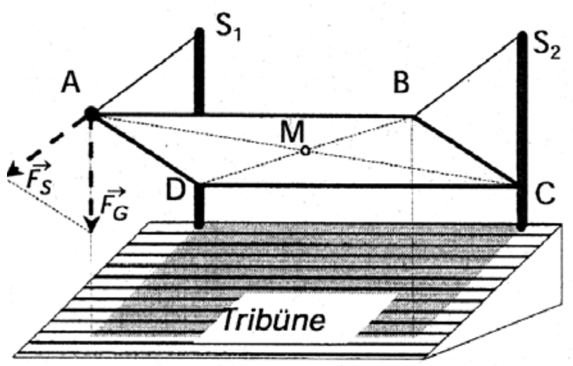
## Aufgabe 13 Tribüne

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(6|-12|22)$, $B(38|4|22)$ und $M(19|2|19)$ sowie die Ebene $\boldsymbol{E_1}$: $2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 65$ gegeben. .

a) Die Punkte $A$, $B$ und $M$ bestimmen eine Ebene $\boldsymbol{E_2}$.
Berechnen Sie eine Ebenengleichung von $\boldsymbol{E_2}$ in Koordinatenform und den Winkel, den $\boldsymbol{E_2}$ mit der $x_1x_2$-Ebene einschließt.
[Mögliches Ergebnis: $\boldsymbol{E_2}$: $-x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 80$.]

b) Die Punkte $A$ und $B$ seien Eckpunkte, der Punkt $M$ sei Schnittpunkt der Diagonalen eines Parallelogramms *ABCD*.
Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte $C$ und $D$ und zeigen Sie, dass dieses Parallelogramm ein Rechteck ist.

Das Dach über dem Teilbereich einer Tribüne kann durch das Rechteck *ABCD* aus Aufgabenteil b) beschrieben werden, wenn 1LE im Koordinatensystem 1m entspricht und die Horizontalebene durch die $x_1x_2$-Ebene dargestellt wird.
In den Punkten $C$ und $D$ ist das Dach an zwei zur Horizontalebene senkrecht stehenden Masten befestigt. Von den Punkten $S_1(0|0|26)$ und $S_2(32|16|26)$ führt jeweils ein Befestigungsseil zu den Punkten $A$ bzw. $B$.
Die Tribüne liege in der Ebene $\boldsymbol{E}_1$.



Skizze nicht maßstäblich

c) Im Punkt $M$ soll ein Kontrollgerät installiert werden. Aus technischen Gründen ist ein Mindestabstand von 10 m zu jedem Punkt der Tribüne vorgeschrieben. Untersuchen Sie, ob diese Vorschrift erfüllt wird.

d) Die Punkte $A'(6|-12|1)$, $B'$, $C'$ und $D'$ seien die Projektionen der Punkte $A$, $B$, $C$ und $D$ auf die Tribüne, die durch zur Horizontalebene senkrechte Strahlen entstehen. Ermitteln Sie die Koordinaten von $B'$, $C'$ und $D'$.
$A'$, $B'$, $C'$ und $D'$ seien die Eckpunkte der überdachten Fläche der Tribüne. Bestimmen Sie das Maß dieser Fläche.

e) Ermitteln Sie den Winkel, den die Seile mit dem Dach einschließen.
Im Punkt $A$ wirkt eine Gewichtskraft $\overrightarrow{F_G}$, mit $|\overrightarrow{F_G}| = 10\,000\ N$, senkrecht zur Horizontalebene.
Diese Kraft kann in eine Komponente $\overrightarrow{F_s}$, die in Richtung der Befestigungsseile wirkt, und in eine Komponente, die in Richtung des Punktes D wirkt, zerlegt werden.
Ermitteln Sie den Betrag der Kraft $\overrightarrow{F_s}$.

## Aufgabe 13 Tribüne

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Koordinatengleichung von $\boldsymbol{E_2}$: $-x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 80$.<br>Ein Normalenvektor der $x_1x_2$-Ebene: $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.<br>Ein Normalenvektor von $\boldsymbol{E_2}$: $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Für den Schnittwinkel gilt dann:<br>$\cos\alpha = \dfrac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} = \dfrac{5}{\sqrt{30}}$. $\alpha \approx 24{,}09°$.</td><td>15</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Bestimmung von $C$: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AM} \Rightarrow C\,(32\,|16\,|16)$,<br>Bestimmung von $D$: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + 2 \cdot \overrightarrow{BM} \Rightarrow D\,(0\,|0\,|16)$.<br>Nachweis der Rechteckeigenschaften: Es genügt zu zeigen, dass einer der Winkel ein rechter ist.<br>Es gilt: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 32 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}$. Das Skalarprodukt der beiden Vektoren beträgt 0; also stehen sie senkrecht aufeinander.<br>Es kann auch gezeigt werden, dass die Diagonalen gleich lang sind.</td><td>5</td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Abstand von $M$ zu $\boldsymbol{E_1}$: Sei $g$ die Gerade durch $M$, die senkrecht auf $\boldsymbol{E_1}$ steht.<br>Eine Geradengleichung von $g$ ist: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 19 \\ 2 \\ 19 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$. Durch Einsetzen der Komponenten von $\vec{x}$ in die Gleichung von $\boldsymbol{E_1}$ ergibt sich:<br>$r = -\frac{4}{3}$. Damit hat der Vektor $\overrightarrow{SM}$ den Betrag $\sqrt{80}$.<br>Der Abstand ist demnach geringer als 10 m.</td><td></td><td>25</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Flächenmaß der überdachten Fläche:<br>Da die Fläche $ABCD$ ein Rechteck ist, ist die senkrecht projizierte Fläche ebenfalls ein Rechteck.<br>$A'$ ist angegeben; $B'$, $C'$, $D'$ unterscheiden sich von den Urbildpunkten lediglich in der $x_3$-Komponente, die man durch Einsetzen in die Ebenengleichung von $\boldsymbol{E_1}$ erhält.<br>Ergebnis: $B'(38\,|4\,|1)$, $C'(32\,|16\,|13)$, $D'(0\,|\,0\,|13)$.<br>Das Flächenmaß $F$ des Rechteckes ist das Produkt der Beträge von $\overline{A'B'}$ und $\overline{A'D'}$.<br>$F = 18 \cdot \sqrt{1280} = 643{,}987...$FE.<br>Die überdachte Fläche hat ein Maß von circa 644 m$^2$.</td><td></td><td>20</td><td>5</td></tr>
</table>

| | Lösungsskizze | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| e) | Winkel α zwischen Seil und Dach: $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix}-6\\12\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6\\12\\-6\end{pmatrix}}{14\cdot 6\sqrt{6}} = \dfrac{13\cdot\sqrt{6}}{42} \approx 0{,}7582.$<br>Daraus folgt: $\alpha \approx 40{,}7°$.<br>Betrag der Kraftkomponente:<br>Es gilt: $\overrightarrow{F_G} = \overrightarrow{F_S} + \overrightarrow{F_D}$ mit $\overrightarrow{F_S} = r\cdot\overrightarrow{S_1A}$ und $\overrightarrow{F_D} = t\cdot\overrightarrow{AD}$.<br>Es gilt also: $\begin{pmatrix}0\\0\\-10000\end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix}6\\-12\\-4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-6\\12\\-6\end{pmatrix}$. Daraus erhält man $r = t = 1000$.<br>Damit gilt: $\lvert\overrightarrow{F_S}\rvert$ = 14 000 N. $\overrightarrow{F_S}$ hat einen Betrag von 14 000 $N$. | | | 15 |
| | Insgesamt 100 BWE | 20 | 60 | 20 |