Hinweise für Schüler

Aufgabenauswahl:

Die Arbeit besteht aus einem Pflichtteil und einem Wahlteil.

Von den Pflichtaufgaben **P1** und **P2** ist eine auszuwählen und vollständig zu bearbeiten.

Von den vier Wahlaufgaben **W1** bis **W4** sind zwei auszuwählen und zu lösen.

Wurde im Pflichtteil die Aufgabe **P2** gewählt, muss im Wahlteil mindestens eine der Aufgaben **W3 oder W4** gewählt werden.
Bei Bearbeitung von mehr als zwei Wahlaufgaben werden die beiden Aufgaben gewertet, die zusammen die größte Punktzahl ergeben.

Bearbeitungszeit:

Die Arbeitszeit beträgt 210 Minuten zuzüglich 30 Minuten für die Aufgabenauswahl.

Hilfsmittel:

- das an der Schule eingeführte Tafelwerk
- der an der Schule zugelassene Taschenrechner ohne CAS
- Zeichengeräte
- Duden (Die deutsche Rechtschreibung)

Hinweis:

Die Lösungen sind in einer sprachlich korrekten, mathematisch exakten und äußerlich einwandfreien Form darzustellen.

In der Niederschrift müssen die Lösungswege nachvollziehbar sein.

Entwürfe können ergänzend zur Bewertung nur herangezogen werden, wenn sie zusammenhängend konzipiert sind und die Reinschrift etwa Dreiviertel des zu erreichenden Gesamtumfanges beinhaltet.

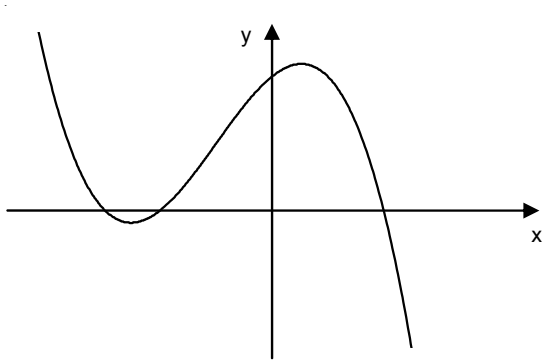
Sonstiges:

Maximal zwei Bewertungseinheiten können zusätzlich vergeben werden bei

- guter Notation und Darstellung,
- eleganter, kreativer und rationeller Lösung,
- vollständiger Lösung einer dritten Wahlaufgabe.

Maximal zwei Bewertungseinheiten können bei mehrfachen Verstößen gegen mathematische Korrektheit und äußere Form abgezogen werden.

P1 Analysis, analytische Geometrie, Stochastik



1.1 Eine Funktion f ist gegeben durch die Gleichung

$$f(x) = -\frac{1}{2}\left(x^2 - 4\right)\left(x + 3\right) \; ; \quad x \in R.$$

Der Graph der Funktion f ist K (siehe Abbildung).

1.1.1 Berechnen Sie für den Graphen K die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und die der lokalen Extrempunkte.
(Runden Sie die Ergebnisse auf zwei Dezimalstellen.)

1.1.2 Gegeben ist weiterhin eine quadratische Funktion g(x); $x \in R$, deren Graph G durch die Punkte A(-2/0), B(2/0) und C(0/-4) verläuft.
Bestimmen Sie die Gleichung für g(x).

1.1.3 Der Graph K und der Graph der Funktion $h(x) = x^2 - 4$ schließen im Intervall $-2 \le x \le 2$ eine Fläche F vollständig ein.
Berechnen Sie deren Inhalt.

1.2 In einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(1/1/1), B(2/5/2), C(1/4/-2) und D(0/0/-3) gegeben.

1.2.1 Weisen Sie nach, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ parallel zueinander sind.
Berechnen Sie den Winkel $\alpha = \angle BAD$.

1.2.2 Durch die Punkte A und C wird eine Gerade h bestimmt.
Geben Sie eine Gleichung für h an und zeigen Sie, dass der Punkt B nicht auf dieser Geraden liegt.

1.2.3 Die Gerade h durchstößt die x-y-Koordinatenebene in einem Punkt P.
Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes.

1.3. In Mecklenburg-Vorpommern müssen alle Schülerinnen und Schüler an Gymnasien das Fach Mathematik bis zum Abitur belegen, und zwar als Leistungskurs oder als Grundkurs.
Erfahrungen haben ergeben, dass sich ca. 30 % der Grundkursschüler freiwillig für ein schriftliches Abitur im Fach Mathematik entscheiden, 10 % sind auf Grund ihrer Kurswahl dazu verpflichtet. Schüler, die einen Leistungskurs im Fach Mathematik gewählt haben, müssen am schriftlichen Abitur teilnehmen.
In einem Gymnasium belegen 56 % der Abiturienten einen Grundkurs im Fach Mathematik.

