Kurvendiskussion mit gebrochen-rationalen Funktionenscharen II - Aufgabe 1 - Lösung

Definieren des Funktionsterms und Bestimmen von Zähler und Nenner

$f(x) := \frac{k}{1+k^2 \cdot x^2}$ "Done"

$z(x) := \text{getNum}(f(x))$ "Done" $z(x)$ k

$n(x) := \text{getDenom}(f(x))$ "Done" $n(x)$ $k^2 \cdot x^2 + 1$

Bestimmen der Ableitungen

$\text{fs}(x) := \frac{d}{dx}(f(x))$ "Done" $\text{fs}(x)$ $\frac{-2 \cdot k^3 \cdot x}{(k^2 \cdot x^2+1)^2}$

$\text{fss}(x) := \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$ "Done" $\text{fss}(x)$ $\frac{2 \cdot k^3 \cdot (3 \cdot k^2 \cdot x^2 - 1)}{(k^2 \cdot x^2+1)^3}$

$\text{fsss}(x) := \frac{d^3}{dx^3}(f(x))$ "Done" $\text{fsss}(x)$ $\frac{-24 \cdot k^5 \cdot x \cdot (k^2 \cdot x^2 - 1)}{(k^2 \cdot x^2+1)^4}$

a) Bestimmen der Definitionsmenge

$\text{solve}(n(x) = 0, x)$ *false*

b) Untersuchen von Symmetrie

$\text{solve}(f(-x) = f(x), x)$ *true*

$\text{solve}(f(-x) = -f(x), x)$ $k = 0$

c) Untersuchen der Funktion an den Definitionslücken

d) Untersuchen der Funktion an den Rändern der Definitionsmenge

$\lim_{x \to -\infty}(f(x))$ 0 $\lim_{x \to \infty}(f(x))$ 0

$\text{propFrac}(f(x))$ $\frac{k}{k^2 \cdot x^2+1}$ $a(x) := 0$ "Done"

e1) Bestimmen des Schnittpunktes mit der y-Achse

$f(0)$ k

e2) Bestimmen der Schnittpunkt(e) mit der x-Achse

$\text{solve}(f(x) = 0, x)$ $k = 0$

e3) Bestimmen der Extrempunkte

$\text{solve}(\text{fs}(x) = 0, x)$ $x = 0 \text{ or } k = 0$

$xe := 0$ 0 $\text{fss}(xe)$ $-2 \cdot k^3$ $ye := f(xe)$ k

e4) Bestimmen der Wendepunkte

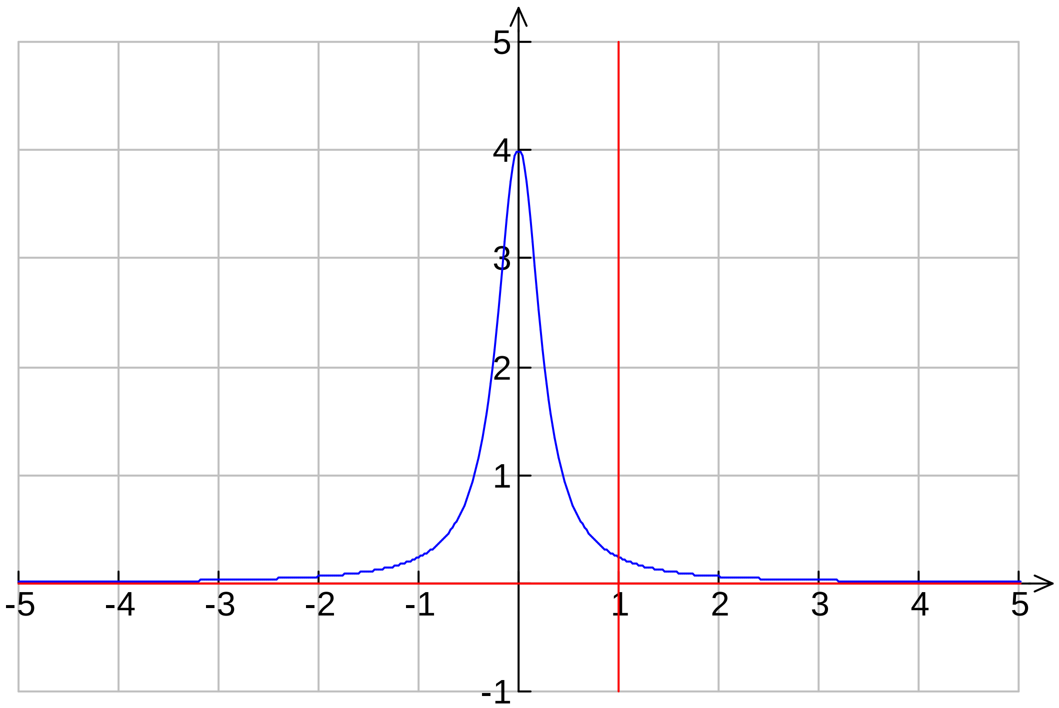
solve(fss(x) = 0, x) $\quad x = \frac{\sqrt{3}}{3\cdot k}$ or $x = \frac{-\sqrt{3}}{3\cdot k}$ or $k = 0$

