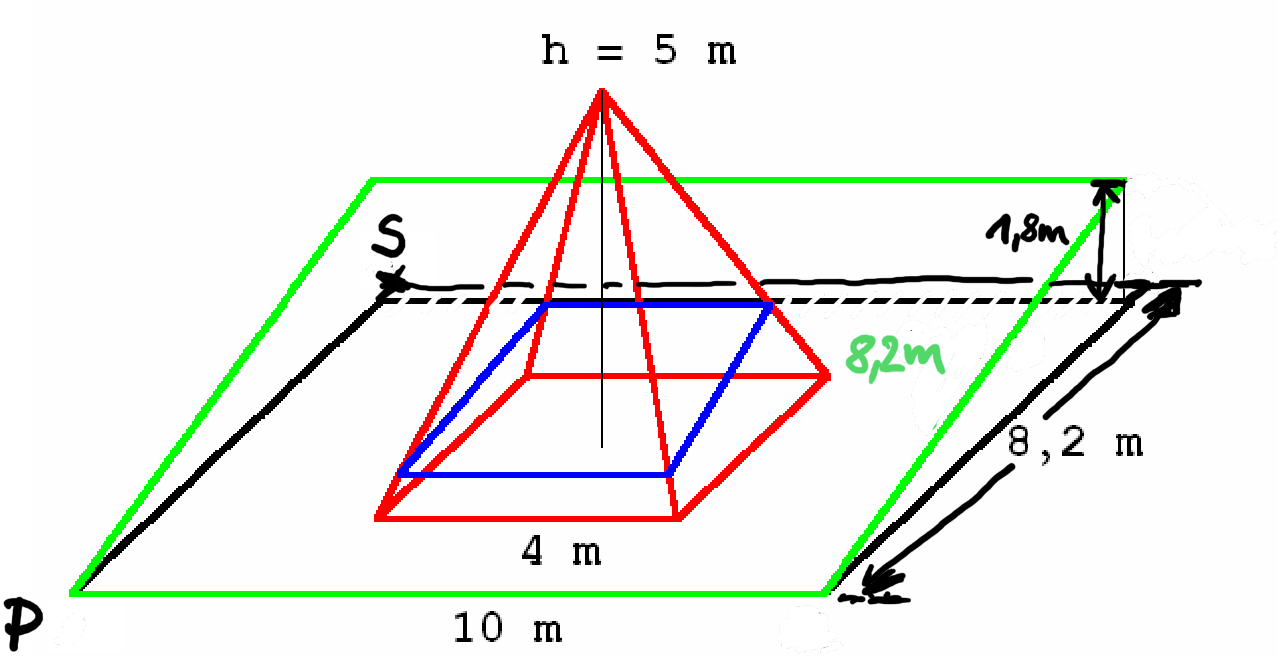
Aufgabe 10 Theaterbühne

Eine Theaterbühne hat einen rechteckigen Fußboden mit der Breite 10 m und der Tiefe 8,20 m.
Genau in der Mitte steht als Bühnendekoration eine 5 m hohe quadratische Pyramide mit der Bodenseitenlänge von 4 m.
Im zweiten Akt soll aus dramaturgischen Gründen von oben ein zweiter nach hinten ansteigender Bühnenboden senkrecht herabgelassen werden. Die Pyramide soll stehen bleiben.
In der Endlage fällt die vordere Kante dieses zweiten Bodens mit der vorderen Kante des Fußbodens zusammen. Die hintere Kante des zweiten Bodens soll dann 1,8 m höher sein als der Fußboden.
Die Abmessungen des zweiten Bodens stimmen mit denen des Fußbodens überein.



Die Bühnenhandwerker müssen aus dem zweiten Boden ein Viereck aussägen, weil sonst beim Herabsenken die Pyramide im Wege wäre. In der Endlage des zweiten Bodens sollen die Seitenflächen der Pyramide und die Seiten des herausgesägten Vierecks sauber abschließen. Die Dicke des zweiten Bühnenbodens wird hier vernachlässigt.

