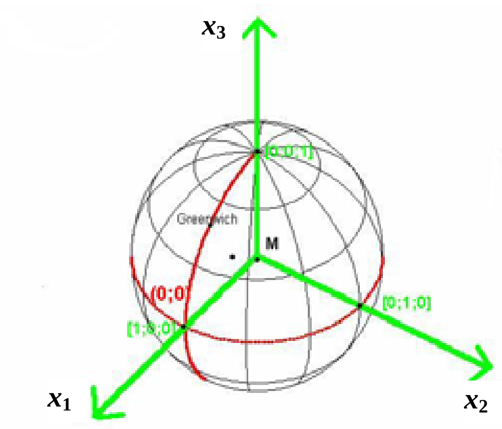
Aufgabe 5: GPS

Eine Person bestimmt ihre Position auf der Erdoberfläche mit Hilfe eines GPS-Gerätes. Dieser Vorgang soll in dieser Aufgabe prinzipiell nachvollzogen werden.

Wir machen dazu folgende vereinfachende Annahmen:

- Die Erde ist eine ideale Kugel mit einem Umfang von 40 000 km und dem zugehörigen Radius von $R =$ 6 366 km. Als Längeneinheit wählen wir gerade diesen Erdradius.

- Weiterhin betrachten wir folgendes erdgebundene Koordinatensystem:
  Der Koordinatenursprung ist der Erdmittelpunkt. Die x_3-Achse liegt auf der Erdachse und zeigt nach Norden. Der Nordpol ist also der Einheitspunkt auf der x_3-Achse mit den Koordinaten (0 | 0 | 1).
  Die x_1-Achse geht durch den Schnittpunkt von Äquator und Nullmeridian, dieser Punkt mit den geographischen Koordinaten 0° Breite und 0° Länge ist der Einheitspunkt auf der x_1-Achse, hat also die Koordinaten (1 | 0 | 0) .
  Der Einheitspunkt auf der x_2-Achse hat dann 0° Breite und 180° östliche Länge und die Koordinaten (0 | 1 | 0).



- Zu einem genau fixierten Zeitpunkt der Positionsbestimmung empfängt die Person mit ihrem GPS-Gerät von zwei GPS Satelliten deren genaue Positionen Sat_1 und Sat_2 in dem genannten rechtwinkligen Koordinatensystem. Außerdem empfängt der GPS-Empfänger die genaue Uhrzeit in den Satelliten zum Zeitpunkt der Aussendung der Signale. Aus der Zeitdifferenz der beiden Uhren in den Satelliten und im GPS-Empfänger zum Empfangszeitpunkt kann dieser (mit Hilfe der Lichtgeschwindigkeit) die Entfernungen d_1 und d_2 von seiner unbekannten Position zu den beiden Satelliten berechnen. (Dies ist in Wirklichkeit wegen der Ungenauigkeit der Empfängeruhr komplizierter!).

Nun zur eigentlichen Aufgabe:

Es sei $Sat_1 = (\,2 \mid 2 \mid 3)$ und $d_1 = 3{,}2$ und ebenso $Sat_2 = (\,3 \mid 2 \mid 2)$ und $d_2 = 3{,}3$.

a) Erläutern Sie den prinzipiellen Weg, wie man den Standort der Person aus den gegebenen Daten berechnen kann.

b) Betrachten Sie die Kugel um Sat_1 mit dem Radius d_1 und stellen Sie die Gleichung der Kugeloberfläche auf.
Diese Kugeloberfläche schneidet die Erdoberfläche in einem Schnittkreis. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der dieser Schnittkreis liegt.
(zur Kontrolle: Einen mögliche Antwort ist: E_1: $100x + 100y + 150z = 194$)

c) Wenn wir die gleiche Rechnung wie in b) für die Kugel um Sat_2 mit dem Radius d_2 durchführen, erhalten wir folgende Gleichung für die Schnittkreisebene: E_2: $600x + 400y + 400z = 711$.
Bestimmen Sie die Schnittgerade der beiden Ebenen E_1 und E_2 in der Parameterform.

d) Bestimmen Sie nun die Koordinaten von zwei Punkten, von denen einer der Standort der Person sein muss.

e) Die Person weiß immerhin, dass sie sich in Nordeuropa aufhält.
Berechnen Sie die geographischen Koordinaten des Standorts der Person.

Gehen Sie gedanklich von Hamburg aus (53,5° N; 10° O) soweit nach Norden oder Süden, bis Sie in genau östlicher oder westlicher Richtung den Standort der Person erreichen können, und berechnen sie die Länge dieser beiden Wegstrecken.

f) Berechnen Sie die Länge des kürzesten Weges von Hamburg zum Standort der Person.

