## Aufgabe 3 Minigolfbahn

*Aufgabe aus der schriftlichen Abiturprüfung Hamburg 2005.*

Bei einer Minigolfanlage soll eine Bahn mit einer Kurve angelegt werden. Der Ball läuft bis zur Kurve geradeaus (seine Einlaufstrecke), und nach dem Verlassen der Kurve läuft er wiederum geradeaus (seine Auslaufstrecke). In der Kurve führt die Bande den Ball. Die Form dieser Bande soll modelliert werden.
Der Beginn der Bande – der Einlaufpunkt in die Kurve – heißt $E$, das Ende der Bande – der Auslaufpunkt aus der Kurve – entsprechend $A$.

Dabei werden von den Planern zunächst folgende Forderungen gestellt:

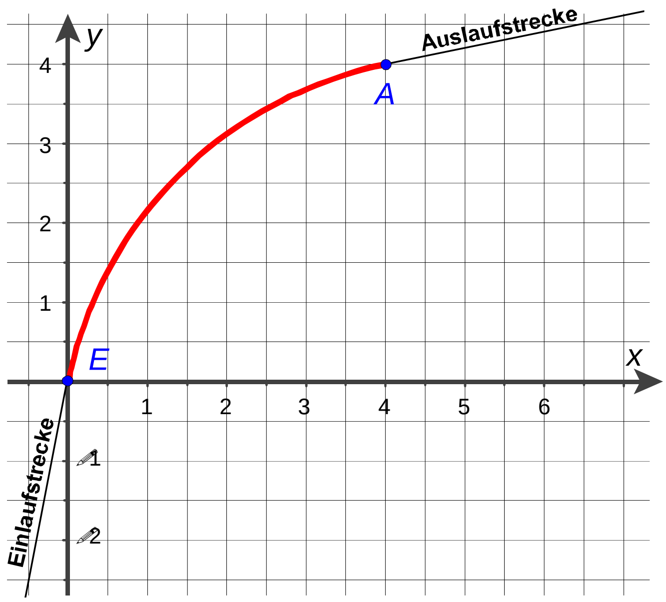
i) Der Einlaufpunkt $E$ liegt im Koordinatenursprung.

ii) Der Auslaufpunkt $A$ hat die Koordinaten ( 4 | 4 ).

iii) Die Einlaufstrecke hat die Steigung 5 und läuft bei $E$ tangential in die Bandenkurve ein, die Auslaufstrecke schließt bei $A$ tangential an die Bandenkurve an.

a) Als erstes wird versucht, die Bandenkurve einfach durch einen Kreisbogen zu realisieren (vgl. nebenstehende Abbildung).

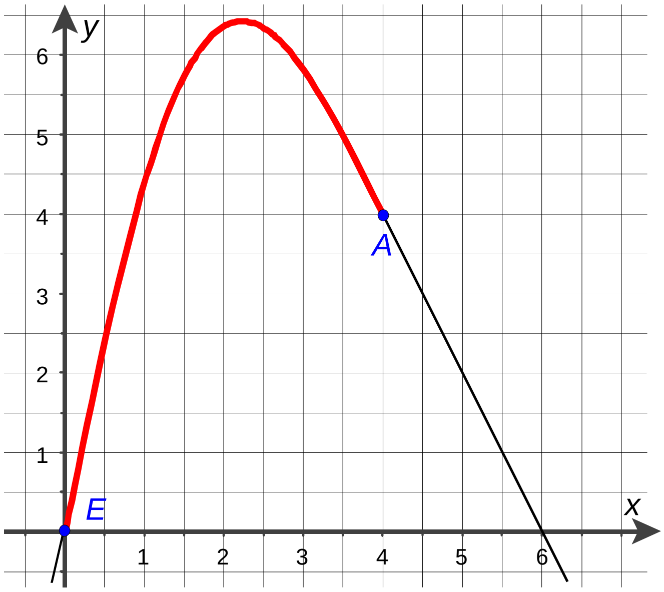
Zeigen Sie mit Hilfe geeigneter Rechnungen oder geometrischer Konstruktionen, dass der Mittelpunkt dieses Kreisbogens die Koordinaten (5 |–1) haben muss und die Auslaufstrecke dann zwangsläufig die positive Steigung $\frac{1}{5}$ hat.




