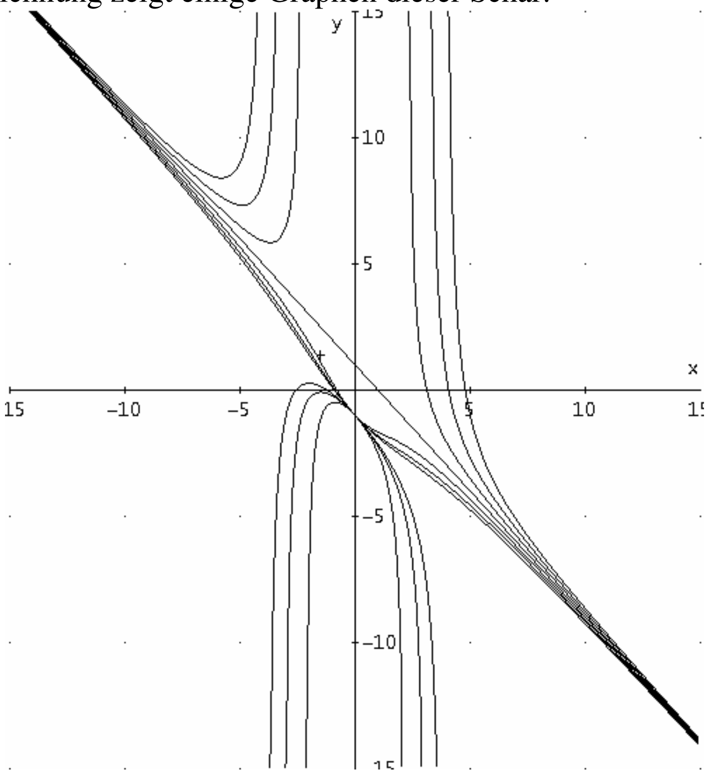
Aufg.-Nr.: 12	Bereich: gebr.-rat. Funktionenschar	Kursart: LK	CAS

Funktionenschar

Durch $$f_k(x) = \frac{x^2 - k}{x^2 + k} - x \quad \text{mit } x \in R \text{ und } k \in R$$

ist eine Funktionenschar gegeben.

Die nachfolgende Zeichnung zeigt einige Graphen dieser Schar:



a) Beschreiben Sie wesentliche Eigenschaften, Unterschiede und Gemeinsamkeiten der Graphen.

b) Untersuchen Sie, welche Graphen sich im Punkt P(0/-1) schneiden.

c) Zeigen Sie: Es gibt genau einen Graphen, der einen Sattelpunkt hat.

d) Untersuchen Sie, für welche Parameter die Graphen Polstellen besitzen.

e) Der Graph von f_k (k>0) schließt mit dem Graphen von f_0 eine Fläche ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche.

f) A_k sei der Flächeninhalt der Fläche, die der Graph von f_k (k>0) mit den Koordinatenachsen im dritten Quadranten einschließt.
   f1) Berechnen Sie (näherungsweise) $A_{0,5}$.
   f2) Begründen Sie, dass für die Flächen gilt: $A_k \leq 0,5$.

Lösung

Hinweis: Der Fall $k = 0$ führt auf die Funktion $f_0(x) = 1 - x$, dieser Fall wird bis Aufgabenteil **d)** nicht berücksichtigt

a) Gemeinsamkeiten:

i. Alle Graphen haben mindestens eine Nullstelle
ii. Gemeinsame Asymptote
iii. 2 Wendepunkte
iv. gemeinsamer Punkt P(0|-1)

Unterschiede:

keinen oder zwei Extrempunkte

b) Es gilt völlig unabhängig von k: $f_k(0) = -1$, d.h. alle Graphen der Schar schneiden sich im Punkt P(0|-1).

Man kann sogar zeigen, dass P(0|-1) der einzige Schnittpunkt der Schar ist:

Für $x \neq 0$ und $t \neq k$ gilt nämlich:

$$\frac{x^2-k}{x^2+k} - x = \frac{x^2-t}{x^2+t} - x \Leftrightarrow (x^2-k)(x^2+t) = (x^2-t)(x^2+k)$$
$$\Leftrightarrow x^4 + (t-k)x^2 - kt = x^4 + (k-t)x^2 - kt \Leftrightarrow' (t-k)x^2 = (k-t)x^2$$

und wegen $x \neq 0 \Rightarrow t - k = k - t \Leftrightarrow 2t = 2k \Leftrightarrow t = k$ Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

c)

$$f_k'(x) = \frac{2x(x^2+k) - (x^2-k)\cdot 2x}{(x^2+k)^2} - 1 = \frac{4kx}{(x^2+k)^2} - 1$$

$$f_k''(x) = \frac{4k(x^2+k)^2 - 4kx \cdot 2(x^2+k)\cdot 2x}{(x^2+k)^4} = \frac{4k(x^2+k) - 16kx^2}{(x^2+k)^3} = \frac{-12kx^2 + 4k^2}{(x^2+k)^3}$$

$$f_k'''(x) = \frac{-24kx\cdot(x^2+k)^3 - (-12kx^2+4k^2)\cdot 3\cdot(x^2+k)^2\cdot 2x}{(x^2+k)^6}$$

$$= \frac{-24kx\cdot(x^2+k) - 6x\cdot(-12kx^2+4k^2)}{(x^2+k)^4} = \frac{48kx^3 - 48k^2x}{(x^2+k)^4}$$

Wendestellen:

notwendige Bedingung: $f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow -12kx^2 + 4k^2 = 0 \Leftrightarrow 4\cdot k(-3x^2+k) = 0$

