Erwartungshorizont: Analytische Geometrie 2

	Erwartete Leistung	Bewertung I	II	III
a)	Für die Gleichung der Geraden g_{AB} wähle ich den Ortsvektor von A als Stützvektor und $\overrightarrow{AB}$ als Richtungsvektor. Ich erhalte $g_{AB}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ bzw. $g_{AB}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Für C_t führe ich jetzt die Punktprobe durch: $\begin{pmatrix} t-8 \\ t \\ t-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Aus der 2. Komponentengleichung ergibt sich t=0, woraus für die 1. Gleichung r = -8 und für die 3. Gleichung r = -4 folgt. Dieser Widerspruch zeigt auf, dass C_t nicht auf g_{AB} liegt.	1 2		
	Das Dreieck ABC_t, das durch die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC_t}$ aufgespannt wird, hat den Flächeninhalt $A_\Delta = \frac{1}{2}\left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} t-8 \\ t \\ t-4 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\left\| \begin{pmatrix} -4t \\ -16 \\ 4t \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{32t^2+256} = 2\sqrt{2t^2+16}$. Alternativlösung: Berechung des Abstands des Punktes C_t von der Geraden g_{AB} und Produktbildung $0{,}5 \cdot \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot d(C_t, g_{AB})$. A_Δ wird minimal, wenn t^2 minimal wird. Der kleinste Wert, den ein Quadrat annehmen kann, ist 0. Daher ist 0 der gesuchte Parameter.		2 2	
b)	Die Mittelpunkte der gesuchten Kugeln liegen auf einer Geraden g, die senkrecht zur x_1-x_3-Ebene und durch den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Dreiecks OAB verläuft. Die Mittelsenkrechte zu $\overline{OA}$ kann durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und die zu $\overline{OB}$ mittels $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ beschrieben werden.		1 1	
	Das Gleichsetzen der Terme der Geradengleichungen ergibt in der 1. Komponentengleichung a = 2 und in der 3. Gleichung b = 2. Der Schnittpunkt lautet S(2/0/-2). Eine Gleichung der Geraden g lautet daher $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.		1 1	
	Die Punkte auf g, die dann z. B. zum Ursprung O den Abstand $\sqrt{24}$ haben, müssen die Gleichung $4+s^2+4=24$ erfüllen. Es ergeben sich s=4 und s=-4 als Lösungen. Eingesetzt in g erhalte ich $M_1(2/4/-2)$ und $M_2(2/-4/-2)$ als mögliche Lösungen. Die Kugelgleichungen lauten somit $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}\right]^2 = 24$ und $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}\right]^2 = 24$.		1 1	

	Erwartete Leistung	Bewertung I	II	III
	Die Ortsvektoren der Punkteschar C_t stellen eine Gerade c dar: $c:\vec{x}=\begin{pmatrix}t-8\\t\\t-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\0\\-8\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Diese Gerade ist mit der Kugel $k:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}\right]^2=24$ zu schneiden. Dazu setze ich den Geradenterm in die Kugelgleichung ein und erhalte $\left[\begin{pmatrix}-8\\0\\-8\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}\right]^2=\left[\begin{pmatrix}-10\\-4\\-6\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]^2=152-40t+3t^2=24$ und somit $t^2-\frac{40}{3}t+\frac{128}{3}=0$. $t=\frac{20}{3}\pm\sqrt{\frac{400-384}{9}}=\frac{20}{3}\pm\frac{4}{3}$, d.h. $t=8\vee t=\frac{16}{3}$. Setzt man die Lösungen in den Geradenterm von c ein, erhält man die gesuchten Punkte $C_8(0/8/0)$ und $C_{\frac{16}{3}}\left(-\frac{8}{3}\middle\vert\frac{16}{3}\middle\vert-\frac{8}{3}\right)$. Das Volumen der Pyramide ist mithilfe des Spatproduktes zu berechnen. $\frac{1}{6}\left[\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB}\overrightarrow{OC_8}\right]=\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{OA}\circ\left(\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC_8}\right)\right)=\frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}\circ\left[\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}\right]\right)=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\32\end{pmatrix}=-\frac{128}{6}=-21\frac{1}{3}$ Die Maßzahl des Volumens entspricht dem Betrag des Spatprodukts. $V_{Pyr}=21\frac{1}{3}VE$.	1 1 1 1 2		
c)	Als Stützvektor der Ebene E_t wähle ich den Ortsvektor des Punktes A. Die Spannvektoren sind dann $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC_t}=\begin{pmatrix}t-8\\t\\t-4\end{pmatrix}$. Ich bilde das Vektorprodukt der Spannvektoren und erhalte den Normalenvektor der Ebene $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}t-8\\t\\t-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t\\-4\\t\end{pmatrix}$. Eine Normalenform lautet dann $\begin{pmatrix}-t\\-4\\t\end{pmatrix}\circ\vec{x}=\begin{pmatrix}-t\\-4\\t\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}=-4t$. Wenn zwei Ebenen senkrecht aufeinander stehen, dann sind ihre Normalenvektoren orthogonal, d.h. ihr Skalarprodukt ist 0. $\begin{pmatrix}t\\4\\-t\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}t^*\\4\\-t^*\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow 2t\cdot t^*+16=0\Leftrightarrow t\cdot t^*=-8$, q.e.d. Eine Ebene E_t schneidet die x_2-Achse im Punkt $S_t(0/y/0)$. Setzt man den Ortsvektor in die Normalenform von E_t ein, erhält man $\begin{pmatrix}-t\\-4\\t\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}=-4t$, also $y=t$. Wegen $t^*=-\frac{8}{t}$ ist der	1 1 1	1 2 1	

	Erwartete Leistung	Bewertung		
		I	II	III
	Schnittpunkt der zu E_t orthogonalen Ebene E_{t^*} mit der x_2-Achse $S_{t^*}\left(0/-\frac{8}{t}/0\right)$.		1	
	Der Abstand beider Punkte ist $d(t)=t+\frac{8}{t}$, wenn t > 0, bzw. $d(t)=-t-\frac{8}{t}$, wenn t < 0. Wenn d(t) minimal ist, gilt d´(t) = 0. Es ist eine Fallunterscheidung vorzunehmen:			1
	1. Fall: t > 0: $d´(t)=1-\frac{8}{t^2}=0$ ergibt $t=2\sqrt{2}\vee t=-2\sqrt{2}$. Einsetzen der positiven Lösung in die 2. Ableitung $d''(t)=\frac{16}{t^3}$ ergibt einen positiven Wert.			1
	2. Fall: t < 0: $d´(t)=-1+\frac{8}{t^2}=0$ ergibt ebenfalls $t=2\sqrt{2}\vee t=-2\sqrt{2}$. Jetzt ergibt das Einsetzen der negativen Lösung in $d''(t)=-\frac{16}{t^3}$ ein positives Ergebnis, womit die Minimaleigenschaft insgesamt nachgewiesen ist.			1
	Summe:	12	15	3