*Fortsetzung nächste Seite →*

b) Der Ball soll aber stärker umgelenkt werden. (vgl. nebenstehende Abbildung). Die Auslaufstrecke soll deshalb eine negative Steigung haben, so dass also der Kreisbogen aus a) nicht verwendbar ist. Die Planer wünschen:

iv) Die Auslaufstrecke hat die Steigung –2.




- Bestimmen Sie den Winkel zwischen der gewünschten Einlauf- und Auslaufrichtung.

- Begründen Sie, dass alle vier Bedingungen i) – iv) durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades eindeutig erfüllt werden können, und bestimmen Sie die Gleichung dieser Funktion $f$.

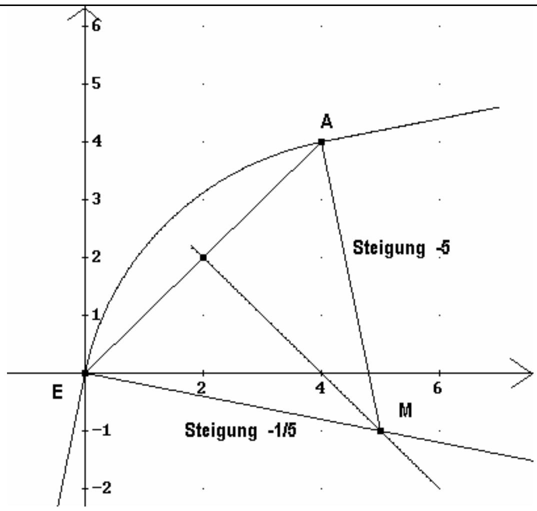
- Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunktes von $f$ und zeigen Sie, dass auf dem Graphen von $f$ zwischen $E$ und $A$ kein Krümmungswechsel stattfindet.

Die Bahn wird wie in b) beschrieben gebaut. Da aber beim Einlaufpunkt $E$ und beim Auslaufpunkt $A$ die zweite Ableitung der Bahnkurve nicht existiert bzw. einen Sprung macht, tritt deshalb leider auch jeweils eine sprunghafte Änderung der Krümmung auf (was den Lauf des Balls stört). Darum soll die Bahn derart verändert werden, dass im Einlaufpunkt $E$ und im Auslaufpunkt A jeweils der Sprung der zweiten Ableitung vermieden wird und trotzdem alle vier Forderungen i) – iv) erfüllt werden.

c) Begründen Sie, dass alle diese Forderungen zusammen durch eine ganzrationale Funktion 5. Grades erfüllt werden können.

Bestimmen Sie die Gleichung dieser Funktion.

