Name: **Datum:**

Ebenen in Normalenform - Lagebeziehung Ebene KF-Gerade PaF - Grundwissen

Gegeben seien eine Gerade g in Parameterform $g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u}$ und eine Ebene E in Koordinatenform $E: a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 - d = 0$.

Wie können die Gerade g und die Ebene E zueinander liegen?

a) Die Geraden liegt in der Ebene	**b)** Die Gerade schneidet die Ebene in einem Schnittpunkt S	**c)** Die Gerade liegt parallel zur Ebene

Wie kann man bestimmen, wie die Gerade g und die Ebene E zueinander liegen?

Man untersucht, ob die Gerade g und die Ebene E gemeinsame Punkte besitzen, d.h.
man setzt die einzelnen Koordinatenterme der Geraden in die Gleichung der Ebene ein und bestimmt die Lösungsmenge der Linearen Gleichung $\boxed{a \cdot (a_1 + r \cdot u_1) + b \cdot (a_2 + r \cdot u_2) + c \cdot (a_3 + r \cdot u_3) - d = 0}$ für die Variable r. Wenn die Gleichung

a) <u>unendlich viele Lösungen</u> hat, dann liegt die Gerade in der Ebene.	**b)** <u>eine eindeutige Lösung</u> hat, dann schneidet die Gerade die Ebene in einem Schnittpunkt S und man kann • den Schnittpunkt S • den Schnittwinkel φ der Geraden und der Ebene berechnen.	**c)** <u>keine Lösung</u> hat, dann liegt die Gerade parallel zur Ebene und man kann • den Abstand d der Geraden und der Ebene berechnen.

Beispiele:

a)

$$E: x_1 - 3x_2 - 2 = 0\,,\quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösungsansatz und Rechnung: $E \cap g: (5+3r) - 3(1+r) - 2 = 0 \Leftrightarrow 2 + r \cdot 0 - 2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0\,;\, L = \mathrm{IR}$.

Die Gleichung ist allgemeingültig, hat also unendlich viele Lösungen, so dass g in E liegt.

b)

$$E: x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 6 = 0\,,\quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Lösungsansatz und Rechnung: $E \cap g: (1+2r) - 2(2+r) - 3(3-3r) - 6 = 0 \Leftrightarrow -12 + r \cdot 9 - 6 = 0 \Leftrightarrow r = 2\,;\, L = \{2\}$.

Die Gleichung hat genau eine Lösung, nämlich 2, so dass g und E genau einen Schnittpunkt haben.

Setze die Lösung für r in den Term der Gerade ein und ermittle so den Ortsvektor $\vec{x}_S$ zum Schnittpunkt: $\vec{x}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ und damit

$S(5\,|\,4\,|\,-3)$.

c)

$$E: x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0\,,\quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösungsansatz und Rechnung: $E \cap g: (1+2r) + (-2-r) + (1-r) - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 + r \cdot 0 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 1\,;\, L = \{\ \}$.

Die Gleichung ist unlösbar, hat also keine Lösung, so dass g echt parallel zu E liegt.