LAND BRANDENBURG

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport

Zentrale Klausur unter Abiturbedingungen **2004**

Mathematik

Grundkurs

Aufgaben **für Schülerinnen und Schüler**

Thema/Inhalt:	Analytische Geometrie und Algebra
Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache, nicht programmierbarer und nicht grafikfähiger Taschenrechner, an der Schule eingeführtes Tafelwerk/ Formelsammlung
Bearbeitungszeit:	3 Zeitstunden

Aufgabe 1

Gegeben sind die Punkte $A(-7|-12|14)$, $F(1|-8|6)$ und $S(-13|24|8)$,

die Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $r \in R$

und die Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix}$; $s,t \in R$.

1.1 Untersuchen Sie die Lage des Punktes S bezüglich der Geraden h.

Ermitteln Sie den Abstand des Punktes A von der Geraden h.

Zeigen Sie, dass das Dreieck AFS rechtwinklig ist und berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks AFS.

1.2 Die Ebene H enthält die Gerade h und den Punkt S.

Entwickeln Sie je eine Gleichung der Ebene H in Parameter- und in Koordinatenform (parameterfrei).

Begründen Sie, warum die Ebenen E und H nicht parallel zueinander verlaufen, berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels α und ermitteln Sie eine Parametergleichung der Schnittgeraden von E und H.

1.3 Die zur Ebene mit der Gleichung $2x + y - 2z + 18 = 0$ parallele Gerade g verläuft durch den Punkt A und schneidet die x-Achse.

Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Geraden.

Aufgabe 2

Gegeben sind die Punkte $A(1|6|4)$, $B(-1|4|-2)$ und $C(4|-2|2)$.

2.1 Zeichnen Sie das Dreieck *ABC* in ein räumliches Koordinatensystem.

Weisen Sie nach, dass das Dreieck *ABC* gleichschenklig und spitzwinklig ist.

Ermitteln Sie eine Parametergleichung für die Ebene *E*, die durch die Punkte *A*, *B* und *C* eindeutig festgelegt wird.

Zeigen Sie, dass die Ebene *E* auch durch die Gleichung $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=0$

beschrieben werden kann.

2.2 Begründen Sie, dass die Ebene *F* mit der Gleichung $-4x-2y+2z=16$ parallel zur Ebene *E* verläuft und berechnen Sie den Abstand der beiden Ebenen.

Der Punkt $R_p(p\,|\,4\,|\,1)$ und der in der Ebene *F* liegende Punkt $Q(-2\,|\,1\,|\,5)$ seien Anfangs- und Endpunkt einer Strecke.

Ermitteln Sie alle reellen Zahlen *p*, für die diese Strecke die Länge 5 LE hat.

2.3 Weisen Sie nach, dass der Punkt $P(-4\,|\,12\,|\,0)$ Bildpunkt des Punktes *C* bei dessen Spiegelung an der durch die Punkte *A* und *B* verlaufenden Geraden *g* ist.

Prüfen Sie die folgende Aussage auf ihren Wahrheitsgehalt:

„Die Punkte P, C und je ein Spurpunkt von *g* in den Koordinatenebenen sind Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks."

Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aufgabe 3

Gegeben sind die Punkte $A(3\,|\,1\,|\,0)$, $B(1\,|\,7\,|\,3)$, $C(-5\,|\,4\,|\,5)$, $D(-3\,|\,-2\,|\,2)$ und $S(2\,|\,3\,|\,3{,}5)$ sowie die Ebenenschar $E_a: a\,x - 2\,y + 2\,a\,z = 7;\ a \in R$.

3.1 Weisen Sie nach, dass die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ gleich lang sind und auf parallelen, jedoch nicht identischen Geraden liegen.

Beschreiben Sie eine Möglichkeit, wie man nachweisen kann, dass das Parallelogramm ABCD sogar ein Rechteck ist.
Bestätigen Sie durch Anwendung des von Ihnen vorgeschlagenen Lösungsweges, dass das Viereck *ABCD* ein Rechteck ist.

Das Rechteck *ABCD* liegt in einer Ebene der Schar E_a.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Scharebene und weisen Sie nach, dass der Punkt *S* nicht in dieser Ebene liegt.

