

Vergleichsarbeit 10
Abschlussprüfung 10

(gymnasiales Niveau für die Gesamtschule)

2008

Mathematik (A)

Gymnasium/Gesamtschule

Hinweise und Lösungen

1. Wahlaufgaben / Zeiten / Hilfsmittel

a) Wahlaufgaben

Es gibt zwei Wahlaufgaben aus dem Bereich funktionale Zusammenhänge („Leihfahrräder“ und „Bakterienwachstum“), von denen eine vorher ausgewählt werden muss. Dies geschieht für alle Schülerinnen und Schüler eines Klassenverbandes einheitlich durch die beteiligten Lehrerinnen und Lehrer oder durch die Fachkonferenz.

b) Bearbeitungszeiten und Hilfsmittel

Für den Teil 1 sind 30 Minuten vorgesehen. Es werden Geodreieck und Bleistift benötigt. Taschenrechner und Formelsammlung sind nicht zugelassen.

Der Teil 2 umfasst eine Bearbeitungszeit von maximal 60 Minuten. Taschenrechner sind zugelassen. Es darf die in der Klasse verwendete Formelsammlung (auch eine selbst erstellte) benutzt werden.

Zwischen dem Teil 1 und Teil 2 sollte eine Pause liegen.

Die Schülerinnen und Schüler erhalten für Teil 2 kariertes Papier von der Schule. Der Teil 1 wird auf den **Aufgabenblättern** bearbeitet. Für zusätzliche Rechnungen erhalten sie kariertes Papier von der Schule.

Die Schülerinnen und Schüler müssen **alle** Aufgabenblätter mit ihrer Arbeit abgeben.

2. Punktbewertung

Das Lösungsblatt enthält teilweise alternative Vorschläge für Lösungswege. Hiervon abweichende Lösungswege, sofern sie mathematisch korrekt sind, werden entsprechend bewertet. Teilweise korrekte Lösungen sind anteilig zu bewerten. Es werden nur ganze Punkte gegeben.

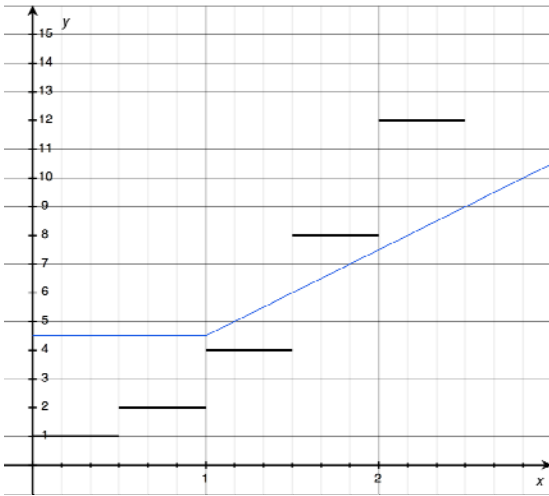
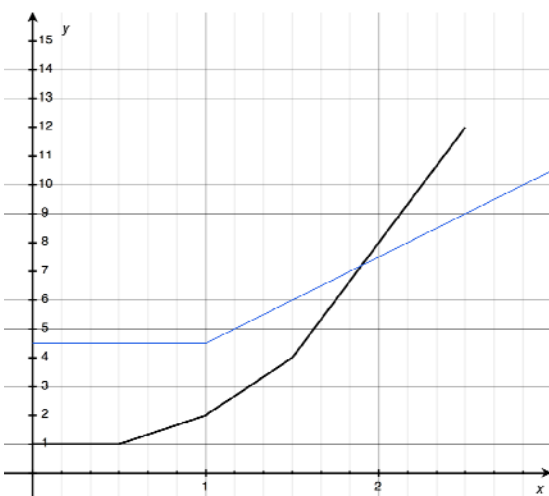
Notenschlüssel

