

**Kurvendiskussion mit gebrochen-rationalen Funktionenscharen II - Aufgabe 1**

Gegeben ist eine Schar gebrochen-rationaler Funktionen  $f_k$  durch den Funktionsterm

$$f_k(x) = \frac{k}{1+k^2x^2}, \quad k \in \mathbb{R}^+.$$

Die Graphen seien  $G_k$ .

- a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge der Funktionenschar  $f_k$ .
- b) Untersuchen Sie, ob die Graphen  $G_k$  achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse oder punktsymmetrisch zum Ursprung ist.
- c) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionenschar an eventuellen Definitionslücken. Geben Sie gegebenenfalls die Gleichungen vertikaler Asymptoten oder die Koordinaten der Punkte an, mit denen die Graphen  $G_k$  an stetig behebaren Definitionslücken geschlossen werden können.
- d) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionen für  $x \rightarrow -\infty$  und  $x \rightarrow +\infty$ . Geben Sie gegebenenfalls die Terme von Asymptoten an.
- e) Untersuchen Sie die Graphen  $G_k$  auf
  - e<sub>1</sub>) den Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse
  - e<sub>2</sub>) Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse
  - e<sub>3</sub>) Extrempunkte
  - e<sub>4</sub>) Wende- oder Sattelpunkte
 und geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten dieser Punkte an.
- f) Skizzieren Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse den Graphen  $G_4$ .
- g) Bestimmen Sie den Parameter  $k$  so, dass  $G_k$  durch den Punkt  $(\frac{1}{2} | 1)$  verläuft.
- h) Bestimmen Sie den Parameter  $k$  so, dass  $G_k$  an der Stelle  $-1$  die Steigung  $\frac{1}{2}$  hat.
- i) Bestimmen Sie den Term der Tangente an  $G_k$  an der Stelle  $1$ .
- j)
- k) Bestimmen Sie den Funktionsterm der Funktion  $w_p$ , auf deren Graph alle Wendepunkte von  $G_k$  liegen.
- l) Die Graphen  $G_k$  schließen mit den Koordinatenachsen im I. und II. Quadranten ein Flächenstück ein. In dieses Flächenstück soll ein Rechteck mit möglichst großem Flächeninhalt gelegt werden. Bestimmen Sie die Abmessungen dieses Rechtecks und berechnen Sie dessen Flächeninhalt.
- m)
- n) Bestimmen Sie den Term der Stammfunktionen  $F_k$  von  $f_k$   
alternativ:  
Zeigen Sie, dass die Funktionen  $F_k$  mit  $F_k(x) = \arctan(k \cdot x)$  Stammfunktionen von  $f_k$  sind.
- o) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstückes, das die Graphen  $G_k$  mit der  $x$ -Achse über dem Intervall  $[0; 1]$  einschließen.
- p) Die Graphen  $G_k$  schließen mit der  $x$ -Achse im I. Quadranten ein Flächenstück ein. Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstückes.
- q) Zeigen Sie, dass der Inhalt des Flächenstückes, das die Graphen  $G_k$  mit den Koordinatenachsen und der Parallelen zur  $y$ -Achse durch den Wendepunkt im I. Quadranten einschließen, unabhängig vom Wert des Parameters  $k$  ist.