Aufgabe 10 Ortskurve der Schnittpunkte

Diese Aufgabe basiert auf der Abituraufgabe Analytische Geometrie V des Abiturjahrgangs 1997 in Bayern.

Gegeben sind 2 Ebenenscharen $\boldsymbol{E_t}$: $2x_1 - tx_2 + 4x_3 = 0$ und

$\boldsymbol{H_t}$: $x_2 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie den Wert von t, für den der Punkt $Q\,(-3{,}2 \mid -4 \mid 5{,}6)$ in der Ebene $\boldsymbol{E_t}$ liegt.

Zeigen Sie, dass sich alle Ebenen $\boldsymbol{E_t}$ in einer Geraden s schneiden. Geben Sie eine Parametergleichung für s an.

b) Berechnen Sie den Wert von t, für den die Ebenen $\boldsymbol{E_t}$ und $\boldsymbol{H_t}$ senkrecht zueinander liegen.

Beschreiben Sie, welche besondere Lage die Ebenen $\boldsymbol{H_t}$ im Koordinatensystem haben.

c) Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden g_t von $\boldsymbol{E_t}$ und $\boldsymbol{H_t}$.

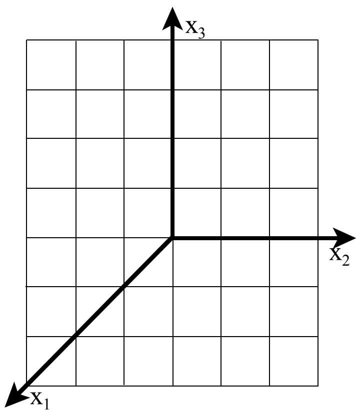
$$\left[\text{mögliches Ergebnis: } g_t:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R}\ \right]$$

Bestimmen Sie den Winkel, den die Gerade g_t mit der Ebene $x_1 = 0$ einschließt.

d) Zeigen Sie, dass durch g_0 und die x_2-Achse die Ebene $\boldsymbol{E_0}$ eindeutig festgelegt ist. Untersuchen Sie, ob alle Geraden g_t auf derselben Seite von $\boldsymbol{E_0}$ liegen.

e) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S_t der Geraden g_t mit der x_2x_3-Ebene. Zeigen Sie, dass die Punkte S_t alle auf einer Parabel in der x_2x_3-Ebene liegen. Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel.

Zeichnen Sie die Geraden g_{-4}, g_{-2}, g_0 und g_2 sowie die oben beschriebene Kurve in ein Koordinatensystem. Beschreiben Sie begründend den Verlauf der Geradenschar.



f) Der Graph der Ortskurve aus Teil e) rotiert im Intervall [0;4] um die x_2-Achse. Beschreiben Sie die Form des entstehenden Körpers.

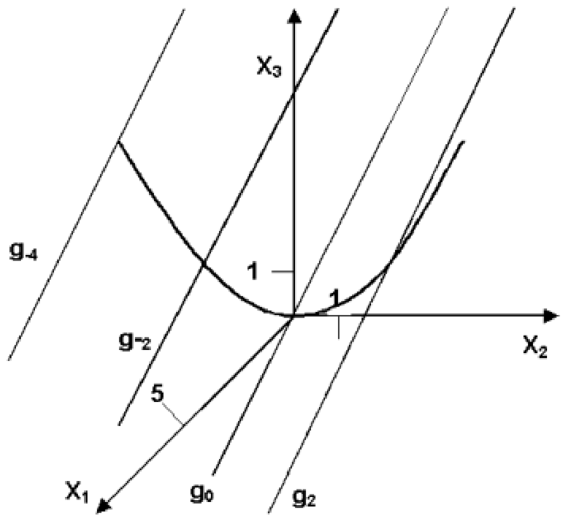
Das Volumen eines Körpers, der durch Rotation des Graphen einer Funktion k im Intervall [a, b] um die x-Achse entsteht, kann durch die Formel $V = \pi \cdot \int_a^b (k(x))^2\,dx$ berechnet werden.

Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers.

Falls Sie die Ortskurve in Teil e) nicht haben bestimmen können, betrachten Sie die Ortskurve $s_3 = 0{,}5\, s_2^2$. (Dies ist aber nicht die gesuchte Ortskurve.)