3.2 Der Punkt *S* ist Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche *ABCD*.
Weisen Sie nach, dass die Pyramide eine Höhe von 2 LE hat, und berechnen Sie ihr Volumen.
Prüfen Sie, ob der Körper *ABCDS* eine gerade Pyramide darstellt.

Ermitteln Sie die Größe des Winkels α, den die Pyramidenkanten $\overline{AB}$ und $\overline{AS}$ einschließen.

3.3 Das Viereck *ABCD* soll Grundfläche von Prismen sein, deren Volumen genau sechsmal so groß ist wie das der Pyramide *ABCDS*.
Bestimmen Sie je eine Gleichung für die Ebenen, in denen mögliche Deckflächen solcher Prismen liegen können.

LAND BRANDENBURG

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport

Zentrale Klausur unter Abiturbedingungen **2004**

Mathematik

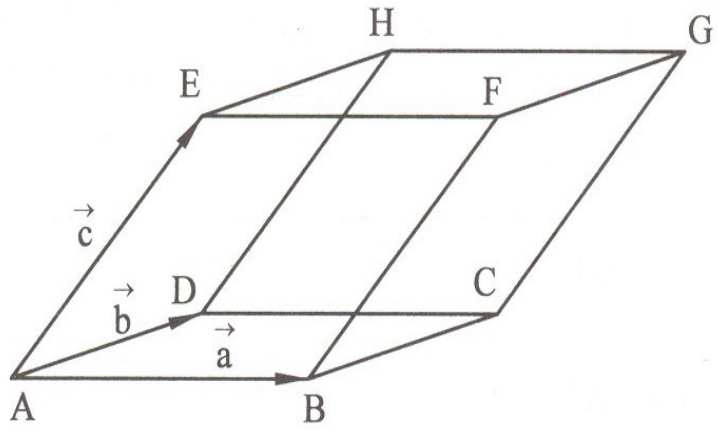
Grundkurs

Aufgaben **für Schülerinnen und Schüler**

Thema/Inhalt:	Analytische Geometrie
Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache, nicht programmierbarer und nicht grafikfähiger Taschenrechner, an der Schule eingeführtes Tafelwerk/ Formelsammlung
Bearbeitungszeit:	3 Zeitstunden

Aufgabe 1

In einem Prisma *ABCDEFGH* sei $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$.



1.1 Geben Sie alle möglichen Pfeile an, die im Prisma den Vektor $\vec{b}$ repräsentieren.

Begründen Sie, warum der Pfeil $\overrightarrow{BF}$ nicht zum Vektor $\vec{b}$ gehört.

Entscheiden Sie, ob die Vektoren $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{HC}$ linear abhängig oder linear unabhängig sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

1.2 Geben Sie einen Vektor (Pfeil) an, der die Summe aus $\vec{a}$ und $\vec{b}$ repräsentiert.

Überprüfen Sie, ob $\overrightarrow{DB}$ ein Repräsentant für die Differenz $\vec{b} - \vec{a}$ ist. Begründen Sie das Ergebnis Ihrer Überprüfung.

Stellen Sie $\overrightarrow{AG}$ und $\overrightarrow{CE}$ als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

Im Folgenden sind die Eckpunkte der Grundfläche *ABCD* des Prismas in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem gegeben:

$A(-1|-4|-13)$, $B(-1|-1|2)$, $C(3|6|15)$, $D(3|3|0)$.

1.3 Weisen Sie nach, dass es sich bei dem Viereck *ABCD* um eine Raute (Rhombus) handelt.

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Raute *ABCD*.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes von *ABCD*.

1.4 Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{AB}$.

Ermitteln Sie die Koordinate x_E des Punktes $E(x_E|-3|-5)$ so, dass im Prisma *ABCDEFGH* alle Seiten gleich lang sind.

Aufgabe 2

Gegeben sind die Punkte $A(-7\,|\,6\,|\,0)$, $B(1\,|\,3\,|\,2)$, $C(2\,|\,0\,|\,6)$ und $F\left(-\frac{1}{2}\,\middle|\,\frac{9}{4}\,\middle|\,\frac{7}{2}\right)$.

2.1 Ermitteln Sie die Seitenlängen des Dreiecks *ABC* und zeigen Sie, dass dieses Dreieck stumpfwinklig ist.

2.2 Stellen Sie den Vektor $\overrightarrow{AF}$ als Linearkombination der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ dar. Weisen Sie nach, dass der Punkt *F* ein innerer Punkt des Dreiecks *ABC* ist.

