

Aufgabe 12 Preispolitik

Ein Industrieunternehmen A , das nur ein Produkt herstellt, entnimmt seiner Betriebsbuchhaltung (Kosten- und Leistungsrechnung) folgende Angaben:

Der Kostenverlauf ist gekennzeichnet durch ständig steigende Gesamtkosten, wobei der Kostenzuwachs mit jeder produzierten Einheit unterschiedlich ist. Anfänglich nimmt der Kostenzuwachs bedingt durch effizienteren Arbeitskräfte- und Maschineneinsatz ab. Von einer bestimmten Produktionsmenge an ist der Kostenzuwachs jedoch durch höheren Energieverbrauch und Maschinenverschleiß steigend. Von den Gesamtkosten des Unternehmens sind die folgenden Zahlen bekannt:

Die fixen Kosten belaufen sich auf 20 GE, der Graph der Gesamtkostenfunktion hat im Punkt $P(3|56)$ einen Wendepunkt und bei einer Produktionsmenge von 1 ME entstehen Kosten in Höhe von 42 GE. Die Kapazitätsgrenze des Betriebes liegt bei 9 ME und es wird beliebige Teilbarkeit der Mengeneinheiten (ME) unterstellt.

Hinweis: Alle zu skizzierenden Funktionsgraphen sind in einem Koordinatensystem darzustellen. Wählen Sie dabei für die Ordinate $20 \text{ GE} = 1 \text{ cm}$ und für die Abszisse $1 \text{ ME} = 1 \text{ cm}$.

- a) Ermitteln Sie aus obigen Angaben den Term der „einfachsten“ Gesamtkostenfunktion K_A des Unternehmens A .
Geben Sie den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich $D_{\text{ök}}$ an und skizzieren Sie den Graphen der Gesamtkostenfunktion K_A .

Das Industrieunternehmen A ist einer von vielen Anbietern auf dem Markt. Die Preisfunktion p ist demnach eine Konstante und sie lautet: $p(x) = 26$.

- b) Bestimmen Sie die Gleichung der Gewinnfunktion G_A .
Ermitteln Sie damit folgende für das Unternehmen wichtige Informationen:
- die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze,
 - die Produktions-/ Absatzmenge, bei der maximaler Gewinn erzielt wird,
 - den maximalen Gewinn.
- Skizzieren Sie den Graphen der Gewinnfunktion G_A .

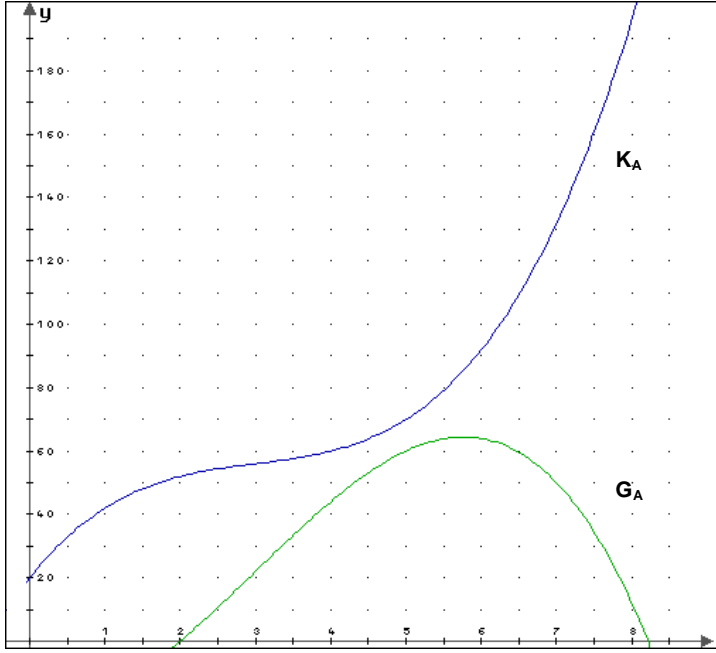
Ein Konkurrenzunternehmen B hat in seinem Betrieb durch Beobachtung der Kostenentwicklung in Abhängigkeit von der produzierten Menge folgende Grenzkostenfunktion K'_B bestimmt:

$$K'_B : K'_B(x) = \frac{1}{x+e} + \frac{1}{8}x^3.$$

- c) Bestimmen Sie bei fixen Kosten von 30 GE die Gesamtkostenfunktion von K_B .
- d) Zeigen Sie durch geeignete Rechnungen, dass sich bei der vorliegenden Kostensituation des Unternehmens B die Graphen der Grenzkosten K'_B und der Stückkosten k_B im Minimum der Stückkosten schneiden. Die entsprechende Produktionsmenge soll nicht errechnet werden.
- e) Bestimmen Sie für den gegebenen Marktpreis p von 26 GE mit Hilfe eines geeigneten Näherungsverfahrens die Gewinnschwelle des Unternehmens B und führen Sie das Verfahren solange durch, bis sich die dritte Nachkommastelle nicht mehr ändert.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Die „einfachste“ Funktion, die den vorgegebenen Kostenverlauf mit einem Wendepunkt erfüllt, wäre eine ganzrationale Funktion 3. Grades:</p> $K_A(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $K'_A(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $K''_A(x) = 6ax + 2b$ $K_A(0) = 20: \quad \text{I.} \quad \quad \quad d = 20$ $K_A(3) = 56: \quad \text{II.} \quad \quad 27a + 9b + 3c + d = 56$ $K''_A(3) = 0: \quad \text{III.} \quad \quad \quad 18a + 2b = 0$ $K_A(1) = 42: \quad \text{IV.} \quad \quad a + b + c + d = 42$ <p>Nach Lösen des LGS erhält man:</p> $a = 1; b = -9; c = 30; d = 20 .$ <p>Also gilt: $K_A: K_A(x) = x^3 - 9x^2 + 30x + 20$</p> $D_{\text{ök}} = [0; 9]$ <p>(Funktionsgraph von K_A siehe Abbildung)</p>	10	10	
b)	<p>Der Gewinn errechnet sich aus der Differenz der Erlöse und der Kosten.</p> $G_A(x) = E(x) - K_A(x)$ $E(x) = p(x) \cdot x = 26x$ $\Rightarrow G_A: G_A(x) = 26x - (x^3 - 9x^2 + 30x + 20) = -x^3 + 9x^2 - 4x - 20$ <p><u>Gewinnschwelle und Gewinngrenze:</u></p> <p><u>Bed:</u> $G_A(x) = 0$</p> $-x^3 + 9x^2 - 4x - 20 = 0 \quad / \cdot (-1)$ $x^3 - 9x^2 + 4x + 20 = 0 \quad (\text{durch Probieren } x_1 = 2)$ <p>Horner Schema:</p> $\begin{array}{r rrrr} & 1 & -9 & 4 & 20 \\ & & 0 & 2 & -14 & -20 \\ \hline x = 2 & 1 & -7 & -10 & 0 & \Rightarrow x_1 = 2 \end{array}$ $x^2 - 7x - 10 = 0$ $x_{2,3} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{89}{4}}$ $x_2 \approx 8,22 ; \quad x_3 \approx -1,22 \notin D_{\text{ök}}$ <p>Die Gewinnschwelle liegt bei 2 ME und die Gewinngrenze bei rund 8,22 ME.</p> <p><u>oder:</u> $GS(2 0); GG(8,22 0)$</p>			

