Aufgabe 12: Molkerei

Die Molkerei Meier hat die Rezeptur eines Joghurts mit der neuen Geschmacksrichtung „Apfelbeere“ entwickelt. Für die Produktion dieses Joghurts geht die Molkerei von einem s-förmigen Kurvenverlauf der Kostenfunktion aus, die der Produktionsmenge *x* die Gesamtkosten *y* zuordnet.

Die Fixkosten betragen 400 Geldeinheiten (GE). Außerdem ist bekannt, dass der Graph der Kostenfunktion einen Wendepunkt in (10 | 700) aufweist und die Wendetangente die Gleichung $t_w(x) = 20x + 500$ hat. Die Kapazitätsgrenze für dieses Produkt liegt bei 50 Mengeneinheiten (ME). Eine Marktanalyse hat ergeben, dass das Produkt in dieser Menge vollständig verkauft werden kann.

Hinweis: Alle zu skizzierenden Graphen sind in einem Koordinatensystem darzustellen. Wählen Sie dabei als Maßstab für die Ordinate 500 GE $\triangleq$ 1 cm, für die Abszisse 5 ME $\triangleq$ 1 cm.

a) Bestimmen Sie die Gleichung einer ganzrationalen Funktion möglichst niedrigen Grades, die die Entwicklung der Kosten *K* nach den oben gemachten Angaben beschreibt. Geben Sie den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich an.

b) Die Molkerei erwartet einen Erlös von 70 GE je ME. Bestimmen Sie die Erlösfunktion *E* und zeigen Sie, dass die Gewinnfunktion *G* die Gleichung $G(x) = -0{,}1x^3 + 3x^2 + 20x - 400$ hat.

Skizzieren Sie die Graphen der Kostenfunktion *K* und der Erlösfunktion *E*.

Die Gewinnschwelle liegt bei 10 ME. Bestimmen Sie die Gewinngrenze.

Bestimmen Sie die Produktionsmenge, für die sich der maximale Gewinn ergibt, und berechnen Sie diesen.

c) Ein Mitglied der Geschäftsleitung schlägt vor, durch eine Reduzierung des Preises die Nachfrage zu steigern und mit erhöhtem Absatz den Gewinn des Unternehmens zu steigern.

Beurteilen Sie diesen Vorschlag unter Berücksichtigung der oben genannten Modellannahmen.

d) Zeitgleich ist eine zweite Molkerei mit diesem neuen Produkt und einem Dumpingpreis auf den Markt gekommen. Nun überlegt man bei der Molkerei Meier, wie man wirtschaftlich vertretbar reagieren soll. Dabei ermittelt ein Abteilungsleiter der Molkerei Meier richtig, dass der niedrigste verlustfreie Preis 50 GE je ME beträgt.

Skizzieren Sie den Graphen der entsprechenden Erlösfunktion E_{neu} und ermitteln Sie, wie viele Mengeneinheiten bei diesem Preis nur noch produziert und abgesetzt werden dürfen, damit kein Verlust entsteht.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>
Kostenfunktion:
Die ganzrationale Funktion möglichst niedrigen Grades, die den gegebenen Bedingungen genügt, ist eine Funktion dritten Grades.
$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$K''(x) = 6ax + 2b$
fixe Kosten: 400 GE $\qquad d = 400$
Wendepunkt (10 | 700) $\qquad K(10) = 700$
$K''(10) = 0$
Wendetangente $t_w(x) = 20x + 500$ $\qquad K'(10) = 20$
Daraus ergibt sich das folgende Gleichungssystem:
$1000a + 100b + 10c + 400 = 700$
$300a + 20b + c = 20$
$60a + 2b = 0$
mit den Lösungen: $a = 0{,}1,\ b = -3,\ c = 50$ und $d = 400$,
also $K(x) = 0{,}1x^3 - 3x^2 + 50x + 400$
Man kann zur Ermittlung der Kostenfunktion auch ausnutzen, dass eine Entwicklung um den Wendepunkt möglich ist.
Definitionsbereich: $D = [0\ ;\ 50]$
</td><td>10</td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>
Erlösfunktion: $E(x) = 70x$
Gewinnfunktion:
$G(x) = E(x) - K(x)$, also
$G(x) = 70x - (0{,}1x^3 - 3x^2 + 50x + 400)$
$= -0{,}1x^3 + 3x^2 + 20x - 400$
Skizze am Ende der Musterlösung.
Gewinngrenze: Schnittstelle von Erlös- und Kostenfunktion bzw. Nullstelle der Gewinnfunktion
Eine Lösung ist mit $x = 10$ (Gewinnschwelle) gegeben, die anderen Lösungen lassen sich durch Polynomdivision bzw. mit dem Horner Schema ermitteln:
$-0{,}1 \cdot (x^3 - 30x^2 - 200x + 4000) = -0{,}1 \cdot (x - 10) \cdot (x^2 - 20x - 400)$
$x^2 - 20x - 400 = 0$
ergibt $x = 10 + \sqrt{500} \approx 32{,}36$
oder $x = 10 - \sqrt{500} \notin D$
Die Gewinngrenze liegt bei 32,36 ME.
</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Maximaler Gewinn: $G'(x)=0 \wedge G''(x)<0$ $G'(x)=-0,3x^2+6x+20$ $G''(x)=-0,6x+6$ $-0,3x^2+6x+20=0$ ergibt $x=10+\sqrt{\frac{500}{3}}\approx 22,91$ oder $x=10-\sqrt{\frac{500}{3}}\notin D$ $G''(22,91)=-0,6\cdot 22,91+6<0$ $G(22,91)$ = 430,33GE. Bei einer Produktion von ca. 22,9 ME wird ein maximaler Gewinn von ca. 430,33 GE erzielt.	10	35	
c)	In dem angenommenen Modell handelt es sich bei der Erlösfunktion um eine lineare Funktion, die Steigung dieser Funktion entspricht dem Preis pro ME, dieser ist konstant und unabhängig von der Produktionsmenge *x*. Hier kann u.a. wie folgt argumentiert werden: Da die Produktion bei ca. 22,9 ME zu einem optimalen Gewinn führt, würde jede Veränderung des Verkaufspreises auch die absetzbare Menge verändern und eine Verringerung des Gewinns bewirken.			10
d)	1. Lösungsvariante (über die Steigung der Erlösfunktion): Der geforderte Preis entspricht der Steigung der Erlösfunktion. Da es sich hier um den niedrigsten Preis handelt, der gerade die Gesamtkosten deckt, kann die Steigung so lange verringert werden, bis aus der Sekante eine Tangente geworden ist. Damit entspricht der Preis dem Wert der ersten Ableitung von *K* an der Stelle 20. $K'(20)=50$ Bei einer Produktion von 20 ME deckt ein Mindestpreis von 50 GE die Gesamtkosten. Damit ist die Aussage des Abteilungsleiters bestätigt. 2. Lösungsvariante (über das Stückkostenminimum; der Mindestpreis muss das Minimum der Kosten pro ME abdecken): Funktion der Stückkosten: $k(x)=0,1x^2-3x+50+\frac{400}{x}$ Berechnung des Stückkostenminimums: $k'(x)=0: \quad 0,2x-3-\frac{400}{x^2}=0$ $0,2x^3-3x^2-400=0$ $x^3-15x^2-2000=0$ $(x-20)(x^2+5x+100)=0$			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