Der zweite Boden liegt zur Bearbeitung als rechteckige Platte auf dem Boden der Werkstatt, und das herauszutrennende Viereck soll angerissen werden.

a) Berechnen Sie den Neigungswinkel des schrägen Bühnenbodens zur Fußbodenfläche.

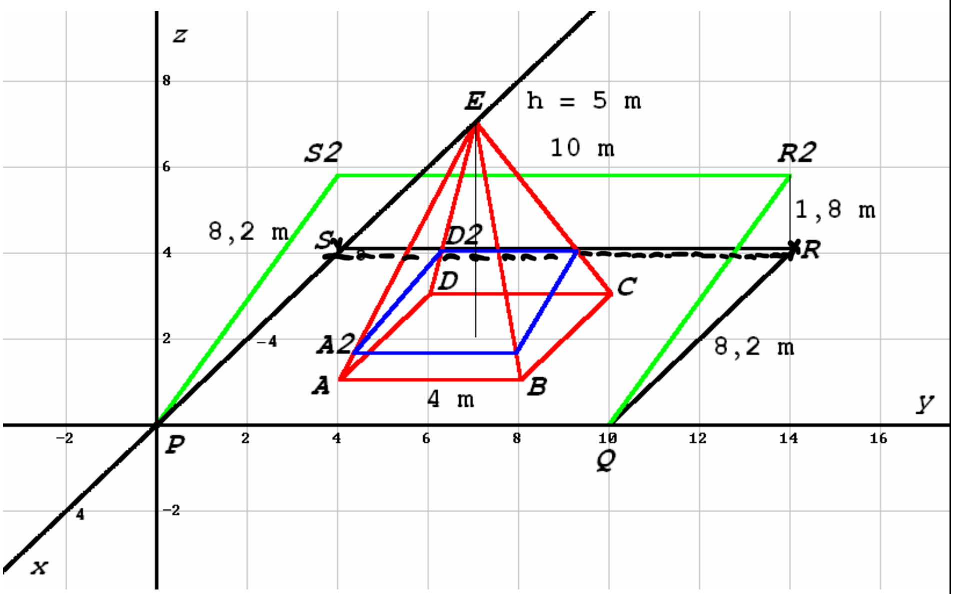
b) Ein geeignetes 3-D-Koordinatensystem wird so gewählt, dass der Punkt P im Ursprung liegt und der Punkt S auf der negativen x_1-Achse. Benennen Sie die wichtigen Punkte und geben Sie deren Koordinaten direkt an (natürlich bis auf die Koordinaten des ausgeschnittenen Vierecks, die ja erst im Laufe der Aufgabe berechnet werden sollen). Zeichnen Sie anschließend die Punkte in das Koordinatensystem ein. 1 LE $\triangleq$ 1 m, der Verkürzungsfaktor in x_1-Richtung beträgt $0{,}5\cdot\sqrt{2}$ und der Winkel zwischen x_1- und x_2-Achse ist 135° groß.

c) Bestimmen Sie eine Koordinaten- und eine Parameterform für die Ebene, in der der schräge zweite Bühnenboden in seiner Endlage liegt.

d) Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte des auszusägenden Vierecks, wenn der Bühnenboden sich in der gewünschten Endlage befindet.

e) Mit den in c) berechneten Daten kann der Bühnenbauer so noch nicht viel anfangen, für ihn liegt die 10 m x 8,2 m –Platte flach auf den Boden der Werkstatt.
Machen Sie eine Skizze dieser (zweidimensionalen) Rechteckplatte und bestimmen Sie eine Bemaßung des auszusägenden Vierecks.

