

Kurvendiskussion mit gebrochen-rationalen Funktionenscharen II - Aufgabe 2

Gegeben ist eine Schar gebrochen-rationaler Funktionen f_k durch den Funktionsterm

$$f_k(x) = \frac{k \cdot x}{x^2 + k^2}, \quad k \in \mathbb{R}^+.$$

Die Graphen seien G_k .

- a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge der Funktionenschar f_k .
- b) Untersuchen Sie, ob die Graphen G_k achsensymmetrisch zur y -Achse oder punktsymmetrisch zum Ursprung ist.
- c) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionenschar an eventuellen Definitionslücken. Geben Sie gegebenenfalls die Gleichungen vertikaler Asymptoten oder die Koordinaten der Punkte an, mit denen die Graphen G_k an stetig behebbaren Definitionslücken geschlossen werden können.
- d) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionen für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow +\infty$. Geben Sie gegebenenfalls die Terme von Asymptoten an.
- e) Untersuchen Sie die Graphen G_k auf
 - e₁) den Schnittpunkt mit der y -Achse
 - e₂) Schnittpunkte mit der x -Achse
 - e₃) Extrempunkte
 - e₄) Wende- oder Sattelpunkte
 und geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten dieser Punkte an.
- f) Skizzieren Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse den Graphen G_2 .
- g) Bestimmen Sie den Parameter k so, dass G_k durch den Punkt $(1 | \frac{1}{2})$ verläuft.
- h) Bestimmen Sie den Parameter k so, dass G_k an der Stelle -1 die Steigung $\frac{6}{25}$ hat.
- i) Bestimmen Sie den Term der Tangente an G_k an der Stelle $2k$.
- j) Bestimmen Sie den Funktionsterm der Funktion h_p , auf deren Graph alle Hochpunkte von G_k liegen.
- k) Bestimmen Sie den Funktionsterm der Funktion w_p , auf deren Graph alle Wendepunkte von G_k liegen.
- l)
- m)
- n) Bestimmen Sie den Term der Stammfunktionen F_k von f_k
alternativ:
Zeigen Sie, dass die Funktionen F_k mit $F_k(x) = \frac{1}{2}k \cdot \ln(x^2 + k^2)$ Stammfunktionen von f_k sind.
- o) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstückes, das die Graphen G_k mit der x -Achse über dem Intervall $[0; k]$ einschließen.
- p) Die Graphen G_k schließen mit der x -Achse im I. Quadranten ein Flächenstück ein. Zeigen Sie, dass der Inhalt dieses Flächenstückes keinen endlichen Wert besitzt.
- q)