Aufgabe 10 Ortskurve der Schnittpunkte

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Man setzt die Koordinaten von Q in $\boldsymbol{E_t}$ ein. Elementare Umformungen liefern $t = -4$. Zunächst bestimmt man eine Parameterdarstellung der Ebene $\boldsymbol{E_t}$ mit folgender Festlegung: $x_2 = \lambda$, $x_3 = \mu$, $x_1 = \frac{t}{2} \cdot \lambda - 2\mu$. Es folgt $E_t : \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \frac{t}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in IR$ als mögliche Ebenen-Darstellung. Da der 2. Richtungsvektor unabhängig von t ist und alle Ebenen durch den Ursprung verlaufen, folgt für die Schnittgerade s: $\vec{x} = \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$.	10	5	
b)	Wenn die Ebenen senkrecht zueinander verlaufen sollen, dann muss das Skalarprodukt der Normalenvektoren den Wert 0 ergeben: $$\begin{pmatrix} 2 \\ -t \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -t = 0 .$$ Also stehen die Ebenen $\boldsymbol{E_0}$ und $\boldsymbol{H_0}$ senkrecht aufeinander. $\boldsymbol{H_t}$ verläuft parallel zur x_1x_3–Ebene.	10		
c)	Da sich das Schnittgebilde von $\boldsymbol{E_t}$ und $\boldsymbol{H_t}$ durch $\lambda = t$ beschreiben lässt, folgt aus der Parameterdarstellung für $\boldsymbol{E_t}$ die Schnittgerade g_t: $$g_t: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot t^2 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \ \mu \in \mathbb{R}$$ Den Winkel zwischen der Ebene $x_1 = 0$ und der Geraden g_t kann man mittels des Normalenvektors der Ebene und des Richtungsvektors der Geraden bestimmen: $$\sin\alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} .$$ Damit hat der Winkel den Wert ≈ 63,4°.		20	
d)	Die Ebene, die durch die x_2–Achse und die Gerade g_0 festgelegt wird, lässt sich in der folgenden Form darstellen: $$\vec{x} = \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \ \mu, \sigma \in \mathbb{R} .$$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Ein zugehöriger Normalenvektor hat dann die Form $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Wie man sieht, stimmen die Normalenvektoren dieser Ebene und der von $\boldsymbol{E}_0$ bis auf einen Faktor überein. Da beide Ebenen durch den Ursprung verlaufen, sind sie identisch. Um zu überprüfen, ob alle Geraden auf derselben Seite von $\boldsymbol{E}_0$ liegen, bestimmt man zunächst die Ebene $\boldsymbol{E}_0$ in folgender Form: $\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (x_1 + 2x_3) = 0$, sodass der zugehörige Normalenvektor normiert ist. Anschließend berechnet man den Abstand zwischen der Geraden g_t und der Ebene $\boldsymbol{E}_0$ und erhält den Wert: $\frac{t^2}{2\sqrt{5}}$. Der Wert dieses Bruches ist immer positiv, unabhängig von t. Also liegen alle Geraden auf derselben Seite, mit Ausnahme von $t = 0$. Diese Gerade liegt in der Ebene, wie man anhand eines Vergleichs der Richtungsvektoren erkennen kann.		20	
e)	Da der Schnittpunkt S_t der Geraden g_t mit der x_2x_3–Ebene in der ersten Koordinate den Wert 0 annehmen muss, folgt für den Parameter: $\mu = \frac{t^4}{4}$. Also hat der Schnittpunkt die Koordinaten $S_t\,(\,0 \mid t \mid 0{,}25t^2\,)$.  Die 2. Koordinate des Schnittpunkts hat den Wert t ($x_2 = t$) und die 3. den Wert $\frac{t^2}{4}$ bzw. $x_3 = \frac{t^2}{4} = \frac{1}{4} \cdot x_2^{\,2}$. Also folgt für die Ortskurve der Schnittpunkte: $x_3 = 0{,}25\,x_2^{\,2}$. Der zugehörige Graph ist eine Parabel. Die Graphen der Scharen verlaufen parallel, denn die Richtungsvektoren stimmen überein, da der Parameter t nur im Ortsvektor auftritt.		10	10
f)	Der entstehende Körper ist ein kegelförmiges Gebilde. Der Radius des Grundkreises beträgt 4 LE, die Körperhöhe ebenfalls, die Mantellinie ist allerdings keine Gerade, sondern ein Parabelbogen. Für das Volumen des Rotationskörpers um die x_2-Achse erhält man: $V = \pi \cdot \int_0^4 \frac{1}{16} x^4 dx$. Berechnet man dieses Integral, so folgt: V = 12,8 π.		5	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20