Aufg.-Nr.: 15	Bereich: ganzrat. Funktionenschar	Kursart: LK	WTR

Olympiaschanze

Die große Olympia-Schanze in Garmisch-Partenkirchen hat etwa das in der Abbildung erkennbare Profil. Für die markierten Punkte A und B gilt dabei: A liegt 81 m höher als B. Die waagerechte Entfernung zwischen den beiden Punkten beträgt rund 156m.

a) Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion möglichst niedrigen Grades, die das Profil des Aufsprunghügels im Bereich von A bis B näherungsweise beschreibt.. Dabei liege A im Ursprung des Koordinatensystems. Die Steigung des Aufsprunghügels in den Punkten A und B werde modellhaft vereinfachend als null angenommen. Geben Sie die Koeffizienten mit voller Taschenrechner-Genauigkeit an. Auf die Kontrolle hinreichender Kriterien kann verzichtet werden.
Vergleichen Sie das maximale Gefälle des Graphen der von Ihnen ermittelten Funktion (im relevanten Bereich) mit der Angabe in der Abbildung.

b) Beweisen Sie: Bei ganzrationalen Funktionen der Form $f(x)=ax^3+bx^2$ (a, b $\neq$ 0) liegt die Wendestelle genau in der Mitte zwischen den beiden Extremstellen.

c) Nun soll das Aussehen des Aufsprunghügels variiert werden: Der Höhenunterschied zwischen den Punkten A und B soll weiterhin 81 m betragen. Die waagerechte Entfernung sei nun k Meter (k>0). Die Profile der verschiedenen so entstehenden Aufsprunghügel sollen analog zu Aufgabenteil a) durch eine Funktionenschar ganzrationaler Funktionen beschrieben werden. Ermitteln Sie die Gleichung dieser Funktionenschar. (Zur Kontrolle: $f_k(x) = \frac{162}{k^3}x^3 - \frac{243}{k^2}x^2$)
Bestimmen Sie die waagerechte Entfernung zwischen A und B so, dass ein maximales Gefälle von 39° entsteht?

