

Aufgabe 9 U-Boot

Während einer Forschungsfahrt tritt ein U-Boot am Punkt $P(1200 \mid 0 \mid -540)$ – alle Angaben in m – in den Überwachungsbereich seines Begleitschiffes ein. Die Überwachung erfolgt durch SONAR (Sound Navigation and Ranging). Das Begleitschiff ruht im Ursprung des Koordinatensystems.

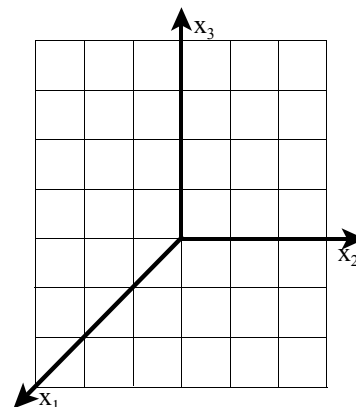
Bei der Darstellung von Punkten und Bewegungen durch Vektoren soll die x_1 -Achse nach Süden zeigen, die x_2 -Achse nach Osten und die x_3 -Achse in vertikaler Richtung nach oben. Im Folgenden entspricht eine Längeneinheit 100 m in der Realität.

- a) Zeichnen Sie die Standorte von U-Boot und Begleitschiff in ein Koordinatensystem ein.

1 LE \triangleq 100 m, der Verkürzungsfaktor in x_1 -Richtung beträgt $0,5 \cdot \sqrt{2}$ und der Winkel zwischen x_1 - und x_2 -Achse ist 135° groß.

- b) Der Kapitän des U-Boots teilt mit, dass er Kurs Nordost mit gleich bleibender Tiefe fährt.

Geben Sie eine Gleichung einer Geraden g an, die die Fahrtroute des U-Bootes beschreibt.



- c) Am Punkt $R(400 \mid 800 \mid -540)$ ändert das U-Boot seine Fahrtrichtung und fährt in Richtung des

Vektors $\vec{w} = \begin{pmatrix} -8 \\ -13 \\ 9 \end{pmatrix}$ weiter.

Bestimmen Sie, um wie viel Grad sich das U-Boot bezüglich der horizontalen Ebene gedreht hat und berechnen Sie den Steigungswinkel bezüglich der horizontale Ebene.

Bestimmen Sie den Punkt T , an dem das U-Boot die Wasseroberfläche erreicht.

Zeichnen Sie in Ihr Koordinatensystem die Bahn des U-Boots zwischen R und T ein.

- d) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punkts S , an dem das U-Boot bezüglich der Fahrt vom Aufgabenteil c) den geringsten Abstand zum Begleitschiff hat.

- e) Nehmen wir an, das U-Boot hätte in R seine Fahrtrichtung nicht verändert und wäre also weiter in gleichbleibender Tiefe Kurs Nordost gefahren.

Ermitteln Sie den Punkt, an dem es den SONAR-Bereich verlässt.

Das U-Boot fährt mit einer Geschwindigkeit von 10 kn (kn: Knoten; 1 kn = 1 Seemeile pro Stunde; 1 Seemeile = 1852 m). Bestimmen Sie die Zeitdauer, die sich das U-Boot im Sonarbereich befindet.

- f) Die *Entfernung* eines Objekts kann mittels SONAR bestimmt werden, wenn man die Zeit misst, die zwischen Ausstrahlung des Ortungssignals und Empfang des reflektierten Signals misst. Die Schallgeschwindigkeit im Wasser beträgt 1,4 km/s.

Beschreiben Sie eine Methode, mit der man die *Geschwindigkeit* eines Objekts ermitteln kann, wenn man z.B. alle Sekunde ein Ortungssignal aussendet.

Erhalten Sie mit Ihrer Methode die tatsächliche Geschwindigkeit des Objekts relativ zum (ruhend gedachten) Wasser? Begründen Sie.