Aufgabe 10 Theaterbühne

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	$\sin(\alpha) = \frac{1{,}8}{8{,}2}$, also $\alpha \approx 12{,}68°$. Der Neigungswinkel des schrägen Bühnenboden zur Fußbodenebene beträgt ca. 13°.	10		
b)	 Mit der skizzierten Lage des Koordinatensystems und den skizzierten Punktbezeichnungen gilt: Boden: $P(0\|0\|0)$ $Q(0\|10\|0)$ $R(-8{,}2\|10\|0)$ $S(-8{,}2\|0\|0)$ Bühnenboden (schräg): Der x_1-Wert der Punkte R_2 und S_2 muss zunächst mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden: $\|x_1\| = \sqrt{8{,}2^2 - 1{,}8^2} = 8$. Damit erhalten wir weitere Koordinaten. Schräger Bühnenboden: $P(0\|0\|0)$, $Q(0\|10\|0)$, $R_2(-8\|10\|1{,}8)$, $S_2(-8\|0\|1{,}8)$. Pyramidenpunkte: $A(-2{,}1\|3\|0)$, $B(-2{,}1\|7\|0)$, $C(-6{,}1\|7\|0)$, $D(-6{,}1\|3\|0)$, $E(-4{,}1\|5\|5)$.	20		
c)	Die x_2-Achse liegt in der Ebene, in der der schräge Bühnenboden liegt, insofern kann man es sich leicht machen und einfach die Gleichung der Spurgeraden in der x_1-x_3-Ebene angeben: $x_3 = -\frac{1{,}8}{8}x_1$ bzw. $9 \cdot x_1 + 40 \cdot x_3 = 0$ Eine Gleichung der Ebene, in der der schräge Bühnenboden liegt, lautet: $9 \cdot x_1 + 40 \cdot x_3 = 0$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

Man kann auch zuerst die Ebene in Parameterform angeben: z.B. $\vec{x} = s \cdot \vec{q} + t \cdot \vec{s_2}$.

Dann erhält man anschließend die Koordinatengleichungen:

$x_1 = -8 \cdot t$, $x_2 = 10 \cdot s$, $x_3 = 1{,}8 \cdot t$, woraus man ebenfalls die obige Ebenengleichung erhält. **II: 20**

---

d) Wir berechnen die Koordinaten der Punkte A_2 und D_2 als Schnittpunkte der entsprechenden Pyramidenkanten mit der in c) berechneten Bühnenebene.

Die anderen beiden Punkte B_2 und C_2 (in der Skizze nicht bezeichnet) kann man dann mit Symmetriebetrachtungen leicht bestimmen.

Die Gerade durch A und E lautet in Parameterform: $\vec{x} = \vec{a} + t \cdot (\vec{e} - \vec{a})$, also:

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Damit erhalten wir die Koordinatengleichungen:

$x_1 = -2 \cdot t - 2{,}1 \qquad x_2 = 2 \cdot t + 3 \qquad x_3 = 5 \cdot t$

Diese setzen wir ein in die Ebenengleichung aus c)

$9 \cdot (-2 \cdot t - 2{,}1) + 40 \cdot 5 \cdot t = 0$, also $182 \cdot t = 18{,}9$ und damit ergibt sich für den für den Punkt A_2 der Parameterwert $t = \frac{27}{260}$.

Das ergibt folgende Koordinaten für A_2 :

$A_2\left(\frac{-30}{13} \mid \frac{417}{130} \mid \frac{27}{52}\right)$ näherungsweise: $A_2(-2{,}31|3{,}21|0{,}52)$.

Aus Symmetriegründen erhält man:

$B_2\left(\frac{-30}{13} \mid 10 - \frac{417}{130} \mid \frac{27}{52}\right)$, also $B_2\left(\frac{-30}{13} \mid \frac{883}{130} \mid \frac{27}{52}\right)$,

näherungsweise $B_2(-2{,}31|6{,}79|0{,}52)$.

