltes, den sicheren Umgang mit der Normalverteilung und dem Testen von Hypothesen.

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Schülerleistungen	**I**	**II**	**III**	**Bemerkungen**
a.	Eine Stichprobe von 100 Schülern kann als Bernoulli-Experiment angesehen werden, da nur die Ergebnisse „Schüler raucht“ und „Schüler raucht nicht“ interessieren. Nach Aufgabenstellung raucht jeder Schüler mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 1/3$. Die Auswahl der Schüler muss zufällig erfolgen.	1	1		Zufallsgröße. Bernoulliexperiment.
b.	b1. $P(x \le 20) = \sum_{k=0}^{20} \binom{100}{20} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{100-k}$ $= F(100; 0,\overline{3}; 20) \approx 0{,}0024$ b2. $P(x > 26) = 1 - P(x \le 26) =$ $1 - F(100; 0{,}3; 26) \approx 0{,}9285$	4			Bernoullikette. Berechnung mit der Binomialverteilung und ihrer Summenfunktion.
c.	Bestimmung der Größe über das Gegenereignis. $P(x \ge 1) \ge 0{,}99$ $P(x \ge 1) = 1 - P(x = 0) = 1 - B(n; 0,\overline{3}; 0) = 1 - 0,\overline{6}^n$ $1 - 0,\overline{6}^n \ge 0{,}99$ $n > \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0,\overline{6}} \quad \Rightarrow \quad n > 11{,}36$ Mindestens 12 Schüler sind zu befragen.	3	1		Ansatz über die Gegenwahrscheinlichkeit. Berechnung der Stichprobenanzahl.

d.		4	3	1	Unabhängigkeit von Ereignissen. Absolute und relative Häufigkeiten. Vierfeldertafel oder Baumdiagramm.

	S	$\overline{S}$	
R	43	65	108
$\overline{R}$	77	65	142
	120	130	250

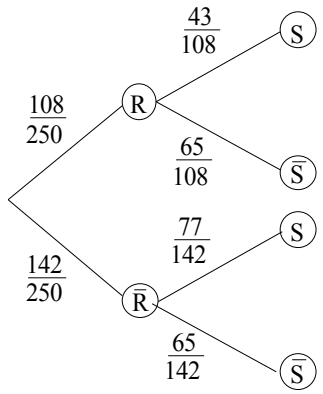


Bild LK_ST_V2_Bild1.jpg

Die Wahrscheinlichkeiten ergeben sich durch die angegebenen Häufigkeiten, die sich in einer Vierfeldertafel darstellen lassen.

Sind die Ereignisse „Rauchen“ und „Mitglied im Sportverein“ unabhängig, so gilt:

$P(R \cap S) = P(R) \cdot P(S)$

$$P(R \cap S) = \frac{108}{250} \cdot \frac{43}{108} = 0{,}172$$

$$P(R) = \frac{108}{250} = 0{,}432 \qquad P(S) = \frac{120}{250} = 0{,}48$$

$$P(R) \cdot P(S) = 0{,}432 \cdot 0{,}48 = 0{,}2074$$

Da die beiden Werte voneinander abweichen, ist eine Abhängigkeit der beiden Merkmale „Rauchen“ und „Mitglied im Sportverein“ zu vermuten.

c.					Einseitiger Hypothesentest.

Es eignet sich ein einseitiger Hypothesentest, da die Vermutung $p < 0{,}\overline{3}$ lautet. Die Nullhypothese wird man ablehnen, wenn die Prüfgröße sehr kleine Werte annimmt.

H0: Die Anzahl der Raucher ist unverändert $p = 0{,}\overline{3}$

H1: Die Anzahl der Raucher ist gesunken $p < 0{,}\overline{3}$

Der Fehler 1. Art bedeutet, dass die BzgA die Hypothese H1 annimmt, obwohl H0 gilt, also irrtümlich einen Erfolg feiert, obwohl die Anzahl der Raucher nicht gesunken ist. Beim Fehler 2. Art wird H0 angenommen, obwohl die Anzahl der Raucher gesunken ist. Die BZgA bringt sich damit um ihren Erfolg.

Unter der Annahme, dass H0 wahr ist, ergibt sich die Zufallsvariable X als B(1200;0,33) verteilt.

$$\sigma = \sqrt{1200 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \sqrt{266{,}\overline{6}} \approx 16{,}33 > 3$$

Also kann die Binomialverteilung durch die Normalverteilung approximiert werden.

Die Irrtumswahrscheinlichkeit soll höchstens 5 % betragen.

Aufstellen der Hypothesen.

Festlegung der Zufallsgröße.

Laplace-Bedingung.

Normalverteilung.

Signifikanzniveau.