Aufgabe 5: GPS

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Aus den als bekannt vorausgesetzten Informationen geht hervor, dass sich die Person gleichzeitig auf der Oberfläche von drei Kugeln befinden muss: • der Erdkugel • der Kugel um Sat_1 mit dem Radius d_1 und • der Kugel um Sat_2 mit dem Radius d_2. Wenn die Daten realistisch sind, dann müssen sich die Erdoberfläche und jede der beiden anderen Kugeloberflächen jeweils in einem Kreis schneiden, den man berechnen kann. Die beiden Schnittkreise schneiden sich dann in zwei Punkten, die man berechnen kann und die in der Regel weit voneinander entfernt liegen, so dass man aus der grob ungefähren Kenntnis des Standortes der Person einen von beiden ausschließen kann.		20	
b)	Es sei $P(x_1 \mid x_2 \mid x_3)$ ein variabler Punkt. Die Kugelgleichung lautet dann: $\left(\vec{p}-\vec{s_1}\right)^2 = d_1^2$, also $\left(x_1-2\right)^2+\left(x_2-2\right)^2+\left(x_3-3\right)^2 = 3{,}2^2$. Für die Erdoberfläche gilt: $P^2 = 1$, also $x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1$. Subtraktion dieser beiden Gleichungen ergibt: $4x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 17 = -\frac{231}{25}$. Durch Multiplikation der Gleichung mit 25 erhält man das genannte Ergebnis: $100x_1 + 100x_2 + 150x_3 = 194$. Es handelt sich um eine Ebenengleichung. Alle gemeinsamen Punkte auf den beiden Kugeloberflächen müssen diese Gleichung erfüllen (Umkehrung gilt nicht!), also muss es sich um die Ebene des Schnittkreises handeln.	10		
c)	Wenn man das unterbestimmte lineare Gleichungssystem $100x_1 + 100x_2 + 150x_3 = 194$ $600x_1 + 400x_2 + 400x_3 = 711$ äquivalent umformt (Gauß-Algorithmus) erhält man z.B. $x_2 = \frac{581}{400} - \frac{5}{2}x_1 \qquad x_3 = \frac{13}{40} + x_1$ Daraus erhält man folgende Parameterform der Schnittgeraden der beiden Schnittkreisebenen: $g:\ \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{581}{400} \\ \frac{13}{40} \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$.		20	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
d)	Der Standort der Person muss sowohl auf dieser Geraden, als auch auf der Erdoberfläche liegen. Das führt auf folgende quadratische Gleichung: $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{581}{400} \\ \frac{13}{40} \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)^2 = 1$, also $\frac{33}{4}x^2 - \frac{529}{80}x + \frac{194461}{160000} = 0$ mit den Lösungen: $x_1 = \frac{529}{1320} + \frac{\sqrt{144703}}{3300}$, $x_2 = \frac{529}{1320} - \frac{\sqrt{144703}}{3300}$ bzw. $x_1 \approx 0{,}51603$, $x_2 \approx 0{,}28549$. Mit den Gleichungen aus c) oder der Parameterdarstellung der Geraden erhält man folgende mögliche Positionen der Person: $\mathrm{Pos}_1 = \left(\frac{529}{1320} + \frac{\sqrt{144703}}{3300} \mid \frac{1487}{3300} - \frac{\sqrt{144703}}{1320} \mid \frac{479}{660} + \frac{\sqrt{144703}}{3300}\right)$ $\mathrm{Pos}_2 = \left(\frac{529}{1320} - \frac{\sqrt{144703}}{3300} \mid \frac{1487}{3300} + \frac{\sqrt{144703}}{1320} \mid \frac{479}{660} - \frac{\sqrt{144703}}{3300}\right)$ bzw. $\mathrm{Pos}_1 \approx (0{,}51603 \mid 0{,}73879 \mid 0{,}84103)$ $\mathrm{Pos}_2 \approx (0{,}28549 \mid 0{,}16243 \mid 0{,}61049)$ *Anmerkung: Hier wurde bis jetzt exakt gerechnet, es ist auch zulässig, in einer früheren Phase zu Darstellungen als Dezimalbruch mit Taschenrechnergenauigkeit überzugehen.*	10	10	
e)	Die Umrechnung von geographischen Koordinaten auf der Erdoberfläche in kartesische Koordinaten erfolgt bekanntermaßen wie folgt: $(\beta;\lambda) \to (\cos\beta\cdot\cos\lambda \mid \cos\beta\cdot\sin\lambda \mid \sin\beta)$ (Beachte: $R = 1$) Diese Rechnung muss hier umgekehrt werden: $ß = \mathrm{Arcsin}(z)$ $\lambda = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{y}{\cos\beta}\right)$ Also: $(\beta_1 ; \lambda_1) \approx (57{,}3°; 17{,}5°)$ $(\beta_2 ; \lambda 2) \approx (37{,}6°; 68{,}9°)$. Es kommt nur die erste Position in Frage, diese liegt deutlich nordöstlich von Hamburg.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$\frac{(57{,}3°-53{,}5°)}{360°}\cdot 40\,000 \approx 422$, $\frac{(17{,}5°-10°)}{360°}\cdot \cos 53{,}5°\cdot 40\,000 \approx 450$. Also ca. 422 km nördlich von Hamburg und von dort aus ca. 450 km östlich. *(Das ist in der schwedischen Ostsee zwischen Öland und Gotland !).*			10
f)	Mit der Umrechnung $(\beta\,;\lambda) \to (\cos(\beta)\cdot\cos(\lambda)\,\vert\,\cos(\beta)\cdot\sin(\lambda)\,\vert\,\sin(\beta))$ berechnen wir die Koordinaten von Hamburg: $H := (\cos 53{,}5°\cdot\cos 10°\vert\cos 53{,}5°\cdot\sin 10°\vert\sin 53{,}5°)$ $\approx (0{,}58579 \mid 0{,}10329 \mid 0{,}80386)$ Sowohl H als auch Pos_1 liegen auf der Erdoberfläche, haben also in dem gewählten Maßstab den Betrag 1. Mit Hilfe des Skalarproduktes berechnet man den sphärischen Winkel: $\sphericalangle H\,O\,Pos_1 = ArcCos(< H\,;Pos_1 >) \approx 5{,}66°$. Für die zugehörige Bogenlänge auf der Erdoberfläche gilt dann: $b \approx \frac{5{,}66}{360}\cdot 40\,000 \approx 629$. Die kürzeste Weglänge auf der Erdoberfläche von Hamburg zur Position der Person beträgt etwa 629 km.		10	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20