1.3.1 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig befragter Abiturient an der schriftlichen Prüfung im Fach Mathematik teilnimmt.

1.3.2 In der Prüfung müssen neben der Pflichtaufgabe zwei der vier Wahlaufgaben gelöst werden. Eine der Wahlaufgaben ist aus dem Stoffgebiet Stochastik.
Jemand wählt willkürlich zwei von den Wahlaufgaben aus.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Aufgabe zur Stochastik in dieser Auswahl zu finden?

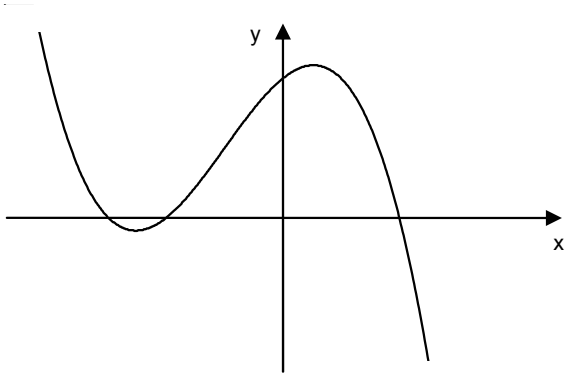
1.3.3 Für die Niederschrift benötigen Schüler aus Grundkursen durchschnittlich 10 Blätter kariertes Papier, Schüler aus Leistungskursen brauchen mindestens 18 Blätter. Die Schule hat 5 Packungen Papier zu je 500 Blatt vorrätig. Reicht dieser Vorrat aus, um den Papierbedarf für die 256 Abiturienten dieses Prüfungsjahrganges für das Fach Mathematik zu decken?

P2 Analysis

Eine Funktion f ist gegeben durch die Gleichung

$$f(x) = -\frac{1}{2}\left(x^2 - 4\right)(x+3), \quad x \in R.$$

Der Graph der Funktion f ist K (siehe Abbildung).



2.1 Berechnen Sie für den Graphen K die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und die der lokalen Extrempunkte.
(Runden Sie die Ergebnisse auf zwei Dezimalstellen.)

2.2 Gegeben ist weiterhin eine quadratische Funktion g(x); $x \in R$, deren Graph G durch die Punkte A(-2/0), B(2/0) und C(0/-4) verläuft.
Bestimmen Sie eine Gleichung für g(x).

2.3 Ermitteln Sie die Gleichungen der Tangenten an G in den Punkten A und B.
Bestimmen Sie den Schnittwinkel der Tangenten.
Beide Tangenten schneiden die y-Achse in einem Punkt D.
Begründen Sie, dass A, B und D Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks sind.

2.4 Der Graph K und der Graph der Funktion $h(x) = x^2 - 4$ schließen im Intervall $-2 \le x \le 2$ eine Fläche F vollständig ein.
Berechnen Sie deren Inhalt.

2.5 Die y-Achse teilt die Fläche F in zwei Teilflächen F_1 und F_2.
In welchem Verhältnis stehen die Inhalte dieser beiden Teilflächen zueinander?

2.6 Eine Parallele zur y-Achse mit der Gleichung $x = u$; $0 < u < 2$, schneidet K im Punkt P und G im Punkt Q.
Für welchen Wert von u ist der Abstand $\overline{PQ}$ am größten?
Bestimmen Sie diesen Abstand.

W1 Analysis

Die Abkühlung eines in einer kälteren Umgebung befindlichen Körpers geschieht nach dem Newtonschen Abkühlungsgesetz

$$\vartheta = f(t) = \vartheta_u + (\vartheta_o - \vartheta_u) \cdot e^{-kt} \text{ mit } t \geq 0;\ t \in R.$$

t : Zeit in Stunden (h),
ϑ : Temperatur (in °C) des Körpers nach t Stunden,
ϑ_o : Temperatur (in °C) des Körpers zum Zeitpunkt t = 0,
ϑ_u : Umgebungstemperatur (in °C),
k : von Material und Oberflächenbeschaffenheit abhängige Konstante $\left(\text{in } \frac{1}{h}\right)$.

Der Graph der Funktion f(t) sei G.

