

Kurvendiskussion mit Gebrochen-rationalen Funktionen II - Aufgabe 2

Gegeben ist eine Gebrochen-rationale Funktion f durch den Funktionsterm

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}.$$

Der Graph sei G_f .

- a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge der Funktion f .
- b) Untersuchen Sie, ob der Graph G_f achsensymmetrisch zur y -Achse oder punktsymmetrisch zum Ursprung ist.
- c) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion an eventuellen Definitionslücken. Geben Sie gegebenenfalls die Gleichungen vertikaler Asymptoten oder die Koordinaten der Punkte an, mit denen der Graph G_f an stetig behebbaren Definitionslücken geschlossen werden kann.
- d) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow +\infty$. Geben Sie gegebenenfalls die Terme von Asymptoten an.
- e) Untersuchen Sie G_f auf
 - e₁) den Schnittpunkt mit der y -Achse
 - e₂) Schnittpunkte mit der x -Achse
 - e₃) Extrempunkte
 - e₄) Wende- oder Sattelpunkte
 und geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten dieser Punkte an.
- f) Skizzieren Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse den Graphen G_f .
- g) Bestimmen Sie die Stellen zum Funktionswert $-\frac{1}{3}$.
- h) Bestimmen Sie die Stellen, an denen der Graph die Steigung $\frac{4}{9}$ hat.
- i) Bestimmen Sie den Term der Tangente an G_f an der Stelle 4.
- j) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes des Graphen G_f im I. Quadranten, dessen Abstand zum Ursprung minimal ist und berechnen Sie diesen Abstand.
- k)
- l) Bestimmen Sie den Term der Stammfunktion F von f
alternativ:
Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2 \cdot \ln(|x^2 - 4|)$ eine Stammfunktion der Funktion f ist.
- m) Der Graph G_f schließt mit der x -Achse im I. Quadranten über dem Intervall $[4; 6]$ ein Flächenstück ein. Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks.
- n) Der Graph G_f schließt mit der x -Achse und der vertikalen Asymptote im IV. Quadranten ein Flächenstück ein. Zeigen Sie, dass der Inhalt dieses Flächenstücks keinen endlichen Wert besitzt.
- o) Der Graph G_f schließt mit der Asymptote im II. Quadranten über dem Intervall $[4; \infty[$ ein Flächenstück ein. Zeigen Sie, dass der Inhalt dieses Flächenstücks keinen endlichen Wert besitzt.