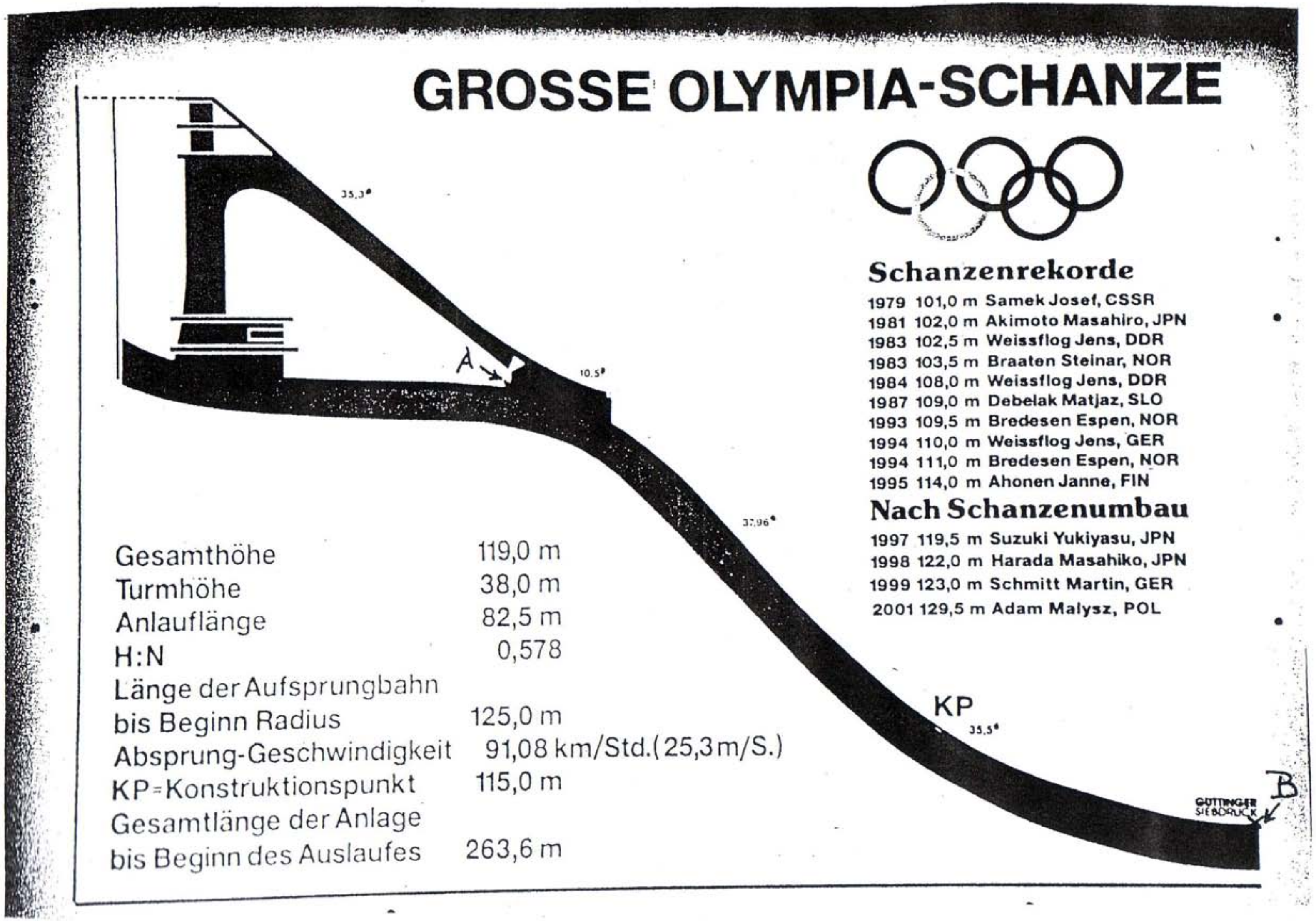
d) Wegen Schneemangels wird der Aufsprunghügel aus Aufgabenteil a) in einer Breite von 40 m mit einer Kunstschneedecke präpariert, die (gemessen parallel zur y-Achse) überall gleichmäßig dick ist. Im Bereich zwischen den Punkten A und B werden dazu 1000 m³ Kunstschnee aufgetragen. Berechnen Sie die Schneehöhe (gemessen parallel zur y-Achse).

e) Die Länge des Aufsprunghügels zwischen den Punkten A und B kann nicht elementar berechnet werden, da es sich um eine gekrümmte Linie handelt. Leiten Sie analog zu den typischen Näherungsideen der Analysis ein Verfahren zur numerischen näherungsweisen Berechnung dieser Länge her, indem Sie die wesentlichen Schritte dieses Verfahrens beschreiben.

ANHANG: Abbildung des Schanzenprofils

Aufg.-Nr.: 15	Bereich: ganzrat. Funktionenschar	Kursart: LK	WTR

Anhang zu Aufgabe 1: Abbildung des Schanzenprofils der Olympia-Schanze in Garmisch-Partenkirchen



Lösung

a) Lege das Koordinatensystem so, dass A im Ursprung liegt.