$xw1 := \frac{-(\sqrt{3})}{3\cdot k} \quad \frac{-\sqrt{3}}{3\cdot k} \qquad fsss(xw1) \quad \frac{-27\cdot k^4\cdot\sqrt{3}}{16} \qquad yw1 := f(xw1) \quad \frac{3\cdot k}{4}$

$xw2 := \frac{\sqrt{3}}{3\cdot k} \quad \frac{\sqrt{3}}{3\cdot k} \qquad fsss(xw2) \quad \frac{27\cdot k^4\cdot\sqrt{3}}{16} \qquad yw2 := f(xw2) \quad \frac{3\cdot k}{4}$

f) Skizzieren des Funktionsgraphen

$k := 4 \quad 4$



DelVar(k) "Done"

g) Bestimmen des Parameters zu einem vorgegebenen Punkt

solve(f(0.5) = 1, k) $\quad k = 2.$

h) Bestimmen des Parameters zu einer vorgegebenen Steigung

solve$\left(fs(-1) = \frac{1}{2}, k\right) \quad k = 3.38298$ or $k = 1$

i) Bestimmen des Terms einer Tangente

$xt := 1 \quad 1 \qquad yt := f(xt) \quad \dfrac{k}{k^2+1}$

$m := fs(xt) \quad \dfrac{-2\cdot k^3}{(k^2+1)^2} \qquad \text{solve}(yt = m\cdot xt + n, n) \quad n = \dfrac{k\cdot(3\cdot k^2+1)}{(k^2+1)^2}$

j) Bestimmen der Kurve der Extrempunkte
k) Bestimmen der Kurve der Wendepunkte

$\text{solve}(x = xw1, k) \quad k = \dfrac{-\sqrt{3}}{3\cdot x} \qquad y = yw1 \mid k = \dfrac{-\sqrt{3}}{3\cdot x} \quad y = \dfrac{-\sqrt{3}}{4\cdot x}$

l) Extremwertproblem

$r(x) := 2\cdot x\cdot f(x) \quad \text{"Done"} \qquad r(x) \quad \dfrac{2\cdot k\cdot x}{k^2\cdot x^2+1}$

$rs(x) := \dfrac{d}{dx}(r(x)) \quad \text{"Done"} \qquad rs(x) \quad \dfrac{-2\cdot k\cdot(k^2\cdot x^2-1)}{(k^2\cdot x^2+1)^2}$

$\text{solve}(rs(x) = 0, x) \quad x = \dfrac{-1}{k} \text{ or } x = \dfrac{1}{k} \text{ or } k = 0$

$rss(x) := \dfrac{d}{dx}(rs(x)) \quad \text{"Done"} \qquad rss(x) \quad \dfrac{4\cdot k^3\cdot x\cdot(k^2\cdot x^2-3)}{(k^2\cdot x^2+1)^3}$

$rss\left(\dfrac{1}{k}\right) \quad -(k^2) \qquad r\left(\dfrac{1}{k}\right) \quad 1$

m) Besonderes

n) Bestimmen einer Stammfunktion

$\int (f(x))\, dx \quad \arctan(k\cdot x)$

o) Berechnen eines begrenzten Flächeninhalts

$\left|\int_0^1 (f(x))\, dx\right| \quad |\arctan(k)|$

p) Berechnen eines unbegrenzten Flächeninhalts

$\left|\int_0^\infty (f(x))\, dx\right| \quad \dfrac{\pi}{2}$

q) Besonderes

$$\left|\int_0^{\sqrt{3}/(3\cdot k)} (f(x))\,dx\right| \qquad \frac{\pi}{6}$$