Note	Punkte
1	65 – 75
2	54 – 64
3	42 – 53
4	31 – 41
5	15 – 30
6	0 – 14

Teil 1		Punkte									
1	$\frac{25}{100}x$ $\frac{1}{4}x$	2									
2a	$h = \frac{V}{ab} - a^3$	2									
2b	$r = \sqrt{\frac{V}{\pi \cdot h}}$	3									
3	$(3,3 + 7,3) \cdot 4 = 42,4$ $0,65 \cdot 0,4 = 0,26$ $\frac{345}{50} = 6,9$ $60,9 : 29 = 2,1$	4									
4	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 25%;">Scheitelpunkt</td> <td style="width: 45%;">Scheitelform</td> <td style="width: 30%;">Parabel</td> </tr> <tr> <td>S (3 -4)</td> <td>$y = (x - 3)^2 - 4$</td> <td>D</td> </tr> <tr> <td>S (5 3)</td> <td>$y = (x - 5)^2 + 3$</td> <td>C</td> </tr> </table>	Scheitelpunkt	Scheitelform	Parabel	S (3 -4)	$y = (x - 3)^2 - 4$	D	S (5 3)	$y = (x - 5)^2 + 3$	C	4
Scheitelpunkt	Scheitelform	Parabel									
S (3 -4)	$y = (x - 3)^2 - 4$	D									
S (5 3)	$y = (x - 5)^2 + 3$	C									
5	$\frac{x}{2} - 3x = 4$ c $\frac{3x}{4} = 2x$ d $(x-3)4 = 3$ a $3x + 2x = 4$ b $3x = 4 + 2x$ kein Text	4									
6	$984m = x + 5x + 14,5x$	1									
7	Schwarzafrika Ostasien (Lateinamerika) 33% 45% 22%	5									
Teil 1 gesamt		25									

Teil 2		Punkte
1	Sandhaufen	Gesamt 12
a)	$2 \cdot \pi \cdot r = U$ $r = \frac{U}{2 \cdot \pi}$ $= \frac{50\text{m}}{2 \cdot \pi}$ $\approx 8\text{m}$ $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$ $= \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 5}{3} \text{m}^3$ $\approx 335\text{m}^3$	3
b)	<p>nennt man den Schüttwinkel α, dann gilt</p> $\tan(\alpha) = \frac{h}{r}$ $\tan(\alpha) = \frac{10}{16}$ $\tan(\alpha) = 0,625$ $\Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(0,625) \approx 32^\circ$	3
c)	<p>Die Behauptung ist falsch. Ein Sandhaufen mit doppelter Höhe hat eine mehr als doppelt so große Grundfläche.</p> <p>Wegen des immer gleichen Schüttwinkels sind h und r proportional zueinander ($\tan(\alpha) = \frac{h}{r} = \text{konstant}$). D.h. bei doppelter Höhe hat der Sandhaufen auch den doppelten Radius. Dieser geht aber im Quadrat in die Grundfläche ein, so dass der doppelt so hohe Sandhaufen die vierfache Grundfläche besitzt.</p> <p>Begründungen, die sich auf die beiden Sandhaufen aus a) und b) beziehen, sind ebenfalls zulässig.</p>	4

2	Eiskunstlauf	Gesamt	11
a)	<p>Tatjana: Summe der Gesamtnote: $\Sigma_{\text{Ges}} = \Sigma_A + \Sigma_B = 33 + 33,6 = 66,6$</p> <p>Katharina: Summe der Gesamtnote: $\Sigma_{\text{Ges}} = \Sigma_A + \Sigma_B = 32,8 + 33,6 = 66,4$</p> <p><u>Antwort:</u> Tatjana hat gewonnen.</p>		2
b)	<p>Katharina: Summe der Gesamtnote: $\Sigma_{\text{Ges}} = 66,4$ Differenz der Gesamtnoten der Läufer ist 0,2. Um zu gewinnen muss Eisläufer 2 mindestens 0,3 Punkte mehr erhalten d.h. $5,3 + 0,3 = 5,6$.</p> <p><u>Antwort:</u> Die B-Note von 5,6 hätte gereicht um zu gewinnen.</p>		4
c)	<p>Tatjana: Summe der Gesamtnote: $\Sigma_A = \text{Anzahl der Kampfrichter nach Abzug} \cdot \text{Mittelwert} = 4 \cdot 5,475 = 21,9$ $\Sigma_B = \text{Anzahl der Kampfrichter nach Abzug} \cdot \text{Mittelwert} = 4 \cdot 5,6 = 22,4$ $\Sigma_{\text{Ges}} = \Sigma_A + \Sigma_B = 21,9 + 22,4 = 44,3$</p> <p>Katharina: Summe der Gesamtnote: $\Sigma_{\text{Ges}} = \Sigma_A + \Sigma_B = 22,1 + 22,3 = 44,4$</p> <p><u>Antwort:</u> Katharina hat nun gewonnen.</p>		5
3	Ampel	Gesamt	12
a)	$p(3 \text{ mal grün}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 12,5\%$		3
b)	$p(\text{rrg} \vee \text{rgr} \vee \text{grr}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = 37,5\%$ <p>Alternative: mit Baumdiagramm</p>		3
c)	$p(\text{rot}) = \frac{44}{59} \approx 75\%$		2
d)	<p>Da jetzt für die dritte Ampel gilt: $p(\text{grün}) \approx 25\% = \frac{1}{4}$, ist die Wahrscheinlichkeit für dreimal grün nur noch $p(3 \text{ mal grün}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} = 6,25\%$.</p> <p>Sie ist also nur noch halb so groß.</p> <p>Qualitative Begründungen sind ebenfalls zulässig.</p>		4

