

Kurvendiskussion mit Gebrochen-rationalen Funktionen II - Aufgabe 6 - Lösung

Definieren des Funktionsterms und Bestimmen von Zähler und Nenner

$$f(x) := \frac{3 \cdot x}{x^2 - 4} \quad \text{"Done"}$$

$$z(x) := \text{getNum}(f(x)) \quad \text{"Done"} \quad z(x) \quad 3 \cdot x$$

$$n(x) := \text{getDenom}(f(x)) \quad \text{"Done"} \quad n(x) \quad x^2 - 4$$

Bestimmen der Ableitungen

$$fs(x) := \frac{d}{dx}(f(x)) \quad \text{"Done"} \quad fs(x) \quad \frac{-3 \cdot (x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^2}$$

$$fss(x) := \frac{d^2}{dx^2}(f(x)) \quad \text{"Done"} \quad fss(x) \quad \frac{6 \cdot x \cdot (x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}$$

$$fsss(x) := \frac{d^3}{dx^3}(f(x)) \quad \text{"Done"} \quad fsss(x) \quad \frac{-18 \cdot (x^4 + 24 \cdot x^2 + 16)}{(x^2 - 4)^4}$$

a) Bestimmen der Definitionsmenge

$$\text{solve}(n(x) = 0, x) \quad x = 2 \text{ or } x = -2$$

b) Untersuchen von Symmetrie

$$\text{solve}(f(-x) = f(x), x) \quad x = 0$$

$$\text{solve}(f(-x) = -f(x), x) \quad \text{true}$$

c) Untersuchen der Funktion an den Definitionslücken

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} (f(x)) \quad -\infty \quad \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (f(x)) \quad \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (f(x)) \quad -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} (f(x)) \quad \infty$$

d) Untersuchen der Funktion an den Rändern der Definitionsmenge

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) \quad 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) \quad 0$$

$$\text{propFrac}(f(x)) \quad \frac{3 \cdot x}{x^2 - 4} \quad a(x) := 0 \quad \text{"Done"}$$

e1) Bestimmen des Schnittpunktes mit der y-Achse

$$f(0) \quad 0$$

e2) Bestimmen der Schnittpunkt(e) mit der x-Achse

$$\text{solve}(f(x) = 0, x) \quad x = 0$$

$$xn := 0 \quad 0 \quad yn1 := f(xn) \quad 0$$

e3) Bestimmen der Extrempunkte

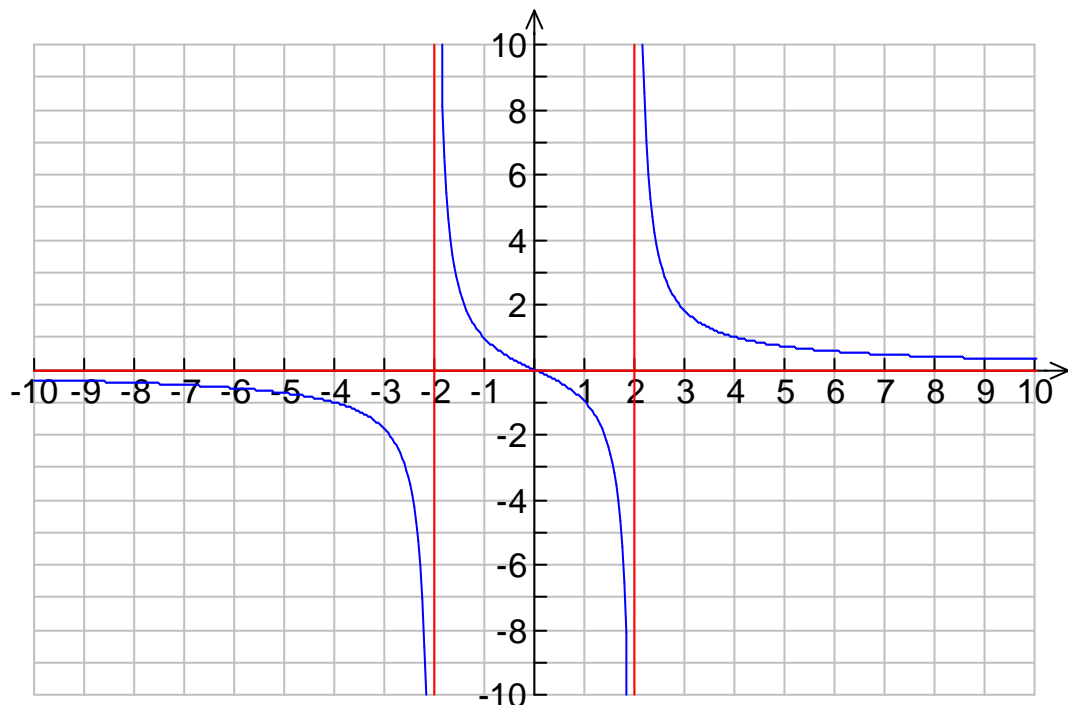
$$\text{solve}(fs(x) = 0, x) \quad \text{false}$$

