Name: **Datum:**

Anwendungsaufgabe - Flugbahnen dreier Flugzeuge.doc

Die Flugbahnen zweier Flugzeuge A und B sind gegeben durch die Gleichungen $g_A: \vec{x} = \begin{pmatrix} -200 \\ -700 \\ 1300 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ -30 \end{pmatrix}$ und $g_B: \vec{x} = \begin{pmatrix} 220 \\ -160 \\ 1000 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ -30 \\ 30 \end{pmatrix}$.

Die Komponenten der Vektoren stehen für Maßzahlen von Streckenlängen in m bzw. von Geschwindigkeiten in m/sec, die Parameter t stehen für Maßzahlen von Zeiten in sec seit Beginn der Beobachtung. Der Koordinatenursprung ist der Ort des Towers am Flugplatz.

a) *Zeigen Sie, dass sich die Flugbahnen von A und B schneiden, berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes und untersuchen Sie, ob die Flugzeuge A und B in diesem Punkt kollidieren würden.*

b) *Geben Sie eine Gleichung für die Ebene an, in der beide Flugbahnen liegen.*

Ein weiteres Flugzeug C befand sich zum Zeitpunkt $t_1 = -5$ im Punkt $C_1(250\,|\,-250\,|\,1000)$ und zum Zeitpunkt $t_2 = +5$ im Punkt $C_2(550\,|\,450\,|\,1000)$.

c) *Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden* g_C*, die die Flugbahn des Flugzeugs C beschreibt. Achten Sie dabei insbesondere darauf, dass auch in dieser Gleichung der Parameter* t *die Bedeutung einer Zeit in sec mit dem gleichen Nullpunkt der Zeit wie die Flugzeuge A und B hat.* [**Kontrollergebnis:** $g_C: \vec{x} = \begin{pmatrix} 400 \\ 100 \\ 1000 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 70 \\ 0 \end{pmatrix}$]

d) *Berechnen Sie die Koordinaten der beiden Punkte, an denen sich die Flugzeuge B und C zum Zeitpunkt* $10\,sec$ *befinden.*

Es gibt einen Punkt am Boden, von dem aus die beiden Flugzeuge B und C zum Zeitpunkt $10\,sec$ an der gleichen Stelle zu sein scheinen.

e) *Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes.*

Da sich Flugzeug A gerade im Landeanflug befindet, ist seine Flugbahn stark nach unten geneigt.

f) *Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Flugzeugs beim Landeanflug und die Weite des Winkels, den die Flugbahn mit dem Boden (d.h. mit der x-y-Ebene) bildet.*

Die rechteckige Landebahn des Flughafens wird beschrieben durch die Gleichung $LB: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2150 \\ 1550 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \ell \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und der wichtigen Bedingungen $b \in [0\,;100]$ sowie $\ell \in [0\,;2000]$.

g) *Zeigen Sie, dass Flugzeug A auf der Landebahn aufsetzt.*

h) *Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden* $g_{A\,Boden}$*, die die Bewegung des Flugzeugs nach dem Aufsetzen auf der Landebahn beschreibt.*

i) *Weisen Sie nach, dass das Flugzeug nach dem Aufsetzen ohne Kursänderung auf der Landebahn ausrollen kann.*

j) *Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Flugzeugs kurz nach dem Aufsetzen auf der Landebahn.*

k) *Berechnen Sie, mit welcher Verzögerung bzw. in welcher Zeit das Flugzeug abgebremst werden muss, damit es nicht über die Landebahn hinausrollt.*

Lösung:

a) $t_A = 8$ und $t_B = 2$ liefert $S(280\,|\,\text{-}220\,|\,1060)$; Die Flugzeuge kollidieren nicht, da die beiden Parameter verschieden sind, d.h. die Flugzeuge zu unterschiedlichen Zeitpunkten im Schnittpunkt eintreffen.

b) nach **a)** z.B. $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 280 \\ -220 \\ 1060 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ -30 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ -30 \\ 30 \end{pmatrix}$

c) vgl. Kontrollergebnis

d) B ist zum Zeitpunkt $t = 10\text{sec}$ am Ort $(520\,|\,\text{-}460\,|\,1300)$ und C am Ort $(700|800|1000)$.

e) Die Gerade durch diese beiden Punkte lässt sich durch die Gleichung $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 520 \\ -460 \\ 1300 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 180 \\ 1260 \\ -300 \end{pmatrix}$ beschreiben. Schnitt dieser Geraden mit der xy-Ebene liefert als gesuchten Punkt am Boden $(1300|5000|0)$.

f) Die gesuchte Geschwindigkeit ergibt sich zu $v = \sqrt{60^2 + 60^2 + (-30)^2} = 90$ (also $v = 90\text{m/sec} = 324\text{km/h}$.

Der gesuchte Winkel ergibt sich aus $\sin(\alpha) = \dfrac{30}{\sqrt{60^2 + 60^2 + 30^2}} \Leftrightarrow \alpha \approx 19{,}5°$.

g) Schnitt der Geraden $g_A : \vec{x} = \begin{pmatrix} -200 \\ -700 \\ 1300 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ -30 \end{pmatrix}$ mit der Ebene $LB : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2150 \\ 1550 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \ell \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ liefert $S(2400\,|\,1900\,|\,0)$ mit $b = 50$ und $\ell = 300$; also landet das Flugzeug genau ‚mittig' auf der Landebahn.

h) Nach dem Aufsetzen bewegt sich das Flugzeug mit $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2400 \\ 1900 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}$.

i) Der Richtungsvektor ist genau parallel zur Landebahn, genauer parallel zum zweiten Spannvektor der Landebahn.

j) $v = \sqrt{60^2 + 60^2} \approx 84{,}8$

k) Der ‚mittige Endpunkt' der Landebahn ist der Punkt $\vec{e} = \begin{pmatrix} 2150 \\ 1550 \\ 0 \end{pmatrix} + 50 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2000 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4110 \\ 3600 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Länge der noch zur Verfügung stehenden Strecke ist somit $\Delta s = \sqrt{(4110 - 2400)^2 + (3600 - 1900)^2} \approx 2411$.

Aus der Physik, genauer aus der Kinematik der gleichmäßig beschleunigten Bewegung kennt man die Beziehungen $\Delta s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2$ und $\Delta v = a \cdot \Delta t$ und berechnet daraus $\Delta t = \dfrac{2 \cdot \Delta s}{\Delta v} \approx 56{,}8$ und

$a = \dfrac{\Delta v^2}{2 \cdot \Delta s} = 1{,}49$.