4	Leihfahrräder	Gesamt	15
a)	<p>Kosten = 1,00 € + 1,00 € + 2,00 € + 4,00 € = 8,00 €</p>		4
b)	<p>Graph „B“ gibt den Verlauf der Kosten für 2,5 Stunden korrekt wieder. Begründung: Die Kosten ändern sich alle halbe Stunde sprunghaft und bleiben dann für eine halbe Stunde konstant (horizontaler Verlauf der Graphen).</p>		5
c)	<p>Begründung mit grafischer Lösung:</p> <p>Im Fall von Graph „B“:</p>  <p>Lösung: Ab 1,5 Stunden ist das Angebot des Fahrradhändlers günstiger.</p> <p>Im Fall von Graph „A“:</p>  <p>Lösung: Ab ca. 1h 55min ist das Angebot des Fahrradhändlers günstiger.</p>		

	<p>Rechnerische Begründung:</p> <p>Nach einer Stunde kostet beim Fahrradhändler jede halbe Stunde zusätzlich $30 \cdot 0,05 \text{ €} = 1,5 \text{ €}$ Ein Vergleich ergibt:</p> <table border="1" data-bbox="397 423 1287 555"> <tr> <td></td> <td>1</td> <td>1,5</td> <td>2</td> <td>2,5</td> </tr> <tr> <td></td> <td>4,5 €</td> <td>6 €</td> <td>7,5 €</td> <td>9 €</td> </tr> <tr> <td></td> <td>2 €</td> <td>4 €</td> <td>8 €</td> <td>12 €</td> </tr> </table> <p>Hiernach ist der Tarif der Leihfahräder bis 1,5h günstiger, darüber ist das Angebot des Fahrradhändlers günstiger.</p>		1	1,5	2	2,5		4,5 €	6 €	7,5 €	9 €		2 €	4 €	8 €	12 €	6	
	1	1,5	2	2,5														
	4,5 €	6 €	7,5 €	9 €														
	2 €	4 €	8 €	12 €														
4	Bakterienwachstum	Gesamt 15																
a)	<p>Schüler A berechnet die Abnahme angemessen. Er verdoppelt die Anzahl, wie im Text vorgegeben, alle 2,5 Stunden. (Der andere Schüler berechnet ein lineares Wachstum. Er addiert alle 2,5 Stunden 600 Erreger.)</p>	1 3																
b)	<table border="1" data-bbox="520 960 1031 1296"> <thead> <tr> <th colspan="2">Schüler A</th> </tr> <tr> <th>Uhrzeit</th> <th>Anzahl der Erreger</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>4:00</td> <td>200</td> </tr> <tr> <td>9:00</td> <td>800</td> </tr> <tr> <td>14:00</td> <td>3200</td> </tr> <tr> <td>19:00</td> <td>12800</td> </tr> <tr> <td>24:00</td> <td>51200</td> </tr> <tr> <td>Dienstag 5:00</td> <td>204800</td> </tr> </tbody> </table>	Schüler A		Uhrzeit	Anzahl der Erreger	4:00	200	9:00	800	14:00	3200	19:00	12800	24:00	51200	Dienstag 5:00	204800	3
Schüler A																		
Uhrzeit	Anzahl der Erreger																	
4:00	200																	
9:00	800																	
14:00	3200																	
19:00	12800																	
24:00	51200																	
Dienstag 5:00	204800																	
c)	<p>(3) $f(x) = 200 \cdot 2^{2x}$ beschreibt das Wachstum bei 37°C.</p>	2																
d)	<p>Alternative I: 10:00 Uhr entspricht $x = 6$ und 11 Uhr entspricht $x = 7$. Also ergeben sich durch einsetzen: $f(6) = 200 \cdot 2^{2 \cdot 6} = 819200$ und $f(7) = 200 \cdot 2^{2 \cdot 7} = 3276800$ Die absolute Zunahme beträgt also: $3276800 - 819200 = 2457600$. 2457600 von 819200 entsprechen einer Zunahme von 300 %</p>	3																
	<p>Alternative II: Fortsetzen der Tabelle</p>	3																
	<p>Alternative III: Da sich die Erreger in einer Stunde zweimal verdoppeln, werden sie von 10:00 bis 11:00 Uhr vervierfacht. Das entspricht einer Zunahme von 300 %.</p>																	
Teil 2 gesamt		50																