Name: **Datum:**

Abstand zweier Ebenen - Grundwissen

Gegeben sind zwei Ebenen E und F durch die Gleichungen $E: \vec{n} * [\vec{x} - \vec{a}_1] = 0$ (d.h. eine Ebene muss in Normalenform vorliegen bzw. zuerst in diese umgewandelt werden) und $F: \vec{x} = \vec{a}_2 + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$.

Die Berechnung des Abstandes der beiden Ebenen E und F ist nur dann sinnvoll, wenn die beiden Ebenen parallel liegen.

Dann ist der Abstand d der Ebene E zur Ebene F der Abstand eines beliebigen Punktes der Ebene F (z.B. des Startpunktes A_2) zur Ebene E,

d.h. der Abstand d der Ebene E zur Ebene F berechnet sich durch folgendes Verfahren:

- Stelle den Term einer Hilfsgeraden h auf, die durch den Punkt A_2 verläuft (d.h. deren Stützvektor der Stützvektor $\vec{a}_2$ der Ebene F ist) und die orthogonal zur Ebene E liegt (d.h. deren Richtungsvektor der Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E ist): $h: \vec{x} = \vec{a}_2 + r \cdot \vec{n}$
- Bestimme den Schnittpunkt S der Ebene E mit der Hilfsgeraden h: $\{S\} = h \cap E$
- Berechne den Abstand d der Punkte A_2 und S.

Dieser Abstand d ist der Abstand der Ebene E zur Ebene F.

Beispiel:

Gegeben sind die Ebenen $E: \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} * [\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}] = 0$ und $F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Gesucht ist der Abstand d der Ebene E zur Ebene F.

- $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$
- $E \cap h: \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} * [\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}] = 0 \Leftrightarrow r = -\frac{1}{7}$, also $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + (-\frac{1}{7}) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{2}{7} \\ 3\frac{4}{7} \\ 1\frac{1}{7} \end{pmatrix}$
- $\vec{s} - \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1\frac{2}{7} \\ 3\frac{4}{7} \\ 1\frac{1}{7} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ -\frac{6}{7} \end{pmatrix}$, $d = \sqrt{\begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ -\frac{6}{7} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ -\frac{6}{7} \end{pmatrix}} = \frac{\sqrt{4+9+36}}{7} = \frac{\sqrt{49}}{7} = \frac{7}{7} = 1$

Der Abstand d der Ebene E zur Ebene F beträgt $1\,LE$.