2.3 *L* sei der Fußpunkt des Lotes von *B* auf die Seite AC.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes *L* und die Koordinaten des Punktes *D*, der das Dreieck *ABC* zu einem Drachenviereck ergänzt.

2.4 *Q* sei ein Quader mit der Höhe $h = 5\,LE$, dessen Grundfläche A_G in der x-y-Ebene liegt. Der Koordinatenursprung und *A* sind die diagonal gegenüberliegenden Eckpunkte der Grundfläche A_G dieses Quaders *Q*. A_G sei ferner die Grundfläche von Pyramiden P, die das gleiche Volumen wie der Quader *Q* besitzen.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte *S*, die als Spitzen aller geraden Pyramiden P infrage kommen.

Aufgabe 3

Gegeben sind die Punkte $U(6|4|-1)$, $V(2|0|3)$ und die Gerade g mit

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad (r \in R).$$

3.1 Stellen Sie eine Gleichung der Geraden g_{UV} auf, die durch die Punkte U und V verläuft.

Geben Sie die Koordinaten zweier von U und V verschiedener Punkte an, die auf der Geraden g_{UV} liegen.

Untersuchen Sie, ob $\mathrm{R}\left(-\frac{1}{4}\middle|-\frac{9}{4}\middle|-\frac{1}{2}\right)$ auf der Geraden g liegt.

Geben Sie eine Gleichung derjenigen Geraden an, die den Punkt V enthält und deren Richtungsvektor ein Vielfaches des Richtungsvektors der Geraden g ist.

3.2 Untersuchen Sie die Lagebeziehung zwischen den Geraden g und k mit $\mathrm{k}: \vec{\mathrm{x}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix} + \mathrm{s} \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $(s \in R)$. Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes S dieser beiden Geraden.

Stellen Sie eine Gleichung einer Geraden h auf, die parallel zu g verläuft und von ihr verschieden ist.

Welche Lage hat die Gerade f mit $f: \vec{x} = \begin{pmatrix} 17 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -12 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}; (t \in R)$ zur Geraden g?

Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Erläutern Sie, unter welchen Bedingungen zwei Geraden als zueinander windschief bezeichnet werden.

3.3 Berechnen Sie die Koordinaten desjenigen Punktes T der Geraden g, der drei gleiche Koordinaten hat.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes W so, dass die Punkte U, V und W keine Eckpunkte eines Dreiecks sind, die y-Koordinate halb so groß wie die x-Koordinate, aber doppelt so groß wie die z-Koordinate ist.

LAND BRANDENBURG

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport

Zentrale Klausur unter Abiturbedingungen **2004**

Mathematik

Grundkurs

Aufgaben **für Schülerinnen und Schüler**

Thema/Inhalt:	Stochastik
Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache, nicht programmierbarer und nicht grafikfähiger Taschenrechner, an der Schule eingeführtes Tafelwerk/ Formelsammlung
Bearbeitungszeit:	3 Zeitstunden

Aufgabe 1

1.1 In einer Urne U_1 befinden sich 6 rote und 4 weiße Kugeln.

1.1.1 Aus U_1 werden 3 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: Alle Kugeln sind rot.

B: Mindestens eine Kugel ist rot.

C: Die zweite gezogene Kugel ist weiß.

1.1.2 Aus U_1 werden 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

Berechnen Sie nunmehr die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und B.

1.1.3 Jemand vermutet, dass das Eintreten des Ereignisses D: „Mindestens zwei Kugeln sind rot." eine größere Chance besitzt, wenn 3 Kugeln aus der Urne U_1 mit Zurücklegen anstelle ohne Zurücklegen gezogen werden.

Überprüfen Sie diese Vermutung.

1.1.4 Aus U_1 wird eine Kugel entnommen, nicht zurückgelegt und ihre Farbe festgestellt.

Anschließend werden zwei Kugeln der anderen Farbe in diese Urne gelegt, die Kugeln gemischt, und es wird erneut eine Kugel gezogen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

E: Die zweite Kugel ist weiß.

F: Beide Kugeln sind verschiedenfarbig.