e4) Bestimmen der Wendepunkte

$$\text{solve}(fss(x) = 0, x) \quad x = 0$$

$$xw := 0 \quad 0 \quad fsss(xw) \quad \frac{-9}{8} \quad yw := f(xw) \quad 0$$

f) Skizzieren des Funktionsgraphen



g) Berechnen von Stellen zu einem vorgegebenen Wert

$$\text{solve}(f(x) = 1, x) \quad x = 4 \text{ or } x = -1$$

h) Berechnen einer Stelle zu einer vorgegebenen Steigung

$$\text{solve}\left(fs(x) = \frac{-5}{3}, x\right) \quad x = \frac{2\sqrt{55}}{5} \text{ or } x = \frac{-2\sqrt{55}}{5} \text{ or } x = 1 \text{ or } x = -1$$

i) Bestimmen des Terms einer Tangente

$$xt := 1 \quad 1 \quad yt := f(xt) \quad -1$$

$$m := \text{fs}(xt) \quad \frac{-5}{3} \quad \text{solve}(yt = m \cdot xt + n, n) \quad n = \frac{2}{3}$$

j) Extremwertproblem

$$dq(x) := x^2 + (f(x))^2 \quad \text{"Done"} \quad dq(x) \quad \frac{9 \cdot x^2}{(x^2 - 4)^2} + x^2$$

$$dqs(x) := \frac{d}{dx}(dq(x)) \quad \text{"Done"} \quad dqs(x) \quad 2 \cdot x - \frac{18 \cdot x \cdot (x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3}$$

$$\text{solve}(dqs(x) = 0, x) \quad x = 2.97914 \text{ or } x = 0 \text{ or } x = -2.97914$$

$$dqss(x) := \frac{d}{dx}(dqs(x)) \quad \text{"Done"} \quad dqss(x) \quad \frac{18(3 \cdot x^4 + 32 \cdot x^2 + 16)}{(x^2 - 4)^4} + 2$$

$$dqss(2.97914) \quad 19.0884 \quad \sqrt{dq(2.97914)} \quad 3.49799$$

k) Besonderes

$$g(x) := \frac{12}{5} \cdot x - \frac{43}{5} \quad \text{"Done"} \quad g(x) \quad \frac{12 \cdot x}{5} - \frac{43}{5}$$

$$\text{solve}(f(x) = g(x), x) \quad x = \frac{-(\sqrt{2089} + 5)}{24} \text{ or } x = \frac{\sqrt{2089} - 5}{24} \text{ or } x = 4$$

$$\text{fs}(4) \quad \frac{-5}{12} \quad \text{fs}(4) \cdot \left(\frac{12}{5}\right) \quad -1$$

l) Bestimmen einer Stammfunktion

$$\int (f(x)) dx = \frac{3 \cdot \ln(|x^2 - 4|)}{2}$$

m) Berechnen eines begrenzten Flächeninhalts

$$\left| \int_4^8 (f(x)) dx \right| = \frac{3 \cdot \ln(5)}{2}$$

n) Berechnen eines unbegrenzten Flächeninhalts

$$\left| \int_{-2}^0 (f(x)) dx \right| = \infty$$

o) Berechnen eines unbegrenzten Flächeninhalts

$$\left| \int_4^{\infty} (f(x) - a(x)) dx \right| = \infty$$