Lösung

a) Die Länge und Breite des Tennisplatzes ergibt sich aus den Koordinaten von Q oder E oder F bzw. G oder H

Länge 24 m; Breite 9 m

b) Definition der Geschwindigkeit $v = \frac{Weg}{Zeit} = \frac{s}{t}$

s ist die Länge der Strecke $\overline{PH}$, also $d = \sqrt{(4{,}5-4)^2 + (6-24)^2 + (0-3)^2} \approx 18{,}26$

$$\Rightarrow t = \frac{s}{v} = \frac{0{,}01826km}{180\frac{km}{h}} \approx 0{,}37 \text{ Sekunden}$$

c) Gesucht ist der Winkel zwischen der Geraden durch P und H und der x_1x_2-Ebene.

Es gilt $\sin a = \frac{|\vec{n} * \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|}$, wobei $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{u} = \vec{PH}$

$$\sin a = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4-4{,}5 \\ 24-6 \\ 3-0 \end{pmatrix}\right|}{1 \cdot \sqrt{333{,}25}} = \frac{3}{\sqrt{333{,}25}} \Rightarrow a \approx 9{,}5^\circ$$

d) Der Spiegelpunkt von H an der x_1x_2-Ebene ist $H'(4|24|-3)$.

Geradengleichung durch H' und P: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 24 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -18 \\ 3 \end{pmatrix}$

Schnitt mit der x_1x_3-Ebene mit der Gleichung $x_2 = 0$ ergibt:

$$24 - 18t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{3} \Rightarrow S\left(4\frac{2}{3} \mid 0 \mid 1\right)$$

e) Es soll der Teil des Aufschlagfeldes bestimmt werden, der vom Ball bei einem gültigen Aufschlag getroffen werden kann.

Die möglichen Flugbahnen des Tennisballs liegen in den Ebenen E_1 durch H, D und B bzw. E_2 durch H, D und F. Bestimme die Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ dieser Ebenen.

$$\vec{n}_1 = \overrightarrow{HD} \times \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -12 \\ -2{,}1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 0 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}4 \\ -9{,}35 \\ 54 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_2 = \vec{HD} \times \vec{FD} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -12 \\ -2{,}1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4{,}5 \\ 0 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}4 \\ 9{,}55 \\ -54 \end{pmatrix}$$

© 2007 Sebastian Hoheisel

Bestimme die Schnittgerade g der Ebenen E_1 und E_2. Diese ist identisch mit der Geraden durch H und D.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 24 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -12 \\ -2{,}1 \end{pmatrix}$$

Bestimme den Schnittpunkt S der Schnittgeraden g mit der x_1x_2-Ebene.

$$x_3 = 0 \Leftrightarrow 3 - 2{,}1t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{10}{7} \Rightarrow S\left(\frac{33}{7} \mid \frac{48}{7} \mid 0\right); \quad S(4{,}7 \mid 6{,}9 \mid 0)$$

Bestimme die Schnittgeraden von E_1 und E_2 mit der x_1x_2-Ebene. Als Ortsvektor nimmt man $\vec{s}$ und als Richtungsvektoren jeweils das Vektorprodukt von $\vec{n}_1$ bzw. $\vec{n}_2$ mit dem Normalenvektor $\vec{e}_3$ der x_1x_2-Ebene.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2{,}4 \\ -9{,}35 \\ 54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9{,}35 \\ 2{,}4 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2{,}4 \\ 9{,}55 \\ -54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9{,}55 \\ 2{,}4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$s_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{33}{7} \\ \frac{48}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 9{,}35 \\ 2{,}4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad s_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{33}{7} \\ \frac{48}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} -9{,}55 \\ 2{,}4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die x_1 - Koordinate muss wegen der Größe des Aufschlagfeldes die Bedingung $4{,}5 \le x_1 \le 9$ erfüllen.

Die Gerade s_1 schneidet die Aufschlagmittellinie, also gilt:

$$\frac{33}{7} + k \cdot \frac{935}{100} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{60}{2618} \Rightarrow SP_1(4{,}5 \mid 6{,}8 \mid 0)$$

Die Gerade s_2 schneidet die Aufschlagaußenlinie, also gilt:

$$\frac{33}{7} - l \cdot \frac{955}{100} = 9 \Leftrightarrow l = -\frac{600}{1337} \Rightarrow SP_2(9 \mid 5{,}8 \mid 0)$$; Dieser Punkt liegt allerdings außerhalb des T-Feldes.

