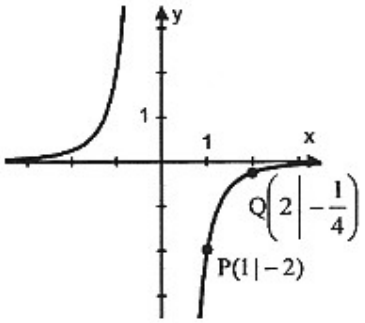
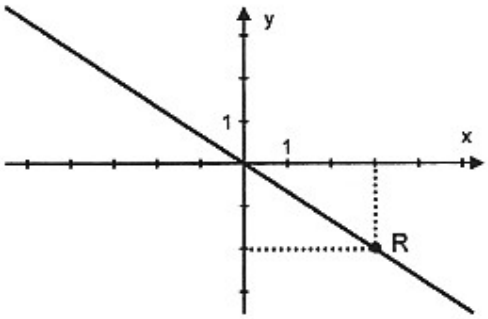
1. Aufgabe: (8 Punkte)

a) Kürze so weit wie möglich $\dfrac{20 \cdot 5^{n+2} + 25 \cdot 5^{n+1}}{(\sqrt[n]{25})^{2n}}$.

b) Die abgebildeten Schaubilder lassen sich durch Funktionen mit Gleichungen der Form $f(x) = a \cdot x^k$, $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ beschreiben.



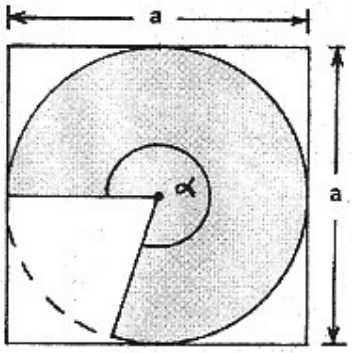


Bestimme die beiden Funktionsgleichungen.

c) In 150 g eines Farbstoffs sind $6 \cdot 10^{23}$ Farbmoleküle enthalten.
Von diesem Farbstoff wird 1 g in den Bodensee gegeben, der ca. $5 \cdot 10^{10}$ m^3 Wasser enthält.
Im Laufe der Zeit verteilt sich der Farbstoff gleichmäßig.
Wie viele Farbmoleküle befinden sich dann in einem Liter Wasser?

2. Aufgabe: (12 Punkte)

Zur Herstellung eines Gefäßes wird aus einem quadratischen Blech der Seitenlänge a = 25 cm ein größtmöglicher Kreisausschnitt mit dem Mittelpunktswinkel $\alpha = 288°$ ausgestanzt (siehe Skizze).



a) Wie viel Prozent des Blechs gehen beim Ausstanzen als Abfall verloren?

b) Der Kreisausschnitt wird nun so gebogen und verlötet, dass ein kegelförmiges Gefäß entsteht.
Berechne das Volumen des Gefäßes.
(Die Dicke des Blechs wird vernachlässigt.)

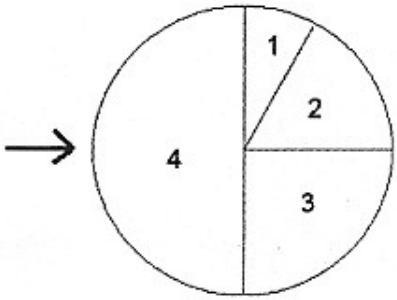
c) Ein kegelförmiges Gefäß mit dem Radius r = 10 cm und der Höhe h = 7,5 cm wird mit Flüssigkeit gefüllt.
Wie hoch steht die Flüssigkeit, wenn die halbe Mantelfläche benetzt ist?

3. Aufgabe: (8 Punkte)

Ein Glücksrad besteht aus vier Kreissektoren, die mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4 versehen sind.

Die Mittelpunktswinkel der verschiedenen Sektoren haben die Weiten 30°, 60°, 90° und 180° (siehe Abbildung).

Nach jeder Drehung gilt diejenige Zahl als gezogen, auf deren Kreissektor der feststehende Pfeil zeigt.



a) Das Glücksrad wird drei Mal gedreht.
Bestimme die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: Die erste gezogene Zahl ist ungerade.

B: Die erste gezogene Zahl ist die 1, die zweite die 2.

C: Es wird keine 3 gezogen.

b) Wie oft müsste man das Glücksrad drehen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 97 % mindestens einmal die Zahl 4 gezogen wird?

4. Aufgabe: (8 Punkte)

In einer Fischzucht werden Lachse aufgezogen.

a) Zu Beginn der Beobachtung betrug das Gesamtgewicht der vorhandenen Lachse 45 000 kg.
Ohne Abfischen würde sich dieses Gewicht alle 6 Monate verdoppeln.
Stelle ein mögliches Wachstumsgesetz auf.
Nach welcher Zeit wären demnach 100 000 kg vorhanden?
Wie viel Lachs muss täglich abgefischt werden, damit der Anfangsbestand von 45 000 kg konstant bleibt?

b) Das Gewicht eines einzelnen Lachses entwickelt sich nach folgendem Gesetz:

$$G(t+1) = G(t) + 0{,}016 \cdot G(t) \cdot (S - G(t));$$

t in Jahren seit Beobachtungsbeginn, G(t) in kg.

Zu Beginn der Beobachtung wiegt ein Lachs 7,2 kg, ein Jahr später 10,0 kg.
Welches Gewicht kann dieser Lachs erreichen?
Nach wie vielen Jahren wird dieser Lachs mehr als 17 kg wiegen?