

**Kurvendiskussion mit Gebrochen-rationalen Funktionen II - Aufgabe 5**

Gegeben ist eine Gebrochen-rationale Funktion  $f$  durch den Funktionsterm

$$f(x) = \frac{3x^2 - 8x}{x^2 - 4x + 4}.$$

Der Graph sei  $G_f$ .

- a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge der Funktion  $f$ .
- b) Untersuchen Sie, ob der Graph  $G_f$  achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse oder punktsymmetrisch zum Ursprung ist.
- c) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion an eventuellen Definitionslücken. Geben Sie gegebenenfalls die Gleichungen vertikaler Asymptoten oder die Koordinaten der Punkte an, mit denen der Graph  $G_f$  an stetig behebbaren Definitionslücken geschlossen werden kann.
- d) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion für  $x \rightarrow -\infty$  und  $x \rightarrow +\infty$ . Geben Sie gegebenenfalls die Terme von Asymptoten an.
- e) Untersuchen Sie  $G_f$  auf
  - e<sub>1</sub>) den Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse
  - e<sub>2</sub>) Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse
  - e<sub>3</sub>) Extrempunkte
  - e<sub>4</sub>) Wende- oder Sattelpunkte
 und geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten dieser Punkte an.
- f) Skizzieren Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse den Graphen  $G_f$ .
- g) Bestimmen Sie die Stellen zum Funktionswert  $-5$ .
- h) Bestimmen Sie die Stellen, an denen der Graph die Steigung  $-\frac{4}{27}$  hat.
- i) Bestimmen Sie den Term der Tangente an  $G_f$  an der Stelle  $-2$ .
- j)
- k) Zeigen Sie, dass der Graph  $G_f$  zwei Punkte enthält, die symmetrisch zur  $y$ -Achse liegen und zwei Punkte enthält, die symmetrisch zum Ursprung liegen.
- l) Bestimmen Sie den Term der Stammfunktion  $F$  von  $f$   
alternativ:  
Zeigen Sie, dass die Funktion  $F$  mit  $F(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 9x - 16 \cdot \ln(|x-1|)$  eine Stammfunktion der Funktion  $f$  ist.
- m) Der Graph  $G_f$  schließt mit der  $x$ -Achse im II. Quadranten über dem Intervall  $[-2; 0]$  ein Flächenstück ein. Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks.
- n) Der Graph  $G_f$  schließt mit der  $y$ -Achse im II. Quadranten ein Flächenstück ein. Zeigen Sie, dass der Inhalt dieses Flächenstücks keinen endlichen Wert besitzt.
- o) Der Graph  $G_f$  schließt mit der Asymptote im I. Quadranten ein Flächenstück ein. Zeigen Sie, dass der Inhalt dieses Flächenstücks keinen endlichen Wert besitzt.