	α =P(„weniger als g Raucher“) = 0,05 = P(x < g) = 0,05 $\alpha = \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) = 0{,}05$ $\Phi(z) = 0{,}95$ Mit Hilfe der Tafel für die Gaußsche Integralfunktion und Interpolation: z = 1,645 Aus $z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow x \approx 373{,}14$ Werden weniger als 373 Raucher gezählt, so sollte man sich für die Alternativhypothese entscheiden. Bei einer größeren Anzahl von Rauchern, kann man der Raucherprävention nur wenig Erfolg bescheinigen.		9	3	Berechnung eines Grenzwertes. Erläuterung der Entscheidungsregel.
	Σ 30	**12**	**14**	**4**	

Landesabitur 2007
Beispielaufgaben

Mathematik

Leistungskurs

Beispielaufgabe A 12

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **240 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

Erlaubte Hilfsmittel:	**Übliche Formelsammlung** **GTR oder CAS**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Stochastik

Aufgaben

Rauchen ist das größte vermeidbare Gesundheitsrisiko unserer Zeit, über 110.000 auf das Rauchen zurückzuführende Todesfälle sind pro Jahr in Deutschland zu verzeichnen. Umso wichtiger ist es, bereits Jugendliche vom Tabakkonsum fernzuhalten.

Der Drogen- und Suchtbericht im Jahr 2004 der Drogenbeauftragten der Bundesregierung, Frau Marion Caspers-Merk, kommt zu dem Ergebnis, dass ca. 35 % aller Schüler, die eine 9. oder 10. Klasse besuchen, täglich Zigaretten rauchen. Befragt wurden mehr als 11.000 Schülerinnen und Schüler an verschiedenen Schulformen.

a. Es werden 120 Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 9/10 einer Schule befragt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

a1. höchstens 33 rauchen,

a2. mindestens 50 rauchen.

Begründen Sie Ihren mathematischen Ansatz.

b. Wie viele Schülerinnen und Schüler müsste man wenigstens befragen, damit die Wahrscheinlichkeit mindestens einen Raucher zu finden, größer als 99 % ist?

c. Bei der Prävention nehmen laut der Bundeszentrale für gesundheitliche Aufklärung (BZgA) die Sportvereine eine wichtige Rolle ein. Als Beispiel sei die Kampagne „Kinder stark machen“ genannt, die bereits seit den 90er Jahren läuft.

In einer aktuellen Umfrage an einer Schule ist erfasst worden, wie viele Schülerinnen und Schüler der 9. und 10. Klassen regelmäßig rauchen und Mitglied in Sportvereinen sind. 43 Raucher gaben an, Mitglied in einem Sportverein zu sein, 65 Raucher hingegen zählen zu den Nichtmitgliedern. Bei den Nichtrauchern waren 77 Schüler im Sportverein und wiederum 65 nicht.

Zeigen Sie, dass die Ereignisse „Mitgliedschaft im Sportverein“ und „Raucher“ nicht unabhängig sind.

d. Die BZgA ergreift verschiedene Maßnahmen zur Suchtprävention. Zum Beispiel muss eine Zigarettenpackung mittlerweile mindestens 17 Zigaretten enthalten. Durch Kleinpackungen, bezeichnenderweise „Kiddy Packs“ genannt, sollen keine erschwinglichen Alternativen für Kinder und Jugendliche geschaffen werden. In einer anderen Kampagne wurde eine fünfteilige Anzeigenserie in Jugendzeitschriften geschaltet.

Die von der BZgA beauftragte Werbeagentur behauptet, dass die präventiven Kampagnen bereits Erfolg hatten. Die BZgA möchte dies überprüfen, sie vertritt die Hypothese, dass der Anteil der Raucher unverändert ist. Sie befragt 65 zufällig ausgewählte Schülerinnen und Schüler und will ihre eigene Hypothese verwerfen, wenn höchstens 18 Raucher angetroffen werden.

Erklären Sie, warum hier einseitig getestet wird und welche Fehler bei der Interpretation der Daten unterlaufen können.

Beurteilen Sie die Entscheidungsregel und verändern Sie den Test so, dass der Fehler 1. Art unter 5 % liegt und berechnen Sie für diesen Fall den Fehler 2. Art, wenn der Anteil der Raucher tatsächlich auf 20 % gesunken ist.

Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

II. Erläuterungen

Zielsetzung
Die Aufgabe ist gekennzeichnet durch einen Sachverhalt, der in einem aktuellen Kontext steht. Die Modellierung dieses Sachverhaltes befindet sich im Mittelpunkt. Bei der letzten Teilaufgabe erfordern die notwendige numerische Auswertung und die Interpretation der Ergebnisse Einblick in die Komplexität des Sachverhaltes, den sicheren Umgang mit der Normalverteilung und dem Testen von Hypothesen.