**Erwartungshorizont**

| | Lösungsskizze | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| a) | Der Mittelpunkt $M$ des Kreisbogens liegt einerseits auf der Mittelsenkrechten $m$ der Sehne $\overline{EA}$:<br>Sehne $\overline{EA}$: $y = x$.<br>Die Mittelsenkrechte $m$ geht durch (2 \| 2) und hat die Steigung –1. Eingesetzt in die allgemeine Gleichung linearer Funktionen erhält man:<br>$2 = -2 + b \Leftrightarrow b = 4$<br>Damit gilt:<br>$m(x) = -x + 4$<br><br><br>Andererseits liegt $M$ auf dem Lot zur Einlaufstrecke durch $E$ mit der Gleichung<br>$l(x) = -\frac{1}{5}x$.<br>Man berechnet leicht, dass $M$ als Schnittpunkt die Koordinaten (5 \| –1) hat.<br>$-\frac{1}{5}x = -x + 4 \Leftrightarrow \frac{4}{5}x = 4 \Leftrightarrow x = 5$ und $y = -5 + 4 = -1$.<br>Oder man konstruiert die beiden Geraden (mit Lineal und Geodreieck) und liest die Koordinaten des Schnittpunktes ab.<br>Dann hat der Radius $\overline{MA}$ die Steigung $\frac{y_A - y_M}{x_A - x_M} = \frac{4 - (-1)}{4 - 5} = -5$.<br>Die Auslaufstrecke ist als Tangente senkrecht zu diesem Radius. Sie hat also die Steigung $\frac{1}{5}$.<br>Oder man konstruiert (mit Lineal und Geodreieck) das Lot zum Radius $\overline{MA}$ durch den Punkt A und liest die Steigung im Karonetz ab.<br><u>*Korrekturhinweis:*</u> *Wenn der Weg über die geometrischen Konstruktionen gewählt wurde, müssen die einzelnen Schritte explizit beschrieben werden.* | 10 | 15 | |
| b) | • Der Winkel zwischen der Einlauf- und der Auslaufrichtung ergibt sich aus den Winkeln, die die Ein- und Auslaufstrecke jeweils mit der $x$-Achse bilden. Über den Arcustangens der Steigungen erhält man diese Winkel:<br>$\alpha_E = \arctan(5) \approx 78{,}7°$ und $\alpha_A = \arctan(-2) \approx -63{,}4°$.<br>Für den Winkel zwischen Einlauf- und Auslaufrichtung erhält man (über die Winkelsumme im Dreieck) das Maß 37,9°.<br>Oder direkte Berechnung über die Formel:<br>$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{-2-5}{1-10} = \frac{7}{9}$<br>$\alpha = 37{,}87...°$<br>Einlauf- und Auslaufstrecke bilden einen Winkel von ca. 37,9°. | | | |

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| | • Eine ganzrationale Funktion *f* dritten Grades hat die Form:<br>$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$<br>Um die vier Koeffizienten zu bestimmen, werden 4 Bedingungen benötigt. Aus diesen lässt sich ein lineares Gleichungssystem mit vier Gleichungen und vier Unbekannten formulieren:<br>aus i) folgt $f(0) = 0$ und damit sofort $d = 0$.<br>aus iii) folgt $f'(0) = 5$ und damit sofort $c = 5$.<br>aus ii) folgt $f(4) = 4$<br>und zusammen mit den bisherigen Ergebnissen die Gleichung<br>$64a + 16b = -16$<br>aus iv) folgt $f'(4) = -2$<br>und zusammen mit den bisherigen Ergebnissen die Gleichung<br>$48a + 8b = -7$.<br>Dieses Gleichungssystem hat die Lösung $a = \frac{1}{16}$ und $b = -\frac{5}{4}$.<br>Die gesuchte Funktionsgleichung lautet $f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + 5x$.<br><br>• Es gilt $f'(x) = \frac{3}{16}x^2 - \frac{5}{2}x + 5$ mit den Nullstellen<br>$x_{1,2} = \frac{20}{3} \pm \frac{4}{3} \cdot \sqrt{10}$, d.h. $x_1 \approx 10{,}88$ und $x_2 \approx 2{,}45$.<br>Da *f* kubische Funktion mit positivem Leitkoeffizienten ist, liegt damit bei $x_2$ ein Hochpunkt. Es gilt: $f(x_2) = -\frac{100}{27} + \frac{80}{27} \cdot \sqrt{10} \approx 5{,}67$<br>Der Hochpunkt liegt in diesem Bandenbereich und hat die Koordinaten (2,45 \| 5,67).<br>Es ist nun noch zu zeigen, dass der Wendepunkt von *f* nicht im Bandenbereich, also nicht zwischen *x* = 0 und *x* = 4, liegt:<br>Es gilt $f''(x) = \frac{3}{8}x - \frac{5}{2}$ mit der Nullstelle $x_3 = \frac{20}{3} > 6$.<br>Diese Wendestelle liegt in der Tat außerhalb des Bandenbereichs. | 15 | 20 | 5 |
| c) | • Eine ganzrationale Funktion fünften Grades hat die Form:<br>$h(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + g$<br>Um die sechs Koeffizienten zu bestimmen, werden jetzt sechs voneinander unabhängige Bedingungen benötigt. Aus diesen lässt sich ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem mit sechs Gleichungen und sechs Unbekannten formulieren:<br>Es gelten weiterhin die Forderungen i) bis iv).<br>Daraus folgt zunächst wieder: $g = 0$ und $e = 5$.<br>Neu hinzu kommen die Bedingungen, dass bei *E* und *A* keine sprunghafte Änderung der Krümmung auftritt, also | | | |

| | Lösungsskizze | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |

v) $h''(0) = 0$ und vi) $h''(4) = 0$

Aus v) folgt sofort $d = 0$.

