Analysis 1

Betrachten Sie die Funktionenschar f_k mit

$f_k(x) = k - k\,(\ln(x))^2$, $k \in \mathbb{IR} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{ID} = \mathbb{IR}_{>0}$.

a) Diskutieren Sie die Funktionen f_k , d.h. untersuchen Sie in Abhängigkeit vom Parameter k die Funktionen auf Nullstellen, bestimmen Sie das Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs und berechnen Sie die Extrem- und Wendepunkte der Graphen zu f_k.
Untersuchen Sie, welche Besonderheiten es bei den Extrem- und Wendepunkten der Graphen dieser Funktionenschar gibt.

[Kontrolle: $f_k''(x) = -\frac{2k}{x^2}\,(1 - \ln(x))$] [7 | 7 | 0]

b) Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen zu f_2 , indem Sie die für $k = 2$ gefundenen Punkte verwenden und skizzieren Sie den Verlauf der Wendetangente. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das durch die Wendetangente und die Koordinatenachsen begrenzt wird.
Ermitteln Sie den Parameter $k > 0$, bei dem dieses Dreieck einen Flächeninhalt von 2 FE (Flächeneinheiten) besitzt.

[2 | 4 | 0]

c) Bestimmen Sie durch partielle Integration eine Stammfunktion F_k zu f_k und berechnen Sie denjenigen Parameter k, für den das vom Graphen zu f_k und der x-Achse umschlossene Flächenstück ebenfalls einen Flächeninhalt von 2 FE besitzt.

[Hinweis: Eine Stammfunktionsgleichung ist $F_k(x) = -k\,x\,(\ln(x) - 1)^2$]

[3 | 4 | 0]

d) Untersuchen Sie, für welche Zahlen $n \in \mathbb{IN}_0$ gilt:

$$\int \frac{1}{(\ln(x))^n}\,dx = -\frac{x}{(n-1)(\ln(x))^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{1}{(\ln(x))^{n-1}}\,dx\ .$$

[0 | 0 | 3]