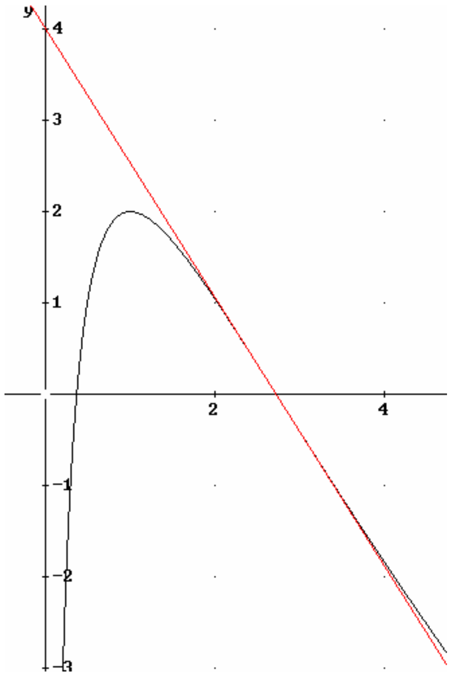
Erwartungshorizont: Analysis 1

	Erwartete Leistung	Bewertung		
		I	II	III
a)	Zur Berechnung der Nullstellen betrachten wir die Gleichung $k - k\,(\ln(x))^2 = 0$. Es gilt nun $k - k\,(\ln(x))^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - (\ln(x))^2 = 0 \Leftrightarrow (\ln(x))^2 = 1 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \vee \ln(x) = 1$ $\Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \vee x = e$. Die Nullstellen sind also $x_{01} = \frac{1}{e}$ und $x_{02} = e$.	2		
	Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs: Für $x \to 0$ gilt $\ln(x) \to -\infty$, also für $x \to 0$ gilt $(\ln(x))^2 \to \infty$, ebenso für $x \to \infty$ gilt $\ln(x) \to \infty$, also für $x \to \infty$ gilt $(\ln(x))^2 \to \infty$. Damit sind folglich zwei Fälle zu unterscheiden: (i) Ist $k > 0$, so gilt $x \to 0 \Rightarrow f_k(x) \to -\infty$ und $x \to \infty \Rightarrow f_k(x) \to -\infty$. (ii) Ist $k < 0$, so gilt $x \to 0 \Rightarrow f_k(x) \to +\infty$ und $x \to \infty \Rightarrow f_k(x) \to +\infty$.		2	
	Die Ableitungen dieser Funktionen f_k sind: $f'(x) = -k\ 2\ln(x)\ \frac{1}{x} = -\frac{2k}{x}\ln(x)$ $f''(x) = -\frac{2k}{x}\ \frac{1}{x} + \frac{2k}{x^2}\ln(x) = -\frac{2k}{x^2}(1 - \ln(x))$ $f'''(x) = \frac{4k}{x^3}(1 - \ln(x)) - \frac{2k}{x^2}(-\frac{1}{x}) = \frac{2k}{x^3}(3 - 2\ln(x))$	3		
	Extrempunkte: Notwendig für einen Extrempunkt an der Stelle x_E ist $f'(x_E) = 0$. Daher betrachten wir die Gleichung $-\frac{2k}{x}\ln(x) = 0$.	1		
	Es gilt $-\frac{2k}{x}\ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0$ $\Leftrightarrow x = 1$. Der einzige Kandidat ist $x_E = 1$. Hinreichend für einen Extrempunkt an der Stelle x_E ist $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) \neq 0$. Nun ist $f''(1) = -2k(1 - 0) = -2k \neq 0$ und $f(1) = k$, also ist für $k > 0$ der Punkt H(1 / k) Hochpunkt des Graphen zu f_k und für $k < 0$ der Punkt T(1 / k) Tiefpunkt der Graphen zu f_k.		2	
	Wendepunkte: Notwendig für einen Wendepunkt an der Stelle x_W ist $f''(x_W) = 0$. Wir betrachten die Gleichung $-\frac{2k}{x^2}(1 - \ln(x)) = 0$.	1		
	Es gilt hier $-\frac{2k}{x^2}(1 - \ln(x)) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$. Der einzige Kandidat ist somit $x_w = e$. Hinreichend für einen Wendepunkt an der Stelle x_W ist $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) \neq 0$. Es ist nun $f'''(e) = \frac{2k}{e^3}(3 - 2) = \frac{2k}{e^3} \neq 0$ und $f(e) = 0$, also ist W(e / 0) ein Wendepunkt eines jeden Graphen zu f_k!		2	
	Die Extrempunkte der Kurvenschar liegen alle auf einer Geraden parallel zu Werteachse durch (1 / 0). W (e / 0) ist der Wendepunkt einer jeden Scharkurve.		1	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Erwartete Leistung</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td rowspan="3">b)</td><td>Für k = 2 ergeben sich folgende Punkte:
Schnittpunkte mit der x-Achse:
$N_1(\frac{1}{e} / 0)$ und $N_2(e / 0)$.
Hochpunkt H(1 / 2) , Wendepunkt W(e / 0).