Wegen $k \neq 0$ (vergleiche Hinweis am Anfang), folgt $x_1 = \sqrt{\frac{k}{3}} = \frac{\sqrt{3k}}{3}$ und $x_2 = -\frac{\sqrt{3k}}{3}$

hinreichende Bedingung: $f_k''(x) = 0$ und $f_k'''(x) \neq 0$

$$f_k'''\left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)=\frac{48k\left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)^3-48k^2\left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)}{\left(\left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)^2+k\right)^4}=\frac{\left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)\left(48k\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)^2-48k^2\right)}{\left(\left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)^2+k\right)^4}$$

$$=\frac{\left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)\cdot\left(48k\cdot\frac{3k}{9}-48k^2\right)}{\left(\frac{1}{3}k+k\right)^4}=\frac{-32k^2\left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)}{\frac{256}{81}k^4}=\frac{\mp 32\cdot\sqrt{3k}\cdot 81}{256k^2\cdot 3}=\frac{\mp 27\sqrt{3}}{8\sqrt{k^3}}\neq 0$$

Für einen Sattelpunkt muss zusätzlich gelten $f_k'\left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)=0$, also ...

$$0=f_k'\left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)=\frac{4k\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)}{\left(\left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)^2+k\right)^2}-1=\frac{4k\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)}{\left(\frac{4}{3}k\right)^2}-1=\frac{4k\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)-\left(\frac{4}{3}k\right)^2}{\left(\frac{4}{3}k\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow 0=4k\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)-\left(\frac{4}{3}k\right)^2=4k\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)-\left(\frac{4}{3}k\right)^2\Leftrightarrow \pm\frac{4}{3}\sqrt{3}\cdot k\cdot\sqrt{k}-\frac{16}{9}k^2$$

$$=\frac{4}{3}k\cdot\sqrt{k}\left(\pm\sqrt{3}-\frac{4}{3}\sqrt{k}\right)$$

Wegen $k\neq 0$ folgt $\pm\sqrt{3}-\frac{4}{3}\sqrt{k}=0\Leftrightarrow\frac{4}{3}\sqrt{k}=\pm\sqrt{3}$

Für den Fall Minus gibt es keine Lösung, für den Fall Plus gilt: $\frac{16}{9}k=3\Leftrightarrow k=\frac{27}{16}$

Nur für $k=\frac{27}{16}$ gilt $f_k'(x)=0$, deshalb hat nur dieser Graph der Schar einen Sattelpunkt.

d)

$$f_k(x)=\frac{x^2-k}{x^2+k}-x$$

$x^2+k=0\Leftrightarrow x^2=-k$, für negative k haben die Graphen Polstellen

e) Berechnung der Schnittstellen für k > 0

$$f_0(x)=f_k(x)\Leftrightarrow 1-x=\frac{x^2-k}{x^2+k}-x\Leftrightarrow 1=\frac{x^2-k}{x^2+k}\Leftrightarrow x^2+k=x^2-k\Leftrightarrow k=0$$

Es gibt also keine Schnittstellen.

$$\int_a^b (f_k(x) - f_0(x))dx = \int_a^b \left(\frac{x^2 - k}{x^2 + k} - 1\right)dx = \int_a^b \left(\frac{-2k}{x^2 + k}\right)dx =$$

$$= -2k \cdot \int_a^b \frac{1}{k \cdot \left(1 + \left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^2\right)}dx = -2 \cdot \sqrt{k}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)\Big|_a^b = -2\sqrt{k}\left(\arctan\left(\frac{a}{\sqrt{k}}\right) - \arctan\left(\frac{b}{\sqrt{k}}\right)\right)$$

Für $a \to +\infty$ und $b \to -\infty$ ergibt sich für das Integral der Wert $-2p \cdot \sqrt{k}$

Unendliche Fläche mit dem endlichen Flächeninhalt $A_k = 2p \cdot \sqrt{k}$

Betrachtet man statt der Funktion $f_0(x)$ die Funktion $g(x) = -x$, so erhält man die Schnittstellen $a = -\sqrt{k}$ und $b = \sqrt{k}$

$$\left|\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \frac{x^2 - k}{x^2 + k}dx\right| = \left|\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \left(1 - \frac{2k}{x^2 + k}\right)dx\right| = \left|x - 2k\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \frac{1}{k \cdot \left(1 + \left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^2\right)}dx\right|$$

$$= \left|x - 2\sqrt{k} \cdot \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)\Big|_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}}\right| = \left|\sqrt{k} - 2\sqrt{k}\arctan(1) - (-\sqrt{k} - 2\sqrt{k}\arctan(-1))\right|$$

$$= \left|2\sqrt{k} - \pi\sqrt{k}\right| = \left|(2 - \pi)\sqrt{k}\right| \approx \left|-1{,}14 \cdot \sqrt{k}\right| = 1{,}14 \cdot \sqrt{k}$$

---

f)

f1) $f_{0,5}(x) = \dfrac{x^2 - 0{,}5}{x^2 + 0{,}5} - x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 0{,}5 - x^3 - 0{,}5x = 0 \Leftrightarrow -2x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$

Mit Hilfe eines Computer-Algebra-Systems erhält man näherungsweise die Nullstelle

$x_0 \approx -0{,}4406$

$$A_{0,5} = \left|\int_{-0,4406}^{0} \left(\frac{x^2 - 0{,}5}{x^2 + 0{,}5} - x\right)dx\right| = \left|x - 2\sqrt{0{,}5} \cdot \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{0{,}5}}\right) - \frac{1}{2}x^2 \Big|_{-0,4406}^{0}\right|$$

$$= \left|-0{,}2504\right| = 0{,}2504 \text{ FE}$$

f2) Die Flächen liegen alle im Dreieck A(0|0) ; B(-1|0) (vgl. Nullstelle) und C(0|-1) (vgl. Teil b).

Es gilt also die Abschätzung $A_k \le \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$