Die Gleichung hat genau eine reelle Lösung, nämlich $x = 20$.

$k''(x) = 0{,}2 + \frac{800}{x^3} > 0$ für alle $x > 0$.

Mindestpreis $k(20) = 40 - 60 + 50 + 20 = 50$.

Bei einer Produktions- bzw. Absatzmenge von 20 ME deckt ein Mindestpreis von 50 GE die Gesamtkosten. Damit ist die Aussage des Abteilungsleiters bestätigt.

<u>3. Lösungsvariante</u> (über den Berührpunkt der Graphen von K und E):

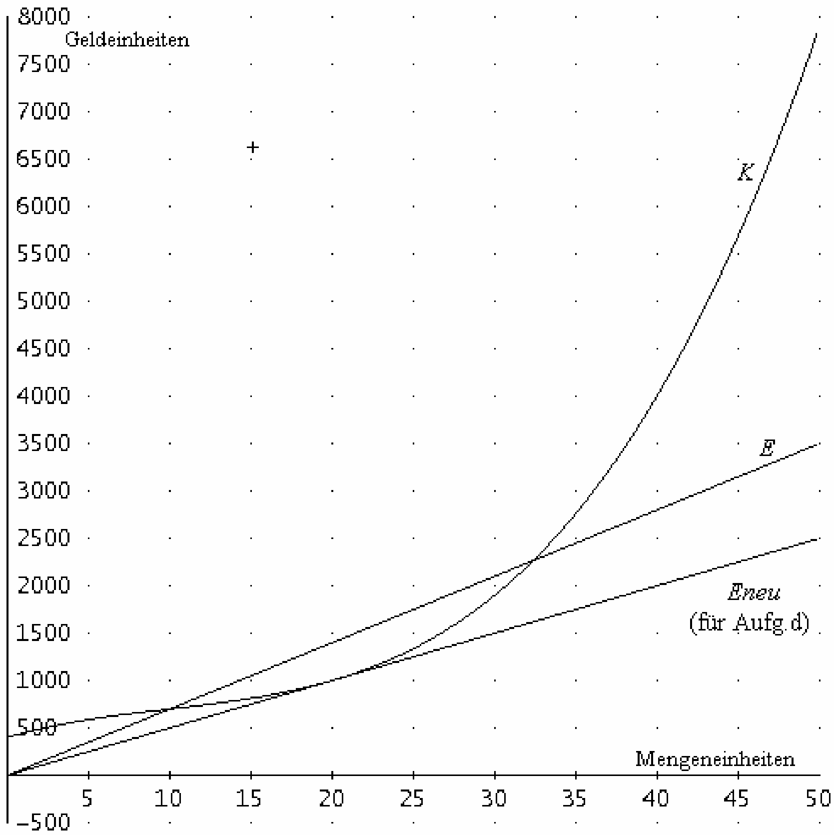
Die Steigung des Graphen der Erlösfunktion entspricht in diesem Sachkontext dem Preis pro ME. Bei $x = 20$ berühren sich die Graphen von K und E.

$K(20) = 0{,}1 \cdot 8000 - 3 \cdot 400 + 50 \cdot 20 + 400 = 1000$.

Der Graph der Erlösfunktion geht also durch den Punkt (20 | 1000) und hat damit die Steigung $\frac{1000}{20} = 50$. Dieser Wert entspricht dem gesuchten Mindestpreis.

Bei einer Produktions- bzw. Absatzmenge von 20 ME deckt ein Mindestpreis von 50 GE die Gesamtkosten. Damit ist die Aussage des Abteilungsleiters bestätigt.

<u>Skizze</u>



</td><td></td><td>5</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td align="right">Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>60</td><td>20</td></tr>
</table>