1.2 In einer Urne U_2 befinden sich 6 rote und eine unbekannte Anzahl weißer Kugeln.

Berechnen Sie die möglichen Werte für die Anzahl der weißen Kugeln in U_2 für den Fall, dass beim zweimaligen Ziehen ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis G: „Beide Kugeln haben verschiedene Farben." $\frac{6}{11}$ beträgt.

Aufgabe 2

2.1 Ein Sportverein möchte für seine jüngsten Mitglieder ein Kinderfest organisieren.

2.1.1 In dessen Vorbereitung soll durch Losentscheid ein Organisationsausschuss bestehend aus fünf Mitgliedern gebildet werden, für den sich sechs Muttis und fünf Vatis, darunter der Vereinsvorsitzende, bewerben.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: Es werden genau zwei Muttis ausgewählt.
B: Der Vereinsvorsitzende wird ausgewählt.
C: Es werden mindestens zwei Vatis ausgewählt.

2.1.2 Die im letzten Jahr vom Sportverein erkämpften sieben Pokale, vier verschiedene Gold- und drei verschiedene Silberpokale, sollen auf einem Wandregal des Vereinszimmers in einer Reihe aufgestellt werden.

Berechnen Sie die Anzahl der möglichen Anordnungen der Pokale, wenn

(1) keine Bedingungen für deren Anordnung zu beachten sind,
(2) bereits vorher die beiden Randplätze belegt wurden,
(3) sich in der Reihe Gold- und Silberpokale stets abwechseln sollen.

2.2 Während des Kinderfestes sollen zwei Glücksräder G_1 und G_2 zum Einsatz kommen.

Das Glücksrad G_1 ist in drei gleich große Sektoren mit den Farben rot, weiß und gelb unterteilt. Das Glücksrad G_2 enthält einen weißen und einen gelben Sektor mit

P(gelb) = p $(\frac{1}{2} < p < 1)$.

2.2.1 Das Glücksrad G_1 werde dreimal gedreht.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

D: Es tritt höchstens zweimal gelb auf.
E: Es treten keine gleichen Farben auf.
F: Es tritt genau zweimal weiß auf.

2.2.2 Das Glücksrad G_2 werde zweimal gedreht.

(1) Es sei P(gelb) = $\frac{3}{4}$.

Geben Sie die Größe des weißen Sektorenwinkels α an.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis H: „Es erscheint stets der gleiche Sektor."

(2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit P(gelb) = p für den Fall, dass die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $P(H) = \frac{2}{3}$ beträgt.

Aufgabe 3

Ein Skatspiel besteht aus 32 Karten in den „Farben“ Karo, Herz, Pik und Kreuz, wobei die acht Karten jeder Farbe die Bilder As, König, Dame, Bube, Zehn, Neun, Acht und Sieben tragen.

3.1 Aus dem Skatspiel wird zufällig eine Karte gezogen. Man betrachte folgende Ereignisse:

A: Die gezogene Karte ist ein Bube. <Wert der Karte>

B: Die gezogene Karte ist eine Pikkarte. <Farbe der Karte>

3.1.1 Beschreiben Sie die Ereignisse $A \cap B$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$ *und* $\overline{A} \cap \overline{B}$ in Worten. Welche Eigenschaft haben diese vier Ereignisse, wenn man ihre Vereinigung untersucht?

3.1.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B, $A \cap B$ und $A \cup B$.

3.2 Ermitteln Sie, wie oft man aus einem gut gemischten Skatspiel eine Karte <u>ohne</u> Zurücklegen ziehen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,95 mindestens eine Pikkarte zu bekommen.

3.3 Aus einem Skatspiel werden zwei Karten <u>ohne</u> Zurücklegen gezogen. Die Zufallsgröße Z gebe die Anzahl der gezogenen Buben an.

3.3.1 Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für Z auf.

3.3.2 Das Ziehen von zwei aus 32 Skatkarten wird als Glücksspiel derart genutzt, dass bei einem Einsatz von 1 € die Auszahlung nach der Zufallsgröße $X = 4Z + a$ erfolgt.

Ermitteln Sie einen Wert von a, für den das Spiel fair ist, d.h., es ist der Einsatz gleich der zu erwartenden Auszahlung nach der Zufallsgröße X.