Lösungsskizze		Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
<p><u>Gewinnmaximum:</u></p> <p>Bed: $G'(x) = 0$ und $G''(x) \neq 0$</p> <p>$G_A'(x) = -3x^2 + 18x - 4$</p> <p>$G_A''(x) = -6x + 18$</p> <p>$\Rightarrow -3x^2 + 18x - 4 = 0$</p> <p>$x^2 - 6x + \frac{4}{3} = 0$</p> <p>$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{\frac{23}{3}}$</p> <p>$x_1 \approx 5,77 \quad G_A''(5,77) < 0 \Rightarrow \text{Max.} \quad G_A(5,77) \approx 64,46$</p> <p>$[x_2 \approx 0,23 \quad \text{nicht relevant, da der Wert kleiner als die Gewinnschwelle ist.}]$</p> <p>Die gewinnmaximale Absatzmenge beträgt 5,77 ME und erbringt einen maximalen Gewinn von 64,46 GE.</p> 		10	20	5
c)	<p>Die Kostenfunktion ist die Stammfunktion von K_B', die durch den Punkt $P(0 30)$ verläuft. Der Nachweis kann alternativ über das Integrieren oder das Differenzieren erfolgen:</p> <p><u>Integrieren:</u></p> <p>$K_B(x) = \int \left(\frac{1}{x+e} + \frac{1}{8}x^3 \right) dx + c \Rightarrow K_B(x) = \ln(x+e) + \frac{1}{32}x^4 + c$</p> <p>$K_B(0) = 30 \Leftrightarrow \ln(e) + c = 30 \Leftrightarrow c = 29$</p> <p>$K_B(x) = \ln(x+e) + \frac{1}{32}x^4 + 29$</p>			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p><u>Differenzieren:</u></p> $K_B'(x) = \frac{1}{x+e} + \frac{1}{8}x^3 \quad \wedge \quad \text{Nachweis von } K_B(0) = 30$		5	
d)	<p>Bed.: $K_B'(x) = k_b(x) \Leftrightarrow k_b'(x) = 0$</p> $K_B'(x) = \frac{1}{x+e} + \frac{1}{8}x^3$ $k_b(x) = \frac{K_B(x)}{x} = \frac{\ln(x+e) + \frac{1}{32}x^4 + 29}{x} = \frac{\ln(x+e)}{x} + \frac{1}{32}x^3 + \frac{29}{x}$ $k_b'(x) = \frac{\frac{1}{x+e} \cdot x - \ln(x+e)}{x^2} + \frac{3}{32}x^2 - \frac{29}{x^2}$ $= \frac{1}{x+e} - \frac{\ln(x+e)}{x^2} + \frac{3}{32}x^2 - \frac{29}{x^2}$ <p>(1) $K_B'(x) = k_b(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x+e} + \frac{1}{8}x^3 = \frac{\ln(x+e)}{x} + \frac{1}{32}x^3 + \frac{29}{x}$</p> $\frac{1}{x+e} + \frac{1}{8}x^3 - \frac{\ln(x+e)}{x} - \frac{1}{32}x^3 - \frac{29}{x} = 0$ $\frac{1}{x+e} - \frac{\ln(x+e)}{x} + \frac{3}{32}x^3 - \frac{29}{x} = 0$ <p>(2) $k_b'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+e} - \frac{\ln(x+e)}{x^2} + \frac{3}{32}x^2 - \frac{29}{x^2} = 0 \quad \cdot (x)$</p> $\frac{1}{x+e} - \frac{\ln(x+e)}{x} + \frac{3}{32}x^3 - \frac{29}{x} = 0$ <p>Die Bestimmungsgleichungen (1) und (2) stimmen überein; folglich werden sie auch von demselben x-Wert erfüllt. Damit ist gezeigt, dass sich die Graphen der Grenzkosten und der Stückkosten im Minimum der Stückkosten schneiden.</p>		5	15
e)	<p>Bed.: $G_B(x) = 0$</p> $G_B(x) = E(x) - K_B(x)$ $G_B(x) = 26x - \ln(x+e) - \frac{1}{32}x^4 - 29$ $26x - \ln(x+e) - \frac{1}{32}x^4 - 29 = 0 \quad (\text{keine ganzzahlige Lösung!})$ $\left. \begin{array}{l} G_B(1) \approx -4,34 \\ G_B(2) \approx 20,95 \end{array} \right\} x_0 = 1,1$ <p>Newton-Verfahren:</p> $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$f(x) = G_B(x) = 26x - \ln(x + e) - \frac{1}{32}x^4 - 29$ $f'(x) = G_B'(x) = 26 - \frac{1}{x + e} - \frac{1}{8}x^3$ $x_1 = 1,1 - \frac{f(1,1)}{f'(1,1)} \approx 1,1 - \frac{-1,7855537}{25,571727} \approx 1,1698253$ $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 1,1698253 - \frac{-0,0009886}{25,542693} \approx 1,169864$ $\Rightarrow GS(1,170 0)$		20	
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20