

Kreuzprodukt - Winkel zwischen zwei Vektoren - Grundwissen

**Definition: Winkel zwischen zwei Vektoren**

Seien \vec{u} und \vec{v} zwei vom Nullvektor \vec{o} verschiedene Vektoren.

Unter dem **Winkel** $\sphericalangle(\vec{u}; \vec{v})$ **zwischen den Vektoren \vec{u} und \vec{v}** (gelesen "Winkel u v" oder "Winkel zwischen den Vektoren u und v") versteht man den nicht überstumpfen Winkel zwischen den beiden die Vektoren repräsentierenden Pfeile.

Die Weite dieses Winkels bezeichnet man meistens mit dem griechischen Buchstaben φ , (gelesen "Phi"). Die Weite des Winkels ist eine aus Maßzahl und Maßeinheit (1°) zusammengesetzte Größe.

**Satz: Berechnung der Weite des Winkels zwischen zwei Vektoren mit dem Kreuzprodukt**

Seien \vec{u} und \vec{v} zwei vom Nullvektor \vec{o} verschiedene Vektoren und sei φ die Weite des Winkels zwischen den Vektoren \vec{u} und \vec{v} .

Dann gilt (nach dem Sinussatz der elementaren Geometrie)

$$\sin(\varphi) = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}, \text{ also } \varphi = \arcsin\left(\frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\right) \text{ oder } \varphi = 180^\circ - \arcsin\left(\frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\right).$$

Weiter gilt

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \vec{o} \quad (\text{Parallelitätskriterium})$$

sowie

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \quad (\text{Orthogonalitätskriterium, unhandlich})$$

Beispiel: Berechne den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\text{Lösung: } \sin(\varphi) = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{\begin{vmatrix} 17 \\ -1 \\ 7 \end{vmatrix}}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{26}} = \frac{\sqrt{339}}{\sqrt{364}} \approx 0,965$$

$$\Rightarrow \varphi \approx 74,8^\circ \text{ oder } \varphi \approx 180^\circ - 74,8^\circ = 105,2^\circ$$