

Name:

Datum:

Ebenen in Normalenform - Lagebeziehung Ebene PF-Ebene NF - Grundwissen



Gegeben seien zwei Ebenen E_1 in Parameterform $E_1: \vec{x} = \vec{a}_1 + r_1 \cdot \vec{u}_1 + s_1 \cdot \vec{v}_1$ und E_2 in Punkt-Normalenform $E_2: \vec{n} * [\vec{x} - \vec{a}_2] = 0$.

Wie können die beiden Ebenen E_1 und E_2 zueinander liegen?

- a) Die Ebenen sind identisch | b) Die Ebenen schneiden sich in einer Schnittgeraden g | c) Die Ebenen sind parallel

Wie kann man bestimmen, wie die beiden Ebenen E_1 und E_2 zueinander liegen?

Man untersucht, ob die beiden Ebenen E_1 und E_2 gemeinsame Punkte besitzen, d.h.

man setzt den Term der Ebene in Parameterform, hier E_1 , in die Gleichung der Ebene in Normalenform, hier E_2 , ein und bestimmt die Lösungsmenge der linearen Gleichung $\vec{n} * [(\vec{a}_1 + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}) - \vec{a}_2] = 0$ für die Variablen r und s . Wenn die Gleichung

- a) äquivalent zu einer wahren Aussage ist, dann hat die Gleichung unendlich viele und beliebig wählbare Lösungen für r und s . | b) einen konkreten Wert für r oder s oder eine Beziehung zwischen r und s liefert, dann hat die Gleichung zwar ebenfalls unendlich viele Lösungen für r und s , diese sind aber nicht beliebig, sondern hängen durch diese Beziehung voneinander ab. | c) äquivalent zu einer falschen Aussage ist, dann hat die Gleichung keine Lösung.

In diesem Fall sind die Ebenen identisch.

In diesem Fall schneiden sich die Ebenen und man kann

- die Schnittgerade g
- den Schnittwinkel φ

der Ebenen berechnen.

In diesem Fall sind die Ebenen parallel und man kann

- den Abstand d

der Ebenen berechnen.

Beispiele

a) $E_1 : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} * \left[\bar{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0, E_2 : \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} :$

Lösungsansatz und Rechnung: $E_1 \cap E_2 : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow 1 + r \cdot 0 + s \cdot 0 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 ; L = \mathbb{R} .$

Die Gleichung ist allgemeingültig, es gibt unendlich viele und beliebig wählbare Lösungen für r und s, so dass die Ebenen identisch sind.

b) $E_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} * \left[\bar{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0, E_2 : \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} :$

Lösungsansatz und Rechnung: $E_1 \cap E_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow 5 + r \cdot 3 + s \cdot 1 - 5 = 0 \Leftrightarrow s = -3r ; L = \{(r | s) | s = -3r\} .$

Die Gleichung liefert eine Beziehung zwischen r und s. Es gibt zwar unendlich viele Lösungen für r und s, die aber nicht beliebig sind, sondern durch diese Beziehung voneinander abhängen.

Löst man diese Beziehung nach einer Variablen – hier nach s – auf und setzt den erhaltenen Term für die Variable s in den Term der Ebene in Parameterform, hier E_2 , ein, so erhält man die Gleichung der Schnittgeraden g: $g : \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-3r) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $E_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} * \left[\bar{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = 0, E_2 : \bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} :$

Lösungsansatz und Rechnung: $E_1 \cap E_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow 1 + r \cdot 0 + s \cdot 0 - 3 = 0 \Leftrightarrow -2 = 0 ; L = \{ \} .$

Die Gleichung ist unlösbar, hat also keine Lösung, so dass die Ebenen echt parallel liegen.