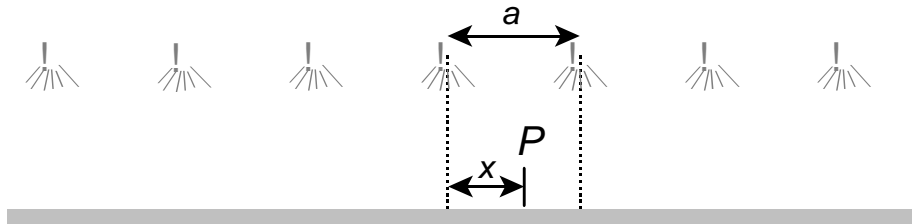


### Aufgabe 9 Beleuchtung

Aus der Aufgabe 3, „Centralexamen 1998, Wiskunde A“, 1. Termin, (Niederlande), abgeleitete Aufgabe.

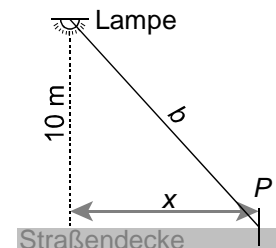
Bei der Installation einer Straßenbeleuchtung soll zumeist sicher gestellt sein, dass es überall entlang des erleuchteten Weges ungefähr gleich hell und zwischen zwei Leuchten nicht erheblich dunkler als direkt unter einer Leuchte ist. Um dies zu erreichen, könnte man die Leuchten in besonders kurzen Abständen aufstellen, was dann aber zu unverträglich hohen Kosten führen würde.



Für einen neu anzulegenden Weg möchte man optimale Lichtverhältnisse zu vertretbaren Kosten schaffen. Die Leuchten sollen in gleichen Abständen stehen, der Abstand zwischen zwei Leuchten ist  $a$  (in Meter). Eine Person im Punkt  $P$  zwischen den Leuchten hat vom Lot der linken Leuchte auf die Straße den Abstand  $x$  Meter (siehe Skizze).

Die Person im Punkt  $P$  bekommt Anteile vom Licht der beiden benachbarten Leuchten, aber auch etwas von weiter entfernten.

Der Abstand der Lampe zu einem Punkt  $P$  auf der Straßendecke ist  $b$  (in Meter). In unserem Modell sollen die Lampen jeweils 10m über der Straßendecke montiert sein. Die nebenstehende Skizze beschreibt also pro Lampe die geometrischen Verhältnisse.



Die Beleuchtungsstärke im Punkt  $P$  bezogen auf eine Lampe nennen wir  $S$  (in Lux).

Für  $S$  gilt: 
$$S(b) = \frac{100.000}{b^3}$$

- Bestimmen Sie den Definitions- und Wertebereich von  $S(b)$  und geben Sie begründend an, wie sich  $S(b)$  in diesem Intervall verhält.
- Berechnen Sie den Abstand  $x$ , falls die Beleuchtungsstärke  $S$  (bezogen auf eine Lampe) im Punkt  $P$  halb so groß ist wie direkt unter der Lampe.
- Für Berechnungen zur Ausleuchtung der Straße ist die Angabe der Beleuchtungsstärke in Abhängigkeit von  $x$  sinnvoller. Leiten Sie einen Term  $S_2(x)$  her, der diesen Sachverhalt beschreibt.
- Der Abstand  $a$  zwischen je zwei Leuchten soll  $a = 20$  m betragen. Der Punkt  $P$  soll sich – wie in der Skizze oben auf der Straßendecke befinden und vom Fußpunkt des Lotes einer Leuchte auf die Straßendecke den Abstand 6 m haben.  
Bestimmen Sie einen sinnvollen Näherungswert für die Gesamtbeleuchtungsstärke im Punkt  $P$ . Ermitteln Sie verschiedene Näherungswerte, indem Sie die Anzahl der Leuchten sinnvoll variieren.

Fortsetzung nächste Seite →

e) Leiten Sie für die Baubehörde einen konkreten Vorschlag für eine 200 m lange Straße mit Begründungen für Ihre Lösung her. Dabei soll die Straße überall hinreichend hell beleuchtet sein – dies ist der Fall, wenn die Beleuchtungsstärke zwischen 90 Lux und 100 Lux beträgt - und die Kosten vertretbar bleiben.

f) Bestimmen Sie mit Hilfe einer numerischen Integration eine Näherung für  $\int_0^{20} S_2(x) dx$ .

g) Welche Bedeutung hat der Zahlenwert  $2 \cdot \frac{\int_0^{20} S_2(x) dx}{20}$  ?

## Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Da sich der Beobachter im einfachsten Fall direkt unter der Lampe befindet bzw. unendlich weit von diesem Punkt befinden kann, folgt: $D = [10; \infty[$ . Damit folgt für den Wertebereich: $W = [1\,000; 0[$ . Da $S(b)$ umgekehrt proportional zu $b^3$ ist, nimmt die Beleuchtungsstärke sehr rasch mit größerer werdendem Abstand ab.	5		
b)	Aus a) folgt für die Beleuchtungsstärke unter der Lampe: $S(10) = 100$ . Die halb so große Beleuchtungsstärke beträgt also 50 Lux. Setzt man diesen Wert in die gegebene Festlegung für S ein, so folgt nach einigen elementaren Umformungen: $b = \sqrt[3]{2\,000} \approx 12,6$ .  Wendet man den Satz des Pythagoras auf die gegebene Skizze an, so folgt: $x^2 = b^2 - 100$ , also $x \approx 7,7$ . Da wir Abstände berechnen, kommen jeweils nur die nichtnegativen Lösungen in Frage.  Bezogen auf eine Lampe ist die Lichtstärke bei einem Abstand von etwa 7,7 m von der Lampe etwa halb so groß wie direkt unter der Lampe.	10		
c)	Wie schon oben angegeben ist $b^2 = x^2 + 100$ , also $b = \sqrt{x^2 + 100}$ .  Setzt man diesen Term für b in die gegebene Festlegung ein, so folgt: $S_2(x) = S\left(\sqrt{x^2 + 100}\right) = \frac{100\,000}{(x^2 + 100)^{1,5}}$	10		
d)	Nach Voraussetzung befindet sich der Punkt P 6 m vom Fußpunkt des Lotes der linken und daher 14 m vom Fußpunkt des Lotes der rechten Lampe entfernt. Berechnet man die Beleuchtungsstärken in P in Abhängigkeit von diesen Entfernungen, so folgt: $S_2(6) \approx 63,05$ und $S_2(14) \approx 19,64$ .  Hinzu kommt aber auch noch Licht von weiter entfernten Lampen. Zunächst wird noch die nächste linke Lampe ( $x_3 = 26$ ) und die nächste rechte ( $x_4 = 34$ ) berücksichtigt. Berechnet man hierzu die Beleuchtungsstärken, so folgt: $S_2(26) \approx 4,63$ und $S_2(34) \approx 2,25$ .  Die Gesamtbeleuchtungsstärke im Punkt P durch diese 4 Lampen beträgt also 89,57 Lux.  Auch von den noch weiter entfernten Lampen kommt noch etwas Licht hinzu. Berechnet man die Werte für die folgenden Lampen, so erhält man für $S(46) \approx 0,96$ und $S(54) \approx 0,60$ . Daher beträgt die Gesamtbeleuchtungsstärke bei 6 Lampen im Punkt P: 91,7 Lux.  Die Berücksichtigung weiterer Lampen ist nicht mehr sinnvoll, da die Zunahme der Beleuchtungsstärke unter 1 % liegt.		20	5
e)	Man kann beispielsweise den Lampenabstand $a$ und eine Stelle zwischen zwei Lampen mit dem Abstand $x$ von der linken Lampe betrachten und den funktionalen Zusammenhang $S_3(x, a)$ untersuchen zwischen $x$ und $a$ als Argumenten und der an der Stelle herrschenden Beleuchtungsstärke $S_3$ als zugehörigem Wert.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung																																
		I	II	III																														
	<p>Bei Berücksichtigung von 4 benachbarten Lampen (vgl. d) erhält man folgenden Funktionsterm:</p> $S_3(x,a) = S_2(x) + S_2(a-x) + S_2(a+x) + S_2(2a-x).$ <p>Addiert die Beleuchtungsstärken der direkt benachbarten Lampen, so weicht der Wert um etwa 10% vom obigen Wert ab. Daher könnte man auch nur diese beiden Lampen berücksichtigen und käme zu</p> $\widetilde{S}_3(x,a) = S_2(x) + S_2(a-x).$ <p>Am dunkelsten wird es dann genau in der Mitte zwischen zwei Lampen sein, also für <math>x = \frac{a}{2}</math>.</p> <p>Darum berechnen wir einige für verschiedene Abstände <math>a</math> und für <math>x = 0</math> und <math>x = \frac{a}{2}</math> zugehörige Werte von <math>S_3</math> bzw. <math>\widetilde{S}_3</math>.</p> <p>Wir berechnen einige Werte von <math>S_3(x,a)</math> und <math>\widetilde{S}_3(x,a)</math>:</p> <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tr><td><math>a</math></td><td>15</td><td>17</td><td>20</td><td>25</td></tr> <tr><td><math>x = 0</math></td><td>137</td><td>128</td><td>119</td><td>110</td></tr> <tr><td><math>x = \frac{a}{2}</math></td><td>116</td><td>98</td><td>77</td><td>52</td></tr> </table> <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tr><td><math>a</math></td><td>15</td><td>16</td><td>20</td><td>25</td></tr> <tr><td><math>x = 0</math></td><td>117</td><td>115</td><td>109</td><td>105</td></tr> <tr><td><math>x = \frac{a}{2}</math></td><td>102</td><td>95</td><td>71</td><td>49</td></tr> </table> <p>Wenn wir davon ausgehen, dass der Wert 100 Lux unter einer einzelnen Lampe dort gut genug ausleuchtet, so hätte man für <math>a = 17</math> (<math>a = 16</math>) in der Mitte (Minimum) zwischen 2 Lampen noch 98 (95) Lux, also fast 100 Lux.</p> <p>Man käme dann für die 200 m mit 12 (13) Lampen aus.</p> <p>Die Offenheit der Aufgabenstellung bringt es mit sich, dass natürlich auch ganz andere Argumentationen und Formalisierungen zu erfolgreichen Darstellungen führen können.</p>	$a$	15	17	20	25	$x = 0$	137	128	119	110	$x = \frac{a}{2}$	116	98	77	52	$a$	15	16	20	25	$x = 0$	117	115	109	105	$x = \frac{a}{2}$	102	95	71	49			
$a$	15	17	20	25																														
$x = 0$	137	128	119	110																														
$x = \frac{a}{2}$	116	98	77	52																														
$a$	15	16	20	25																														
$x = 0$	117	115	109	105																														
$x = \frac{a}{2}$	102	95	71	49																														
f)	$\int_0^{20} S_2(x) dx \approx 4 \cdot \sum_{k=0}^4 S_2((2k+1) \cdot 2) \approx 895.$		10																															
g)	$2 \cdot \frac{\int_0^{20} S_2(x) dx}{20} \approx 89,5.$ <p>Bei einem Lampenabstand von 20 m hat man zwischen 2 Lampen ohne Berücksichtigung weiterer Lampen noch eine mittlere Ausleuchtung von ca. 90 Lux.</p>		5	5																														
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25																														