</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Die Steigung der Wendetangente t ist hier $m = f'(e) = -\frac{4}{e}$. Es gilt nun $t(e) = -\frac{4}{e} e + n = 0$,
also n = 4 und die Tangentengleichung lautet $t(x) = -\frac{4}{e} x + 4$.
Der gesuchte Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks beträgt $A = \frac{1}{2} e \ 4 = 2e \approx 5{,}44$ FE.</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>Allgemein gilt für die Wendetangente t_k der Schar: $m_k = -\frac{2k}{e}$ und $t_k(e) = -\frac{2k}{e} x + n = 0$,
daher $t_k(x) = -\frac{2k}{e} x + 2k$. Der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks beträgt
also 2 FE, wenn für den Parameter k gilt: $2 = \frac{1}{2} e \ 2k$, also $k = \frac{2}{e}$.</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Es gilt: $\int (k - k(\ln(x))^2)\, dx = kx - k \int (\ln(x))^2 dx$.
Mit Hilfe der partiellen Integration wird das verbleibende Integral bestimmt:
$\begin{bmatrix} u = \ln(x) & v' = \ln(x) \\ u = \frac{1}{x} & v = x\ln(x) - x \end{bmatrix}$ (Aus dem Tafelwerk wurde eine Stammfunktion zu v’ entnommen.)</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
</table>

	Erwartete Leistung	Bewertung I	II	III
	Damit ergibt sich nun: $\int (\ln(x))^2\,dx = x(\ln(x))^2 - x\ln(x) - \int(\ln(x)-1)\,dx$ und mit $\tilde{c} \in$ IR gilt: $\int (\ln(x))^2\,dx = x(\ln(x))^2 - x\ln(x) - x\ln(x) + x + x + \tilde{c}$, also $\int (\ln(x))^2\,dx = x(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x + \tilde{c}$. Insgesamt folgt also mit c ∈ IR: $\int(k - k(\ln(x))^2)\,dx = kx - k\left(x(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x + \tilde{c}\right)$ $= kx - kx(\ln(x))^2 + 2kx\ln(x) - 2kx + c = -kx\,((\ln(x))^2 - 2\ln(x) + 1) + c$. Wir erhalten daher: $\int(k - k(\ln(x))^2)\,dx = -kx(\ln(x)-1)^2 + c$.		2	
	Da die Nullstellen (x_{01} und x_{02}) der Schar bekannt sind, beschreibt der Wert $\left\| \int_{x_{01}}^{x_{02}} f_k(x)\,dx \right\|$ den Inhalt der eingeschlossenen Fläche. Es ist $\int_{\frac{1}{e}}^{e}(k - k(\ln(x))^2\,dx = \left[-kx(\ln(x)-1)^2\right]_{\frac{1}{e}}^{e} = (0 - (-\frac{k}{e}\,4)) = \frac{4k}{e}$. Der Flächeninhalt 2 FE entsteht, wenn $\left\|\frac{4k}{e}\right\| = 2$ ist, also wenn $k = \frac{e}{2}$ oder $k = -\frac{e}{2}$ ist.	3		
d)	Wir erkennen sofort, dass zunächst n ≠ 1 sein muss, da nicht durch Null geteilt werden darf. Die Gleichung ist wahr, wenn die Ableitungen beider Gleichungsseiten gleich sind. Nach der Ableitung gilt für alle $n \in IN_0 \setminus \{1\}$: $\frac{1}{(\ln(x))^n} = (\frac{x}{n-1}\frac{1}{(\ln(x))^{n-1}})' - \frac{1}{n-1}\frac{1}{(\ln(x))^{n-1}} \Leftrightarrow$ $\frac{1}{(\ln(x))^n} = (\frac{x}{n-1}(\ln(x))^{1-n})' - \frac{1}{n-1}\frac{1}{(\ln(x))^{n-1}} \Leftrightarrow$ $\frac{1}{(\ln(x))^n} = (\frac{1}{n-1}(\ln(x))^{1-n} + \frac{x}{n-1}(1-n)(\ln(x))^{-n}\frac{1}{x}) - \frac{1}{n-1}\frac{1}{(\ln(x))^{n-1}} \Leftrightarrow$ $\frac{1}{(\ln(x))^n} = (\frac{1}{n-1}\frac{1}{(\ln(x))^{n-1}} + \frac{1}{(\ln(x))^n}) - \frac{1}{n-1}\frac{1}{(\ln(x))^{n-1}} \Leftrightarrow$ $\frac{1}{(\ln(x))^n} = \frac{1}{(\ln(x))^n}$. Da die letzte Aussage für alle $n \in IN_0 \setminus \{1\}$ wahr ist, gilt also die Gleichung $\int \frac{1}{(\ln(x))^n}\,dx = \frac{x}{n-1}\frac{1}{(\ln(x))^{n-1}} - \int \frac{1}{n-1}\frac{1}{(\ln(x))^{n-1}}\,dx$ für alle $n \in IN_0 \setminus \{1\}$.			3
	Summe:	12	15	3