Ansatz $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Bedingungen

$f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$
$f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$
$f(156) = a \cdot 156^3 + b \cdot 156^2 = -81$
$f'(156) = 3 \cdot a \cdot 156^2 + 2 \cdot b \cdot 156 = 0$

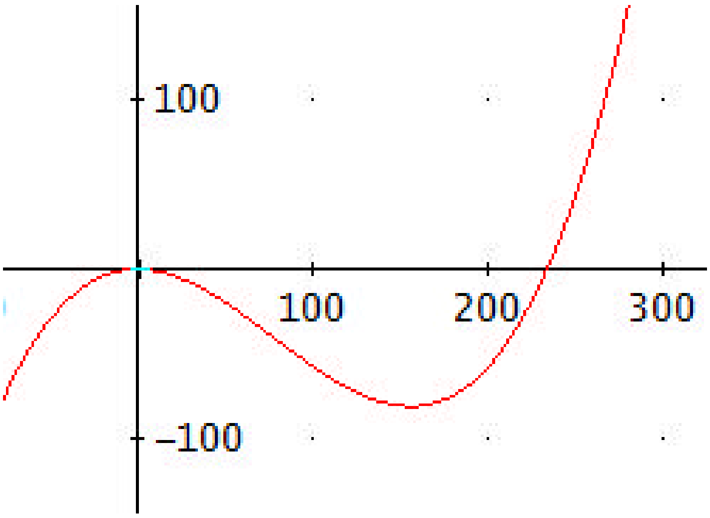
$3 \cdot III - 156 \cdot IV \quad b \cdot 156^2 = -243 \Leftrightarrow b = -\frac{243}{156^2}$

in IV $\quad 3 \cdot a \cdot 156^2 + 2 \cdot \left(-\frac{243}{156^2}\right) \cdot 156 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{2 \cdot 243}{156 \cdot 3 \cdot 156^2} = \frac{162}{156^3}$

Daraus folgt die Funktionsgleichung $\boxed{f(x) = \frac{162}{156^3} \cdot x^3 - \frac{243}{156^2} \cdot x^2}$

(vergleiche Ergebnis mit der Kontrolle in c))

Die Abbildung zeigt den weiteren Verlauf des Graphen.



Volle Taschenrechner Anzeige bedeutet:

$a = 0{,}000042671$ und $b = -009985207$

Gesucht ist das maximale Gefälle des Graphen im relevanten Bereich, also das **Maximum der ersten Ableitung**!! von f.

$$f'(x) = \frac{9}{70304}x^2 - \frac{27}{1352}x$$

$$f''(x) = \frac{9}{35152}x - \frac{27}{1352}$$

<u>notwendige Bedingung:</u> $f''(x) = 0$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{35152}x - \frac{27}{1352} = 0 \Leftrightarrow x = 78$$

<u>hinreichende Bedingung:</u> $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$f'''(x) < 0 \Rightarrow$ Die erste Ableitung hat an der Stelle x = 78 ein Maximum.

$$f'(78) = -\frac{81}{104}$$

Steigungswinkel zum Vergleich mit der Zeichnung: $\tan\alpha = \frac{81}{104} \Rightarrow \alpha \approx 37{,}91°$

In der Zeichnung ist sind die Winkel 37,96° und 35,5° aufgeführt. Auf halber Strecke zwischen A und B, also genau bei x = 78 in dem vorgegebenen Koordinatensystem erhält man also einen plausiblen Wert. Die Funktion modelliert den Hügel im relevanten Bereich gut.

b) $f(x) = ax^3 + bx^2$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f'''(x) = 6a$$

Die Extremstellen ergeben sich aus $f'(x) = 0$

$$3ax^2 + 2bx = 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (3ax + 2b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{und} \quad x = -\frac{2b}{3a}$$

Die Wendestelle ergibt sich aus $f''(x) = 0$

$$6ax + 2b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2b}{6a} = -\frac{b}{3a}$$

Die Wendestelle liegt also genau in der Mitte der beiden Extremstellen.

c) <u>Ansatz</u> $f_k(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f_k{}'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

<u>Bedingungen</u>

$f_k(0) = 0 \Rightarrow d = 0$

$f_k'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

$f_k(k) = a \cdot k^3 + b \cdot k^2 = -81$

$f_k'(k) = 3 \cdot a \cdot k^2 + 2 \cdot b \cdot k = 0$

$3 \cdot III - k \cdot IV \quad b \cdot k^2 = -243 \Leftrightarrow b = -\dfrac{243}{k^2}$

in IV $\quad 3 \cdot a \cdot k^2 + 2 \cdot \left(-\dfrac{243}{k^2}\right) \cdot k = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{2 \cdot 243}{k \cdot 3 \cdot k^2} = \dfrac{162}{k^3}$

$$\boxed{f_k(x) = \frac{162}{k^3} \cdot x^3 - \frac{243}{k^2} \cdot x^2}$$

Im Prinzip kehrt man das Verfahren aus a) um.