Aufgabe 9 U-Boot

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)		5		
b)	<p>Richtung Nordost heißt hier, dass die Gerade den Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$</p> <p>hat. Mit dem Stützvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 0 \\ -540 \end{pmatrix}$ ergibt sich für g:</p> $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 0 \\ -540 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$	5		
c)	<p>Für den horizontalen Drehwinkel wird die x_3-Komponente des Richtungsvektors Null gesetzt. Damit erhält man den neuen Richtungsvektor $\vec{w}_e = \begin{pmatrix} -8 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix}$. Mithilfe der Formel für das Skalarprodukt ergibt sich als Drehwinkel in der Ebene:</p> $\cos \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}_e}{ \vec{v} \cdot \vec{w}_e } \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{8 - 13}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{233}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{-5}{\sqrt{466}} \Rightarrow \alpha \approx 103,4^\circ.$ <p><i>Bemerkung:</i> Es empfiehlt sich hier immer noch eine kleine Handskizze zu machen, um nicht durch Vorzeichenfehler versehentlich den Komplementärwinkel zu 180° zu „erwischen“.</p>			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p>Als Steigungswinkel verstehen wir den Winkel zwischen der Geraden mit dem Vektor \vec{w} als Richtungsvektor und der zur x_1x_2-Ebene parallelen Ebene, in der g liegt. Zur Berechnung benötigen wir nur den Richtungsvektor \vec{w} und einen Normalenvektor der Ebene, z. B. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, und setzen beide in die entsprechende Formel zur Schnittwinkelberechnung ein:</p> $\sin \beta = \frac{ \vec{w} \cdot \vec{n} }{ \vec{w} \cdot \vec{n} } \Leftrightarrow \sin \beta = \frac{ 9 }{\sqrt{314} \cdot 1 } \Rightarrow \beta \approx 30,5^\circ.$ <p>T ist der Schnittpunkt einer Geraden h und der x_1x_2-Ebene, wobei h die neue Fahrtroute beschreibt. Es gilt: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 400 \\ 800 \\ -540 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -13 \\ 9 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$. Gesucht ist s, sodass die x_3-Komponente Null wird.</p> <p>Aus $-540 + s \cdot 9 = 0$ folgt $s = 60$. Dieser Wert von s wird in die Gleichung von h eingesetzt und es ergibt sich: $\begin{pmatrix} 400 \\ 800 \\ -540 \end{pmatrix} + 60 \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -13 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -80 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$, also hat T die Koordinaten $(-80 20 0)$.</p>	10	20	
d)	<p>Der Abstand eines Punktes auf der Geraden h zum Ursprung $O(0 0 0)$ ergibt sich aus:</p> $\begin{aligned} d(s) &= \left \begin{pmatrix} 400 \\ 800 \\ -540 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -13 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right \\ &= \sqrt{(400 - 8s)^2 + (800 - 13s)^2 + (-540 + 9s)^2} \\ &= \sqrt{314s^2 - 36920s + 1091600} \end{aligned}$ <p>Der Wurzelausdruck ist extremal, wenn der Radikand extremal ist. Also:</p> <p>$f(s) = 314 \cdot s^2 - 36920 \cdot s + 1091600$ und $f'(s) = 628 \cdot s - 36920$. Die notwendige Bedingung für Extrempunkte ist: $f'(s) = 0$. Lösen der linearen Gleichung $628 \cdot s - 36920 = 0$ führt zu $s \approx 58,79$. Da der Graph von f eine nach oben geöffnete Parabel ist, liegt bei $s \approx 58,79$ ein Tiefpunkt. Für S folgt daher:</p> $\begin{pmatrix} 400 \\ 800 \\ -540 \end{pmatrix} + 58,790 \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -13 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -70,32 \\ 35,73 \\ -10,89 \end{pmatrix}.$ <p>Von allen Punkten der Geraden h hat der Punkt $S(-70,32 35,73 -10,89)$ den geringsten Abstand zum Ursprung.</p> <p><i>Hinweis: Die x_3-Komponente ist negativ, also ist S tatsächlich ein Punkt der Fahrtstrecke von dem U-Boot.</i></p>			20

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	<p>Der SONAR-Bereich lässt sich vereinfacht als Kugel K auffassen, mit dem Ursprung als Mittelpunkt. Am Punkt P tritt das U-Boot in den SONAR-Bereich ein, also hat das SONAR eine Reichweite von $r = \sqrt{1200^2 + 540^2} \approx 1316$ m. Das entspricht dem Abstand von P zum Ursprung. Der Sonarbereich lässt sich als Kugel K mit dem Radius r vorstellen. Es gilt: $K : \vec{x}^2 \leq r^2 = 1731600$. Gesucht sind die Schnittpunkte von K mit g, also wird der Term von g in K eingesetzt und nach s aufgelöst.</p> $\left(\begin{pmatrix} 1200 \\ 0 \\ -540 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^2 = r^2 = 1731600$ $(1200 - s)^2 + s^2 + (-540)^2 = 1731600$ $2 \cdot s^2 - 2400 \cdot s + 1731600 = 1731600$ $2s^2 - 2400s = 0$ $s(2 - 2400) = 0.$ <p>Als Lösung erhält man $s = 0$ oder $s = 1200$. $s = 0$ gehört zum Punkt P und $s = 1200$ gehört zum Austrittspunkt Q, mit $\vec{q} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 0 \\ -540 \end{pmatrix} + 1200 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1200 \\ -540 \end{pmatrix}$.</p> <p>Also hat der Austrittspunkt Q die Koordinaten $(0 1200 -540)$.</p> <p>Zur Berechnung der Zeitdauer benötigt man die gefahrene Strecke s, denn mit der Geschwindigkeitsangabe v lässt sich die Zeitdauer t ermitteln. Das U-Boot fährt die Strecke</p> $ \overrightarrow{PQ} = \left \begin{pmatrix} -1200 \\ 1200 \\ 0 \end{pmatrix} \right = \sqrt{(-1200)^2 + 1200^2} = 1200 \cdot \sqrt{2} \approx 1697.$ <p>Dann gilt: $v = 10 \text{ kn} = \frac{10 \cdot 1852 \text{ m}}{1 \text{ h}} = 18,52 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 18520 \frac{\text{m}}{\text{h}}$ und schließlich</p> $t = \frac{s}{v} = \frac{1697}{18520} = 0,09163 \text{ Stunden bzw. ca. 5 Minuten und 30 Sekunden.}$ <p>Das U-Boot befindet sich rund 5,5 min im SONAR-Bereich.</p>			
f)	<p>Misst man die Zeit t_1, die das Signal braucht, um wieder zurückzukommen, kann man die Entfernung s eines Objekts nach der Gleichung $v = \frac{s}{t}$ mit $v = 1,4 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ berechnen: $s = v \cdot \frac{1}{2} t_1$.</p> <p>Misst man jede Sekunde ein Ortungssignal, so erhält man jede Sekunde eine Entfernung. Aus der Entfernungsdifferenz und der Zeitdifferenz lässt sich eine</p>			
			20	10

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Durchschnittsgeschwindigkeit berechnen. Man erhält mit dieser Methode aber lediglich den Geschwindigkeitsanteil, der sich auf die Signalquelle zu bewegt bzw. von ihr weg bewegt und nicht die tatsächliche Geschwindigkeit des U-Bootes.			10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20