Name: **Datum:**

Ebenen in Normalenform - Lagebeziehung Ebene PF-Ebene KF - Grundwissen

Gegeben seien zwei Ebenen E_1 in Parameterform $E_1: \vec{x} = \vec{a}_1 + r_1 \cdot \vec{u}_1 + s_1 \cdot \vec{v}_1$ und E_2 in Koordinatenform $E_2: a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 - d = 0$.

Wie können die beiden Ebenen E_1 und E_2 zueinander liegen?

a) Die Ebenen sind identisch	**b)** Die Ebenen schneiden sich in einer Schnittgeraden g	**c)** Die Ebenen sind parallel

Wie kann man bestimmen, wie die beiden Ebenen E_1 und E_2 zueinander liegen?

Man untersucht, ob die beiden Ebenen E_1 und E_2 gemeinsame Punkte besitzen, d.h.
man setzt die Koordinatenterme der Ebene in Parameterform, hier E_1, in die Gleichung der Ebene in Normalenform, hier E_2, ein und bestimmt die Lösungsmenge der Linearen Gleichung $\boxed{a \cdot (a_1 + r \cdot u_1 + s \cdot v_1) + b \cdot (a_2 + r \cdot u_2 + s \cdot v_2) + c \cdot (a_3 + r \cdot u_3 + s \cdot v_3) - d = 0}$ für die Variablen r und s. Wenn die Gleichung

a) äquivalent zu einer wahren Aussage ist, dann hat die Gleichung unendlich viele und beliebig wählbare Lösungen für r und s.	**b)** einen konkreten Wert für r oder s oder eine Beziehung zwischen r und s liefert, dann hat die Gleichung zwar ebenfalls unendlich viele Lösungen für r und s, diese sind aber nicht beliebig, sondern hängen durch diese Beziehung voneinander ab.	**c)** äquivalent zu einer falschen Aussage ist, dann hat die Gleichung keine Lösung.
In diesem Fall sind die Ebenen identisch.	In diesem Fall schneiden sich die Ebenen und man kann • die Schnittgerade g • den Schnittwinkel φ der Ebenen berechnen.	In diesem Fall sind die Ebenen parallel und man kann • den Abstand d der Ebenen berechnen.

Beispiele

a)

$$E_1: 2x_1 + x_2 - x_3 - 1 = 0,\ \ E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}:$$

Lösungsansatz und Rechnung: $E_1 \cap E_2 : 2(1+s) + (1+r+s) - (2+r+3s) - 1 = 0 \iff 1 + r\cdot 0 + s\cdot 0 - 1 = 0 \iff 0 = 0\,;\ L = \mathrm{IR}$.
Die Gleichung ist allgemeingültig, es gibt unendlich viele und beliebig wählbare Lösungen für r und s, so dass die Ebenen identisch sind.

b)

$$E_1: x_1 + x_2 + x_3 - 5 = 0,\ \ E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}:$$

Lösungsansatz und Rechnung: $E_1 \cap E_2 : (1+2r+s) + (3+r-s) + (1+s) - 5 = 0 \iff 5 + r\cdot 3 + s\cdot 1 - 5 = 0 \iff s = -3r\,;\ L = \{(r\,|\,s)\,|\,s = -3r\}$.
Die Gleichung liefert eine Beziehung zwischen r und s. Es gibt zwar unendlich viele Lösungen für r und s, die aber nicht beliebig sind, sondern durch diese Beziehung voneinander abhängen.
Löst man diese Beziehung nach einer Variablen – hier nach s – auf und setzt den erhaltenen Term für die Variable s in den Term der Ebene in Parameterform, hier E_2, ein, so erhält man die Gleichung der Schnittgeraden g: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + (-3r)\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\4\\-3\end{pmatrix}$

c)

$$E_1: x_1 + x_2 - 2x_3 - 3 = 0,\ \ E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\-4\\-1\end{pmatrix}:$$

Lösungsansatz und Rechnung: $E_1 \cap E_2 : (2+r+2s) + (1+r-4s) - 2(1+r-s) - 3 = 0 \iff 1 + r\cdot 0 + s\cdot 0 - 3 = 0 \iff -2 = 0\,;\ L = \{\ \}$.
Die Gleichung ist unlösbar, hat also keine Lösung, so dass die Ebenen echt parallel liegen.