$f_k'(x) = \dfrac{486}{k^3} x^2 - \dfrac{486}{k^2} x \quad ; \quad f_k''(x) = \dfrac{972}{k^3} x - \dfrac{97}{k^2}$

$f_k''(x) = \dfrac{972}{k^3} x - \dfrac{486}{k^2} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} k$

$f'(0{,}5k) = -\dfrac{121{,}5}{k} = -\tan 39° \Rightarrow k \approx 150{,}04$

Die Entfernung zwischen A und B muss also ungefähr 150m betragen, um ein maximales Gefälle von 39° zu haben.

d) Verschiebe den Funktionsgraphen um die Höhe h und berechne $\int_0^{156} h \cdot dx = 156 \cdot h$

Weiter gilt $156 \cdot h = \dfrac{1000m^2}{40m} = 25m \Rightarrow h = \dfrac{25}{156} m \approx 0{,}16m = 16cm$

Die Schneehöhe beträgt also 16 cm

e) Für die exakte Berechnung der Bogenlänge einer gekrümmten Linie gilt die Formel

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx}$$

Da nur eine näherungsweise Berechnung verlangt wird, reicht hier eine Beschreibung dessen, was unten sehr formal hergeleitet wird.

Die gekrümmte Linie wird angenähert durch einen Polygonzug, bestehend aus einzelnen Geradenstücken. Dieser Polygonzug wird immer weiter verfeinert, bis man annähernd die Länge der Kurve berechnen kann. Formal sieht das so aus:

Zerlege das Intervall $a \le x \le b$ durch die Punkte $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ in n, nicht notwendig gleiche Teile. Die zu diesen x-Koordinaten gehörigen, auf dem Kurvenbogen liegenden Punkte seien P_1, P_2 ,…,P_{n-1}. Verbindet man diese geradlinig, so erhält man einen Sehnen- oder Polygonzug.

Setzt man $x_v - x_{v-1} = \Delta x_v$ und $y_v - y_{v-1} = \Delta y_v$, so erhält man für die einzelnen Sehnenlängen nach Pythagoras:

$$\Delta s_v = \sqrt{(\Delta x_v)^2 + (\Delta y_v)^2} = \sqrt{1 + \frac{(\Delta y_v)^2}{(\Delta x_v)^2} \cdot (\Delta x_v)^2}$$

Die Länge des gesamten Sehnenzuges ergibt sich durch Summation der einzelnen Teilstücke, also

$$s_n = \sum_{v=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{(\Delta y_v)^2}{(\Delta x_v)^2}} \cdot (\Delta x_v)$$, $x_0 = a$ und $x_n = b$ (das Zeichen $\sum$ steht für Summe)

Für die im Intervall $a \le x \le b$ stetig differenzierbare Funktion f gibt es (Mittelwertsatz) für jedes Intervall $x_{v-1} \le x \le x_v$ eine Stelle z_v mit

$$f'(z_v) = \frac{\Delta y_v}{\Delta x_v} \quad \text{mit} \quad x_{v-1} \le z_v \le x_v$$

Strebt n nun gegen Unendlich, dann ist, unabhängig wie die Teilung gewählt wurde:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{v=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(z_v))^2} \cdot (\Delta x_v) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Das Verfahren ist ähnlich zur Berechnung von Ober – und Untersumme bei Integralen.