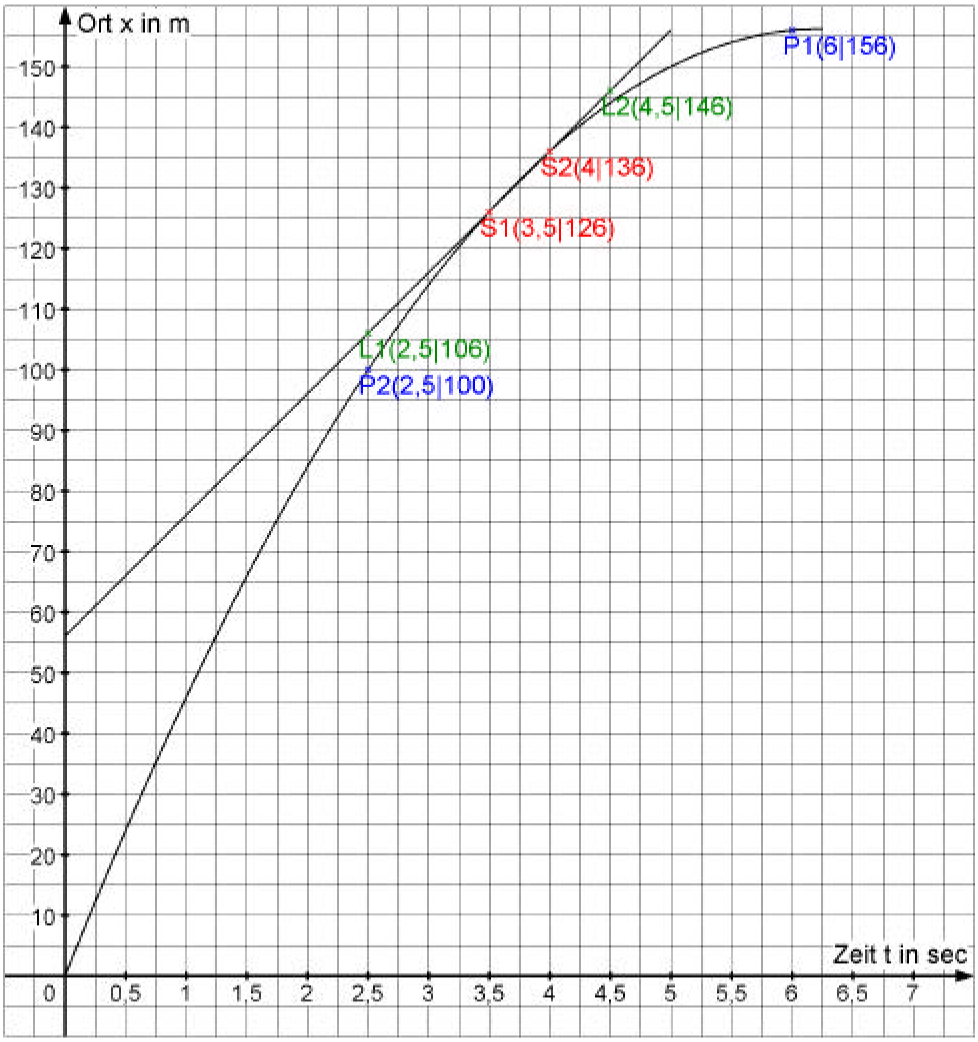
Name: **Datum:**

Lineare und Quadratische Funktionen - Autobahnraser - Lösung

1. a)
b)



c) Aus der Wertetabelle ist ersichtlich, dass sich in gleich großen Zeitintervallen (0,5sec) der Ort des LKW um jeweils gleich große Beträge (10m) verändert.

d) Steigungsfaktor: $v = \frac{96\text{m} - 76\text{m}}{2\,\text{sec} - 1\,\text{sec}} = 20\frac{\text{m}}{\text{sec}}$; der Ort des LKW ändert sich pro sec um 20m. Dies ist die Geschwindigkeit des LKW.

e) Funktionsterm: $x_L(t) = 20 \cdot t + n$, mit noch zu bestimmenden Ordinatenabschnitt n. Einsetzen der Koordinaten eines beliebigen Messpaares (z.B. $(1|76)$) in die Gleichung $x = 20 \cdot t + n$ liefert:
$76 = 20 \cdot 1 + n \Leftrightarrow 56 = n\,;\, L = \{56\}$.
Mit Maßeinheiten ergibt sich somit der Wert 56m für den Ordinatenabschnitt. Dies ist der Ort des LKW zum Zeitpunkt der Bewegungsaufnahme.

f) Ohne Einheiten: $x_L(t) = 20 \cdot t + 56$ (t : Zeit in sec).

Mit Einheiten: $x_L(t) = 20\frac{\text{m}}{\text{sec}} \cdot t + 56\text{m}$ (t : Zeit).
Das Einsetzen der Wertepaare in die Gleichung $x = 20 \cdot t + 56$ liefert stets wahre Aussagen.

g) siehe oben

h) Gesucht ist $x_L(2{,}5\,\mathrm{sec}) = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}} \cdot 2{,}5\,\mathrm{sec} + 56\,\mathrm{m} = 106\,\mathrm{m}$. Der LKW befindet sich zum Zeitpunkt 2,5sec am Ort 106m.

i) Gesucht ist die Stelle zum Wert 146:
$x_L(t) = 146 \Leftrightarrow 20 \cdot t + 56 = 146 \Leftrightarrow t = 4{,}5$; $L = \{4{,}5\}$. Der LKW befindet sich zum Zeitpunkt 4,5sec am Ort 146m.

