Name: **Datum:**

Ebenen in Normalenform - Lagebeziehung Ebene NF-Gerade PaF - Grundwissen

Gegeben seien eine Gerade g in Parameterform $g: \vec{x} = \vec{a}_1 + r \cdot \vec{u}$ und eine Ebene E in Punkt-Normalenform $E: \vec{n} * [\vec{x} - \vec{a}_2] = 0$

Wie können die Gerade g und die Ebene E zueinander liegen?

a) Die Geraden liegt in der Ebene	**b)** Die Gerade schneidet die Ebene in einem Schnittpunkt S	**c)** Die Gerade liegt parallel zur Ebene

Wie kann man bestimmen, wie die Gerade g und die Ebene E zueinander liegen?

Man untersucht, ob die Gerade g und die Ebene E gemeinsame Punkte besitzen, d.h.
man setzt den Term der Geraden in die Gleichung der Ebene ein und bestimmt die Lösungsmenge der Linearen Gleichung $\boxed{\vec{n} * [(\vec{a}_1 + r \cdot \vec{u}) - \vec{a}_2] = 0}$ für die Variable r. Wenn die Gleichung

a) <u>unendlich viele Lösungen</u> hat, dann liegt die Gerade in der Ebene.	**b)** <u>eine eindeutige Lösung</u> hat, dann schneidet die Gerade die Ebene in einem Schnittpunkt S und man kann • den Schnittpunkt S • den Schnittwinkel φ der Geraden und der Ebene berechnen.	**c)** <u>keine Lösung</u> hat, dann liegt die Gerade parallel zur Ebene und man kann • den Abstand d der Geraden und der Ebene berechnen.

Beispiele:

a)

$$E: \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} * \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0, \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösungsansatz und Rechnung: $E \cap g: \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow 2 + r \cdot 0 - 2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0; L = \mathrm{IR}$.

Die Gleichung hat unendlich viele Lösungen, so dass g in E liegt.

b)

$$E: \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} * \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right] = 0, \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Lösungsansatz und Rechnung: $E \cap g: \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow -12 + r \cdot 9 - 6 = 0 \Leftrightarrow r = 2; L = \{2\}$.

Die Gleichung hat genau eine Lösung, nämlich 2, so dass g und E genau einen Schnittpunkt haben.

Setze die Lösung für r in den Term der Gerade ein und ermittle so den Ortsvektor $\vec{x}_S$ zum Schnittpunkt: $\vec{x}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ und damit

$S(5 | 4 | -3)$.

c)

$$E: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} * \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0, \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösungsansatz und Rechnung: $E \cap g: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow 0 + r \cdot 0 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 1; L = \{ \ \}$.

Die Gleichung hat keine Lösung, so dass g echt parallel zu E liegt.