Zur Bestimmung des Punktes D_2 verfahren wir genau so:

Die Gerade durch D und E lautet in Parameterform: $\vec{x} = \vec{d} + t \cdot (\vec{e} - \vec{d})$, also:

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6{,}1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Damit erhalten wir die Koordinatengleichungen:

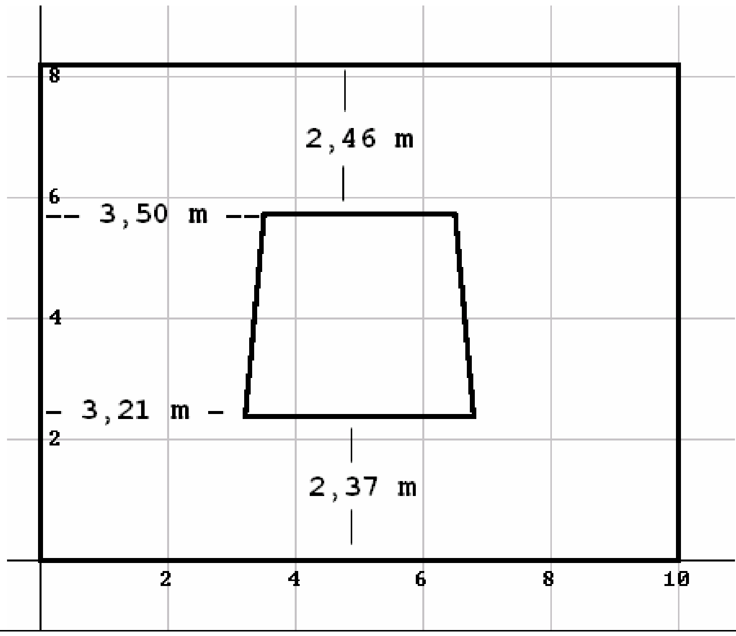
$x_1 = 2 \cdot t - 6{,}1 \qquad x_2 = 2 \cdot t + 3 \qquad x_3 = 5 \cdot t$

Diese setzen wir ein in die Ebenengleichung aus c) :

$9 \cdot (2 \cdot t - 6{,}1) + 40 \cdot 5 \cdot t = 0$.

Damit ergibt sich für den für den Punkt D_2 der Parameterwert

$t = \frac{549}{2180} \approx 0{,}252$ und man erhält folgende Koordinaten für den Punkt D_2 :

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$D_2\left(\frac{-610}{109}\Big\vert\frac{3819}{1090}\Big\vert\frac{549}{436}\right)$, näherungsweise: $D_2(-5{,}60\vert 3{,}50\vert 1{,}26)$. Aus Symmetriegründen erhält man: $C_2\left(\frac{-610}{109}\Big\vert 10-\frac{3819}{1090}\Big\vert\frac{549}{436}\right)$, *also* $C_2\left(\frac{-610}{109}\Big\vert\frac{7081}{1090}\Big\vert\frac{549}{436}\right)$, näherungsweise: $C_2(-5{,}60\vert 6{,}50\vert 1{,}26)$.		30	
e)	Den Bühnenbauer interessieren die Abstände der vier Eckpunkte des auszusägenden Vierecks von den Außenseiten des rechteckigen Bühnenbodens. Die im dreidimensionalen Raum unter d) berechneten Koordinaten dieser Eckpunkte sind so noch nicht ausreichend: Die y-Werte sind zwar schon die Abstände von der linken Seite, aber die Abstände von der vorderen bzw. hinteren Seite des Bühnenbodens müssen noch entweder über die Abstandformel oder direkt mit dem Satz des Pythagoras aus den x_1- und x_3-Werten der in d) bestimmten Punkte berechnet werden: Abstand von A_2 zur unteren Seite $=\sqrt{\left(\frac{30}{13}\right)^2+\left(\frac{27}{52}\right)^2}=\frac{123}{52}\approx 2{,}37$ Abstand von D_2 zur oberen Seite $=8{,}2-\sqrt{\left(\frac{610}{109}\right)^2+\left(\frac{549}{436}\right)^2}=\frac{5371}{2180}\approx 2{,}46$ Für die anderen beiden Punkte ergeben sich die zugehörigen Abstände aus der Symmetrie der Anordnung.  			20
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20