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Schülerleistungen	**I**	**II**	**III**	**Bemerkungen**
a.	a1. $\text{bino}(n,k,p) := \text{comb}(n,k,p)\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ $\sum_{k=0}^{33}\text{bino}(120,k,0.35) = 0{,}0499$ a2. $1-\sum_{k=0}^{49}\text{bino}(120,k,0.35) = 0{,}0768$ Eine Stichprobe von 120 Schülern kann als Bernoulli-Experiment angesehen werden, da nur die Ergebnisse „Schüler raucht“ und „Schüler raucht nicht“ interessieren. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Raucher. Nach Aufgabenstellung raucht jeder Schüler mit einer Wahrscheinlichkeit von p = 0,35. Die Auswahl der Schüler muss zufällig erfolgen.	5	1		Bernoullikette. Berechnung mit der Binomialverteilung und ihrer Summenfunktion. Zufallsgröße. Bernoulliexperiment.
b.	Bestimmung der Größe über das Gegenereignis. $P(x \geq 1) > 0{,}99$ $P(x \geq 1) = 1 - P(x=0) = 1 - B(n;0{,}35;0) = 1 - 0{,}65^n$ $1 - 0{,}65^n > 0{,}99$ $n > \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}65} \quad \Rightarrow \quad n > 10{,}69$ Mindestens 11 Schüler sind zu befragen.	3	1		Ansatz über die Gegenwahrscheinlichkeit. Berechnung der Stichprobenanzahl.

c.					Unabhängigkeit von Ereignissen. Absolute und relative Häufigkeiten. Vierfeldertafel oder Baumdiagramm.

	S	$\overline{S}$	
R	43	65	108
$\overline{R}$	77	65	142
	120	130	250

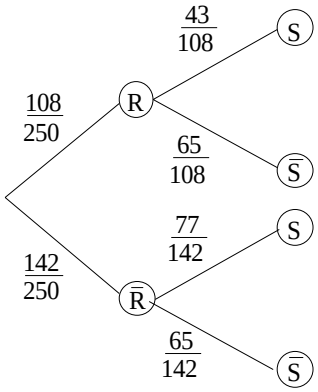


Bild LK_ST_V2_Bild1.jpg

Die Wahrscheinlichkeiten ergeben sich durch die angegebenen Häufigkeiten, die sich in einer Vierfeldertafel darstellen lassen.

Sind die Ereignisse „Rauchen“ und „Mitglied im Sportverein“ unabhängig, so gilt:
$P(R \cap S) = P(R) \cdot P(S)$

Berechnung der Wahrscheinlichkeiten:

$$P(R \cap S) = \frac{108}{250} \cdot \frac{43}{108} = 0{,}172$$

$$P(R) = \frac{108}{250} = 0{,}432 \qquad P(S) = \frac{120}{250} = 0{,}48$$

$$P(R) \cdot P(S) = 0{,}432 \cdot 0{,}48 \approx 0{,}2074$$

Die beiden Merkmale „Rauchen“ und „Mitglied im Sportverein“ sind nicht unabhängig, da die beiden berechneten Wahrscheinlichkeiten voneinander abweichen.

		4	3	1	
d.	Es eignet sich ein einseitiger Hypothesentest, da die Vermutung $p < 0{,}35$ lautet. Die Nullhypothese wird man ablehnen, wenn die Prüfgröße sehr kleine Werte annimmt.				Einseitiger Hypothesentest.
	H0: Die Anzahl der Raucher ist unverändert $p = 0{,}35$. H1: Die Anzahl der Raucher ist gesunken $p < 0{,}35$.				Aufstellen der Hypothesen.
	Der Fehler 1. Art bedeutet, dass die BZgA die Hypothese H1 annimmt, obwohl H0 gilt, also irrtümlich einen Erfolg feiert, obwohl die Anzahl der Raucher nicht gesunken ist. Beim Fehler 2. Art wird H0 angenommen, obwohl die Anzahl der Raucher gesunken ist. Die BZgA bringt sich damit um ihren Erfolg.				Fehler 1. und 2. Art.
	Unter der Annahme, dass H0 wahr ist, ergibt sich die Zufallsvariable X als B(65;0,35) verteilt.				Festlegung der Zufallsgröße.
	$\sum_{k=0}^{18} \text{bino}(65, k, 0.35) = 0{,}1338$				Berechnung Fehler 1. Art.

	Die Irrtumswahrscheinlichkeit erscheint sehr hoch. Die Wahrscheinlichkeit einen Fehler 1. Art zu begehen, beträgt mehr als 13 %. Irrtumswahrscheinlichkeit kleiner 5 %: $\sum_{k=0}^{16} \text{bino}(65, k, 0.35) = 0{,}0492$ Werden höchstens 16 Raucher gezählt, sollte H0 verworfen werden. Fehler 2. Art: $1 - \sum_{k=0}^{16} \text{bino}(65, k, 0.2) = 0{,}1396$		9	3	Signifikanznieveau Berechnung Fehler 2. Art.
	Σ 30	**12**	**14**	**4**	