2. a) siehe oben

b) Die eingezeichneten Punkte könnten auf einer nach unten geöffneten Parabel liegen.

c) Allgemeine Form eines quadratischen Terms: $x_P(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$.
Einsetzen der Koordinaten der ersten drei Wertepaare in die zugehörige Funktionsgleichung liefert das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 0 &= x_P(0) \\ 46 &= x_P(1) \\ 84 &= x_P(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \quad &&| \Rightarrow c = 0 \\ 46 &= a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \quad &&| \cdot (-2) \\ 84 &= a \cdot 4 + b \cdot 2 + c \quad &&| \quad + \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= c \\ 46 &= a + b \\ -8 &= a \cdot 2 \qquad \Rightarrow a = -4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow b = 50$$

$$\begin{aligned} 0 &= c \\ 50 &= b \\ -8 &= a \end{aligned}$$

Der gesuchte Funktionsterm ist: $x_P(t) = -4 \cdot t^2 + 50 \cdot t$.

d) Das Einsetzen der Wertepaare in die Gleichung $x = -4 \cdot t^2 + 50 \cdot t$ liefert stets wahre Aussagen.

e) siehe oben

f) Öffnungsfaktor: $a = -4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}$; der PKW bremst – da a negativ ist – mit einer Verzögerung von $2 \cdot a = -8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}$ ab. Nässe oder Schnee, schlechter Straßenbelag oder abgefahrene Reifen können diesen Wert drastisch verkleinern.

g) Zu berechnen ist $x_P(6) = 156$. Am Ort 156m befindet sich der PKW 6sec nach dem Beginn der Vollbremsung.

h) Gesucht sind die Stellen zum Wert 100:

$x_P(t) = 100$

$\Leftrightarrow -4 \cdot t^2 + 50 \cdot t = 100$

$\Leftrightarrow -4 \cdot t^2 + 50 \cdot t - 100 = 0$

$L = \{2{,}5; 10\}$

Lediglich die erste Lösung 2,5 ist im Sinne der Sachaufgabe von Relevanz (vgl. die Lösung von **i)**). Am Ort 100m befindet sich der PKW 2,5sec nach dem Beginn der Vollbremsung.

i) Gesucht ist der Scheitelpunkt des Graphen:

$x_P(t) = -4t^2 + 50t = -4(t^2 - 12{,}5t) = -4(t^2 - 12{,}5t + 6{,}25^2 - 6{,}25^2)$

$= -4\left[(t - 6{,}25)^2 - 39{,}0625\right] = -4(t - 6{,}25)^2 + 156{,}25$.

Der Scheitelpunkt ist also $S(6{,}25 \mid 156{,}25)$; somit hat der PKW nach 6,25sec 156,25m zurückgelegt und kommt zum Stillstand (Scheitelpunkt!). Nach 156,25m ist der Bremsweg zu Ende und der PKW steht, d.h. er würde nach 6,25sec anfangen rückwärts zu fahren. (Das macht keinen Sinn!)

3. a) Zu berechnen sind zuerst die Schnittstellen der Funktionen:

$x_P(t) = x_L(t)$

$-4t^2 + 50t = 20t + 56$

$-4t^2 + 30t - 56 = 0$

$t^2 - 7{,}5t + 14 = 0$

$(t - 3{,}75)^2 - 14{,}0625 + 14 = 0$

$(t - 3{,}75)^2 - 0{,}25^2 = 0$

$(t - 3{,}75 + 0{,}25) \cdot (t - 3{,}75 - 0{,}25) = 0$

$(t - 3{,}5) \cdot (t - 4) = 0$

$t = 3{,}5 \vee t = 4$

$L = \{3{,}5;\ 4\}$

Daraus ergeben sich die Ordinaten der Schnittpunkte:

$x_L(3{,}5) = 126;\ x_L(4) = 136$

Die Schnittpunkte sind somit $S_1(3{,}5 \mid 126)$ und $S_2(4 \mid 136)$.

Die Lösung 3,5 gibt die Zeit an in Sekunden, nach der tatsächlich beide Fahrzeuge am selben Ort angelangt sind, also den Moment des Auffahrens. Die Lösung 4 gibt die Zeit an, zu der sich beide Fahrzeuge ein weiteres Mal am selben Ort befänden, würden sie nach dem Auffahren nach 3,5sec ihre Wege (unvermindert bzw. unbeschleunigt) gemäß der Wertetabellen fortsetzen.

b) Die beiden Ordinatenabschnitte 0m und 56m geben die Orte der jeweiligen Autos an zum Zeitpunkt 0sec, also dem Zeitpunkt, an dem Zickler seine Vollbremsung startet. In diesem Moment sind demnach beide Autos 56m voneinander entfernt. Dieser Abstand ist zwar objektiv zu gering, nämlich nur ca. $3/10$ des Tachowertes in km/h, wird aber von der Polizei nicht als zu geringer Mindestabstand geahndet.

c) Weil die Geschwindigkeit des LKW sich nicht ändern soll, wird seine Bewegung weiterhin beschrieben durch einen Term der Form (Rechnung ohne Einheiten): $x_{L,Neu}(t) = 20 \cdot t + b$. Da der neue Graph die Parabel nur berühren soll, muss gelten, dass die Gleichung $x_{L,Neu}(t) = x_P(t)$ nur eine Lösung haben soll. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Diskriminante der Quadratischen Gleichung den Wert Null hat, was für $b = 56{,}25$ der Fall ist. Hätte der PKW-Fahrer also nur einen Sekundenbruchteil früher gebremst, wäre der Unfall nicht passiert.