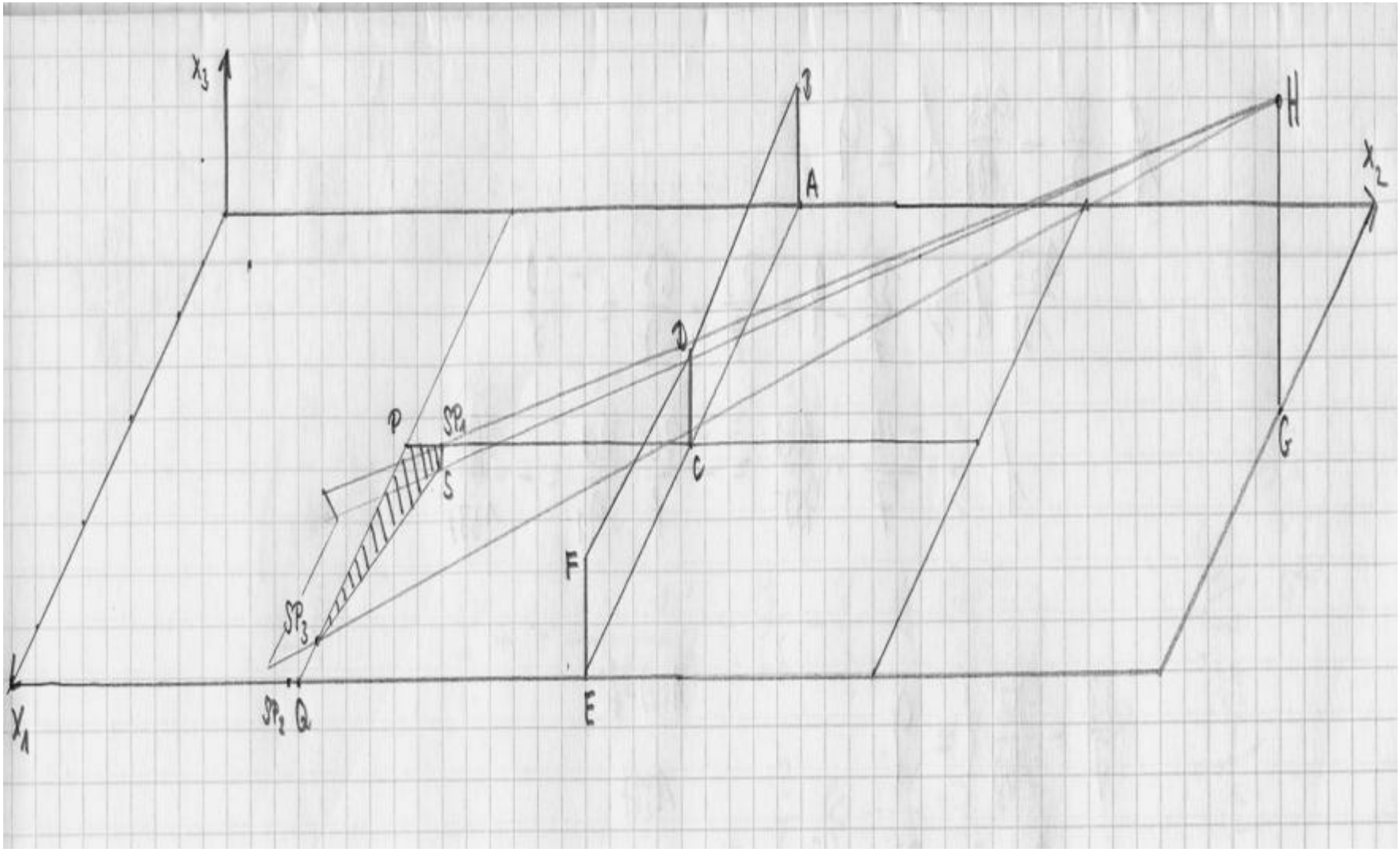
Berechne den Schnittpunkt von s_2 mit der T-Linie:

$$\frac{48}{7} + l \cdot \frac{24}{10} = 6 \Leftrightarrow l = -\frac{5}{14}$$

Die Gerade s_2 schneidet die T-Linie im Punkt $SP_3(8{,}125 \mid 6 \mid 0)$

SP_3 bildet zusammen mit SP_1, S und P, die vier Ecken der Landefläche.

© 2007 Sebastian Hoheisel



© 2007 Sebastian Hoheisel