1.1 Die Anfangstemperatur des Inhalts einer Thermoskanne betrage 95 °C, die Umgebungstemperatur sei 5 °C und die Konstante k betrage $0{,}05\ \frac{1}{h}$.
Berechnen Sie die Temperatur des Kanneninhalts nach 1; 10 und 24 Stunden.
Zeichnen Sie G im Intervall $0 \leq t \leq 24$.
Ermitteln Sie rechnerisch, nach wie vielen Stunden der Inhalt der Kanne auf eine Temperatur von 50 °C abgekühlt ist.

1.2 Für eine zweite Thermoskanne sei bei einer Umgebungstemperatur von 8 °C die Anfangstemperatur des Kanneninhalts von 93 °C nach 16 Stunden auf 53 °C gesunken.
Berechnen Sie die Konstante k für diese Kanne und vergleichen Sie beide Kannen auf ihre isolierende Wirkung.

1.3 Für den Mittelwert ϑ_m der Temperatur des Kanneninhalts im Intervall $t_1 \leq t \leq t_2$ gilt allgemein $\vartheta_m = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$.
Berechnen Sie ϑ_m für $t_1 = 0$ und $t_2 = 24$ für die Kanne aus Aufgabe 1.1.

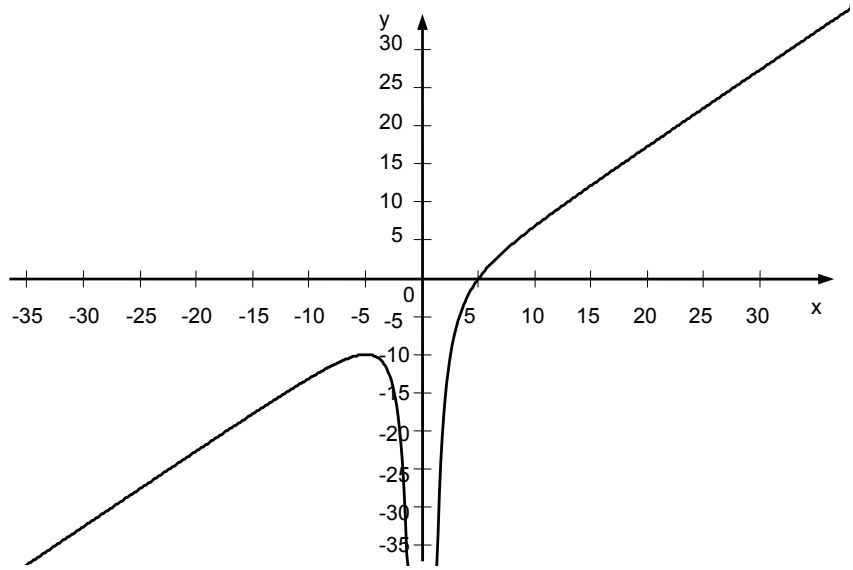
1.4 Ermitteln Sie die Abkühlungsgeschwindigkeit $f'(t) = \frac{d\vartheta}{dt}$.
Zeigen Sie, dass $f'(t) = \frac{d\vartheta}{dt} = -k(\vartheta - \vartheta_u)$ ist.

W2 Analysis

Eine Funktion f ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{x^3 - 2{,}5x^2 - 62{,}5}{x^2}\ ; \quad x \in R;\ x \neq 0.$$

Ihr Graph sei K (siehe Abbildung).



2.1 Untersuchen Sie K auf Asymptoten.
Bestätigen Sie rechnerisch, dass K einen Hochpunkt, aber keinen Wendepunkt besitzt.

2.2 Für welche Punkte des Graphen ist der Anstieg der Tangenten größer als 9?

2.3 Der Graph K, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung x = t, $t \in R$ mit $0 < t \leq 5$ begrenzen eine Fläche mit dem Inhalt A(t).
Berechnen Sie A(t).

2.4 Untersuchen Sie das Verhalten von A(t) für $t \to 0$. Für welche Gerade mit der Gleichung x = t mit $t \in N$ gilt A(t) = 15,75 (FE)?

2.5 Die Gerade mit der Gleichung y = x – 12,5 schneidet K in zwei Punkten A und B.
Berechnen Sie die Koordinaten von A und B.
Zeigen Sie, dass die y-Achse das Dreieck OAB mit O(0/0) in zwei flächengleiche Teildreiecke zerlegt.

W3 Analytische Geometrie

Durch die Punkte A(4/1/2), B(1/4/2), C(-2/1/2), D(1/-2/2) und S(1/1/6) ist eine Pyramide K_1 im kartesischen Koordinatensystem gegeben.