Für $a$, $b$ und $c$ ergibt sich dann folgendes lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lll} 1024a + 256b + 64c + 20 = 4 & & I \quad 1024a + 256b + 64c = -16 \\ 1280a + 256b + 48c + \;\; 5 = -2 & \text{bzw.} & II \quad 1280a + 256b + 48c = -7 \\ 1280a + 192b + 24c \qquad = 0 & & III \quad 1280a + 192b + 24c = 0 \end{array}$$

Elimination z.B. von $c$: $\begin{array}{ll} -3 \cdot I + 4 \cdot II : I' & 2048a + 256b = 20 \\ -II + 2 \cdot III : II' & 1280a + 128b = 7 \end{array}$,

danach von $b$: $-I' + 2 \cdot II'$ $512a = -6$, gekürzt $256a = -3$. Daraus folgt

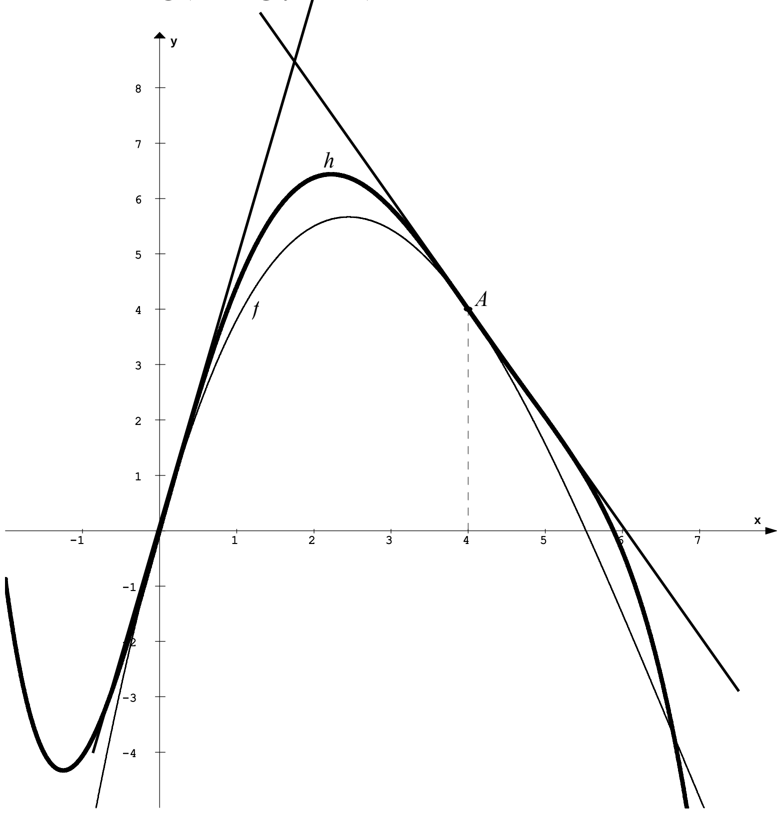
$a = -\frac{3}{256}$. Eingesetzt in $I'$: $256b = 44$ oder $64b = 11$. Damit ist

$b = \frac{11}{64}$. Eingesetzt in $I$: $64c = -48$, also gekürzt $c = -\frac{3}{4}$.

Zusammen mit $e = 5$ (s.o.) lautet die Gleichung der ganzrationalen Funktion

$$h(x) = -\frac{3}{256}x^5 + \frac{11}{64}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + 5x$$

*Grafische Darstellung (nicht gefordert):*




| | | I | II | III |
|---|---|---|---|---|
| | | | 15 | 20 |
| | Insgesamt 100 BWE | 25 | 50 | 25 |