Erwartungshorizont: Analysis 2

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Erwartete Leistung</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Die Ursprungsgerade, die durch P(2/1) verläuft, hat die Gleichung $g_1(x) = \frac{1}{2}x$. Die andere Ursprungsgerade kann durch Spiegelung an der y-Achse aus g_1 gewonnen werden. Es ist $g_2(x) = -\frac{1}{2}x$.</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>An der Stelle -2 muss der Funktionswert von f mit dem von g_2 und an der Stelle +2 muss der von f mit dem von g_1 übereinstimmen. Diese Bedingungen führen zur Gleichung
I $16a + 4b + c = 1$.</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Da die Übergänge in P und Q ohne Knick erfolgen sollen, müssen die Ableitung von f an der Stelle -2 mit der Geradensteigung -0,5 von g_2 und die Ableitung von f an der Stelle +2 mit der Geradensteigung +0,5 von g_1 übereinstimmen. Mit $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$ folgt die Gleichung
II $32a + 4b = 0{,}5$.</td><td>1

1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Da der Übergang in P und Q ohne Krümmungssprung gefordert ist, muss die zweite Ableitung von f an den Stellen -2 und +2 gleich 0 sein, weil die Geraden ungekrümmt sind.
Mit $f''(x) = 12ax^2 + 2b$ folgt die Gleichung
III $48a + 2b = 0$.</td><td>1

1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>I, II und III bilden folgendes zu lösendes Gleichungssystem.

16a + 4b + c = 1
32a + 4b = 0,5 | : 4
48a + 2b = 0 | : 2 −
<hr>16a + 4b + c = 1
8a + b = 0,125
16a = -0,125 |: 16 und einsetzen in die 1. und 2. Gleichung.
<hr>-0,125 + 4b + c = 1
-0,0625 + b = 0,125 | +0,0625 und einsetzen in die 1. Gleichung.
a = -0,0078125 = $-\frac{1}{128}$
<hr>-0,125 + 0,75 + c = 1 | -0,625
b = 0,1875 = $\frac{3}{16}$
a = $-\frac{1}{128}$
<hr>c = 0,375 = $\frac{3}{8}$
b = $\frac{3}{16}$
a = $-\frac{1}{128}$

Insgesamt erhält man die Lösung $f(x) = -\frac{1}{128}x^4 + \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{8}$.</td><td>1

1

1</td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Erwartete Leistung	Bewertung		
		I	II	III
b)	Der Graph der Funktion h ist achsensymmetrisch zur y-Achse, da offensichtlich h(-x) = h(x) gilt. Daher sind lediglich die Bedingungen h(2) = 1, h´(2) = 0,5 und h´´(2) = 0 zu prüfen. Es ist h(2) = 1 + ln(1) = 1.		1 1	
	Mit $h'(x)=\dfrac{\frac{1}{8}\cdot 2x}{\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}}=\dfrac{2x}{x^2+4}$ folgt $h'(2)=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$. Ferner gilt wegen $h''(x)=\dfrac{(x^2+4)\cdot 2-2x\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\dfrac{-2x^2+8}{(x^2+4)^2}$ also $h''(2)=\dfrac{0}{64}=0$.		2 2	
c)	Auf Grund der Achsensymmetrie von f und der Symmetrie von g_1 und g_2 zueinander reicht es aus, die Berechnung für das Intervall [0;2] vorzunehmen. Die Maßzahl des Inhalts der Fläche, die von zwei Graphen begrenzt wird, ist der Absolutbetrag des Integrals der Differenzfunktion der beiden betrachteten Funktionen. Dabei muss vorausgesetzt werden, dass die Differenzfunktion im offenen Intervall (0;2) keine Nullstelle hat, was hier offensichtlich der Fall ist.	1		
	$\int_0^2\left(-\frac{1}{128}x^4+\frac{3}{16}x^2+\frac{3}{8}-\frac{1}{2}x\right)=\left[-\frac{1}{640}x^5+\frac{1}{16}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{8}x\right]_0^2=\frac{1}{5}$ Der gesuchte Flächeninhalt ist doppelt so groß. Die Flächenmaßzahl ist damit 0,4.	2		
	Wegen der Symmetrie kann man sich wieder auf das Intervall [0;2] beschränken und es in vier Teilintervalle unterteilen. Ich wähle als numerische Methode die Simpson-Regel mit $A\approx\frac{0{,}5}{3}\left[d(0)+d(2)+2\cdot d(1)+4\cdot(d(0{,}5)+d(1{,}5)\right]$ und d = h - g_1. Dann gilt 2 A ≈ $\frac{1}{3}\left[0{,}3068528194+0+2\cdot 0{,}0299963708+4\cdot(0{,}1174774413+0{,}0031399221)\right]$ ≈ 0,283105. Der „Landschaftsverbrauch“ mit einer Verbindungskurve, die dem Graphen von h entspricht, wäre damit geringer.		1 1 1	
d)	Über dem Intervall [0;2] ist die Bogenlänge der Neil-Parabel durch das Integral $L=\int_0^2\sqrt{1+[p'(x)]^2}\,dx=\int_0^2\sqrt{1+(1{,}5\cdot 0{,}245\cdot x^{0{,}5})^2}\,dx=\int_0^2\sqrt{1+0{,}13505625\cdot x}\,dx$ gegeben.		1	
	Ich ersetze den Radikanden durch z und wende die Substitutionsregel an. $z=1+0{,}13505625\cdot x$, $\frac{dz}{dx}=0{,}13505625$, $dx=\frac{dz}{0{,}13505625}$.		2	
	Somit folgt $L=\frac{1}{0{,}13505625}\int_1^{1{,}2701125} z^{\frac{1}{2}}dz=\frac{1}{0{,}13505625}\cdot\frac{2}{3}\left[z^{\frac{3}{2}}\right]_1^{1{,}2701125}=4{,}936215\cdot(1{,}431407-1)$ = 2,12952.		2	
	Die gesamte Länge der Straße ergibt aus der Verdopplung von L, also 4,25904.		1	

	Erwartete Leistung	Bewertung		
		I	II	III
e)	Wegen der offensichtlichen Achsensymmetrie wähle ich eine Kosinusfunktion. Diese muss an der Stelle 0 einen Tiefpunkt haben. Daher spiegele ich den cos-Graphen an der x-Achse und verschiebe ihn nach oben. Ein Kandidat für einen Vorschlag wäre somit die Zuordnung $x \to -\cos(x)+c$. Ferner ist eine Amplitudenanpassung notwendig, sodass die Zuordnung $x \to -a\cdot\cos(x)+c$ zu betrachten wäre. Um einen „gleitenden" Übergang an die Geraden zu gewährleisten, muss die Periode noch mittels eines Parameters verändert werden. Damit lautet mein Vorschlag $k(x) = -a\cdot\cos(b\cdot x)+c$. Die drei Parameter a, b und c sind aus den drei Forderungen zu berechnen.			1 1 1
	Summe:	12	15	3