3.1 Zeichnen Sie die Pyramide K_1.

3.2 Zeigen Sie, dass die Grundfläche ABCD ein Quadrat ist.

3.3 Untersuchen Sie, ob K_1 eine gerade Pyramide ist.

3.4 Weisen Sie nach, dass der Punkt P(-0,5/1/4) auf der Kante $\overline{CS}$ liegt.
Eine Ebene durch die Punkte A, D und P schneidet die Pyramide.
Ermitteln Sie den Flächeninhalt der Schnittfigur.

3.5 Die Spitze S der Pyramide K_1 wird an der Grundfläche ABCD gespiegelt.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes S'.
Die Punkte ABCDS' sind Eckpunkte einer weiteren Pyramide K_2.
Zeichnen Sie K_2 in das Koordinatensystem aus Aufgabe 3.1 ein.

3.6 Die x-y-Ebene schneidet von K_2 einen Teil ab.
Bestimmen Sie das Volumen des oberhalb der x-y-Ebene liegenden Restkörpers.

W4 Stochastik

4.1 Die Fußballmannschaft 1. FC Ostsee hat in ihrem Kader 25 Spieler, davon 3 Torleute, 7 Verteidiger, 8 Mittelfeldspieler und 7 Stürmer.
Der Trainer hat das 4 : 4 : 2–System durchgesetzt, d. h. es spielen ein Torwart, 4 Verteidiger, 4 Mittelfeldspieler und 2 Stürmer.
Wie viele verschiedene Mannschaften kann der Trainer nach diesem System aufstellen, wenn keiner der Spieler in seiner Spielergruppe eine besondere Position einnehmen muss?
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass seine Stammspieler, ein Torwart, 2 Verteidiger und ein Stürmer, in einer zufällig nach dem 4 : 4 : 2-System aufgestellten Mannschaft spielen?

4.2 Stürmer A. Magnusson schießt 12 % seiner Tore aus einer Abseitsstellung heraus. In 90 % der Fälle erkennt der Linienrichter diese Abseitsstellung als solche an und der Schiedsrichter gibt das Tor dann auch nicht. Allerdings wird in 15 % der Fälle, in denen Magnusson nicht im Abseits steht (das Tor also regulär wäre), das Tor wegen angeblichem Abseits nicht gegeben.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit entscheidet das Schiedsrichterteam richtig?

4.3 Der Spieler L. Timo hat beim Elfmeterschießen eine Trefferquote von 75 %. Im Training schießt er 20-mal vom Elfmeterpunkt auf das Tor.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er

- genau 16-mal,
- häufiger als 16-mal,
- mindestens 12- und höchstens 18-mal?

Wie hoch müsste die Trefferquote sein, damit bei 5 Schüssen der Elfer mindestens einmal mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % verwandelt wird?
(Es wird vorausgesetzt, dass die Schüsse unabhängig voneinander sind.)

4.4 Der 1. FC Ostsee hat an den bisherigen 23 Spieltagen achtmal gewonnen, viermal unentschieden gespielt und elfmal verloren. Diese Verteilung soll als Grundlage für die Berechnung der Einzelwahrscheinlichkeiten für die Zufallsgröße X (Anzahl der Punkte pro Spiel) dienen. Der Gewinner erhält drei Punkte, für ein Remis gibt es einen Punkt und der Verlierer erhält nichts.
Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X auf.
Wie viele Punkte sind beim 1. FC Ostsee pro Spiel zu erwarten?
Aus Erfahrung weiß man, dass 40 Punkte am Ende der Saison den Klassenerhalt bedeuten.
Ist damit zu rechnen, dass der Fußballclub, dessen Punkte pro Spiel durch die Zufallsgröße X beschrieben werden, in der Saison mit 34 Spielen die 40 Punkte erreicht?

4.5 Ein Fan des 1. FC Ostsee behauptet, er kann mindestens 75 % der Spielausgänge seiner Mannschaft bezüglich Sieg, Remis oder Niederlage voraussagen. Man ist bereit ihm zu glauben, wenn er unter den ersten 20 Spielen mindestens 13 richtige Tipps abgibt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Fan recht hat, ihm aber nicht geglaubt wird..

Anhang: Summenfunktion der Binomialverteilung: n = 20, p = 0,75

k	$P(X \leq k)$
0	0,0000
…	…
6	0,0000
7	0,0001
8	0,0009
9	0,0039
10	0,0139
11	0,0409
12	0,1018
13	0,2142
14	0,3828
15	0,5852
16	0,7748
17	0,9087
18	0,9757
19	0,9968
20	1,0000