

### Anwendungsaufgabe - Die Pyramiden von Gizeh

In der 4. Dynastie (2639-2504 v.Chr.) entstanden in Gizeh die drei wohl berühmtesten Pyramiden des Alten Reichs in Ägypten. 13 km westlich von Kairo, an der Grenze zur Libyschen Wüste liegen die Pyramiden von Gizeh. Zur Zeit des Alten Reichs galten diese Prachtbauten als "Thron der Sonne". Auf ihrer Spitze sollten sich der Sonnengott Re und der ägyptische Gottkönig vereinigen. Die eindrucksvollen Bauwerke tragen die Namen der Pharaonen, die sie erbauen ließen, die Cheopspyramide, die Chephrenpyramide und die Mykerinospyramide. Diese Aufgabe beschäftigt sich mit den ersten beiden dieser Pyramiden.

Die Punkte  $A(4|0|0)$ ,  $B(0|4|0)$ ,  $C(-4|0|0)$ ,  $D(0|-4|0)$  und  $E(0|0|6)$  beschreiben die Chephrenpyramide mit der Grundfläche ABCD und der Spitze E.

- a) Zeichnen Sie die Chephrenpyramide in ein räumliches Koordinatensystem. **Hinweis:** Wegen der Größenverhältnisse und der weiteren Zeichnung ist es erforderlich, das Heft quer zu legen, die  $x_2$ -Achse in der Mitte der Seite zu zeichnen und sie von  $-16$  bis  $6$  verlaufen zu lassen.

Der Vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$  gibt die Richtung von parallel einfallendem Sonnenlicht an. Dabei wirft die Chephrenpyramide ABCDE einen Schatten auf die  $x_1x_2$ -Ebene.

- b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schattenpunktes  $E'$  der Pyramidenspitze E in der  $x_1x_2$ -Ebene und tragen Sie diesen in das Koordinatensystem aus Aufgabenteil a) ein. [**Kontrollergebnis:**  $E'(10|-10|0)$ ]
- c) Berechnen Sie die Weite des Winkels, unter dem die Sonnenstrahlen auf den Erdboden fallen.
- d) Zeichnen Sie die Grenzen des Schattenraums der Chephrenpyramide in das Koordinatensystem ein.

Zu einer anderen Uhrzeit fällt das Sonnenlicht aus der Richtung  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ k \\ -3 \end{pmatrix}$ ,  $k \in \mathbb{R}$  parallel ein. Der Schattenpunkt der Pyramidenspitze E in der  $x_1x_2$ -Ebene werde mit  $E'_k$  bezeichnet.

- e) Bestimmen Sie für beliebiges  $k$  die Koordinaten des Schattenpunktes  $E'_k$ .
- f) Berechnen Sie, für welches  $k$  der Schattenpunkt auf der Geraden liegt, die durch die Pyramidenkante  $\overline{AD}$  verläuft und geben Sie die Koordinaten des Schattenpunktes an.
- g) Untersuchen Sie, ob sich der Schattenpunkt auf der Pyramidenkante  $\overline{AD}$  befindet.

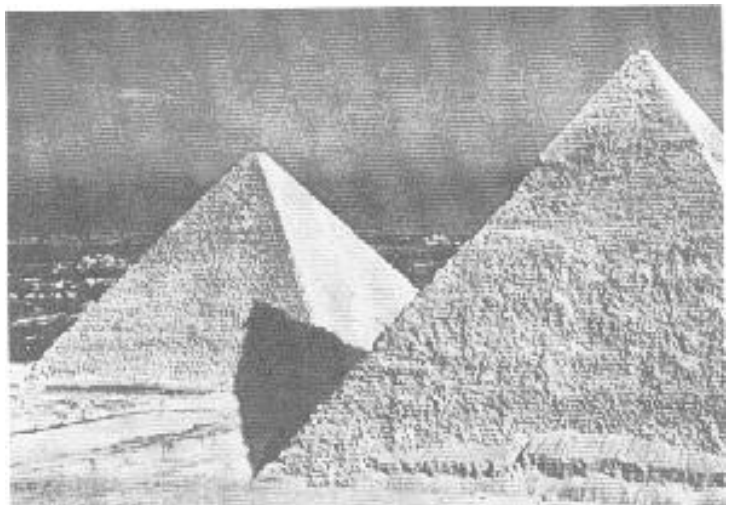
Die Abbildung rechts zeigt, dass Teile der Cheopspyramide im Schattenraum der Chephrenpyramide liegen.

Die Punkte  $F(8|-6|0)$ ,  $G(4|-2|0)$ ,  $H(0|-6|0)$ ,  $I(4|-10|0)$  und  $K(4|-6|6)$  beschreiben die Cheopspyramide mit der Grundfläche FGHI und der Spitze K.

- h) Zeichnen Sie die Cheopspyramide in das in Aufgabenteil a) angefertigte Koordinatensystem ein.

Der Schattenraum der Chephrenpyramide liegt auf den Seitenflächen FGK und GHK der Cheopspyramide und ist durch vier Eckpunkte begrenzt, die hier berechnet werden sollen. **Hinweis:** Verwenden Sie für die Rechnungen unbedingt den Kontrollpunkt  $E'$  aus Aufgabenteil b).

- i) Berechnen Sie die Koordinaten der vier Eckpunkte, durch die der Schatten der Chephrenpyramide auf der Cheopspyramide begrenzt ist.



**Tipps** zu Aufgabenteil g):

1. Berechnen Sie den Schnittpunkt L der Geraden durch E und E' mit der Ebene durch F, G und K.
  2. Berechnen Sie den Schnittpunkt M der Geraden durch A und E' mit der Geraden durch F und G.
  3. Berechnen Sie den Schnittpunkt V der Geraden durch D und E' mit der Geraden durch G und H.
- Berechnen Sie den Punkt U als Schnittpunkt der Ebene durch E, D und E' mit der Pyramidenkante  $\overline{GK}$ .

**Lösung:**

- A:Punkt(4, 0, 0)  
B:Punkt(0, 4, 0)  
C:Punkt(-4, 0, 0)  
D:Punkt(0, -4, 0)  
E:Punkt(0, 0, 6)  
x1:Dreiecksflaeche(A, B, E)  
x2:Dreiecksflaeche(B, C, E)  
x3:Dreiecksflaeche(C, D, E)  
x4:Dreiecksflaeche(D, A, E)  
u:Vektor(5, -5, -3)  
g:Gerade(E, u)  
Exy:Ebene3P(A, B, C)  
Es:Punkt(10, -10, 0)  
s1:Strecke(A, Es)  
s2:Strecke(D, Es)  
F:Punkt(8, -6, 0)  
G:Punkt(4, -2, 0)  
H:Punkt(0, -6, 0)  
I:Punkt(4, -10, 0)  
K:Punkt(4, -6, 6)  
x5:Dreiecksflaeche(F, G, K)  
x6:Dreiecksflaeche(G, H, K)  
x7:Dreiecksflaeche(H, I, K)  
x8:Dreiecksflaeche(I, F, K)  
FGK:Ebene3P(F, G, K)  
L:Punkt(5, -5, 3)  
AEs:Gerade(A, Es)  
FG:Gerade(F, G)  
M:Punkt(7, -5, 0)  
DEs:Gerade(D, Es)  
GH:Gerade(G, H)  
V:Punkt(1.25, -4.75, 0)  
EDEs:Ebene3P(E, D, Es)  
GK:Gerade(G, K)  
U:Punkt(4, -4.2, 3.33333)  
s3:Strecke(L, M)  
s4:Strecke(L, U)  
s5:Strecke(U, V)

